В. О. ГОРДОН, Ю. Б. ИВАНОВ, Т. Е. СОЛНЦЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



[redacted]



В. О. ГОРДОН, Ю. Б. ИВАНОВ, Т. Е. СОЛНЦЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ

[redacted]

В. О. ГОРДОН, Ю. Б. ИВАНОВ, Т. Е. СОЛНЦЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО КУРСУ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов машиностроительных
и приборостроительных специальностей
высших учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

515
Г 68
УДК 515.0 (075.8)

Сборник задач по курсу начертательной геометрии. Гордон В. О., Иванов Ю. Б., Солнцева Т. Е., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971 г.

В сборнике подобраны задачи по начертательной геометрии применительно к программе для машиностроительных, приборостроительных и механико-технологических специальностей втузов. Сборник может служить учебным пособием для студентов всех форм обучения, особенно заочной, и будет очень полезен изучающим курс в их самостоятельной работе. В задачнике показан процесс решения типовых задач, иллюстрирующих основные положения курса, даны подробные решения ряда задач.

В конце книги приведены ответы к задачам, предлагаемым для самостоятельного решения. Ответы даны в текстовой или графической форме в зависимости от характера условия задач.

Сборник составлен в соответствии и применительно к учебнику «Курс начертательной геометрии» В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского. Однако такая согласованность не исключает возможности пользоваться другими учебниками, так как для понимания задач из данного пособия требуется лишь знание тех основных положений, которые должны содержаться в любом учебнике.

2-2-3
8-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник задач и упражнений соответствует программе курса начертательной геометрии для машиностроительных, приборостроительных и механико-технологических специальностей высших технических учебных заведений.

Сборник составлен в соответствии и применительно к учебнику «Курс начертательной геометрии» В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского, из которого в данный сборник перенесен ряд примеров и задач.

Авторы стремились помочь изучающим курс в их самостоятельной работе. Этим определился характер пособия, а именно показ процесса решения ряда типовых задач, относящихся к основным вопросам курса. Вместе с тем даны и условия задач для самостоятельного их решения. Условия большинства задач подобны условиям решенных задач, но имеются также задачи и без решенных прототипов, что требует от учащегося проявления большей самостоятельности и творческой инициативы.

Ограничение курса начертательной геометрии в часах и его преимущественно односеместровое прохождение обусловливают и программное ограничение круга рассматриваемых вопросов. Очевидно, это предельный минимум; авторы исходили из него при составлении сборника.

В основном задачи, решенные [1]) и предлагаемые для решения, относятся к взаимному сочетанию геометрических элементов и их расположению в пространстве и к применению способов преобразования чертежа вращением и введением дополнительных плоскостей проекций. Объектами рассмотрения являются точки, прямые и кривые линии, плоские и некоторые другие поверхности — отдельно и в их взаимном расположении. Рассматриваются задачи на определение расстояний и углов, на построение аксонометрических проекций — прямоугольных — изо- и диметрических (с сокращением по оси y вдвое).

Чертежи в большинстве случаев даны в поэтапном их выполнении. Это облегчит чтение чертежей и рассмотрение последовательности их построений. Для лучшего понимания сущности вопроса и представле-

---

[1]) Их номера отмечаются звездочкой вверху.

ния пространственной картины в некоторых из решенных задач даны наглядные изображения. Даны также примеры составления планов решения задач и анализа полученных решений.

Такие сборники задач по начертательной геометрии с их решениями уже издавались, например, в 1928 г. «Сборник задач по ортогональным проекциям с подробными решениями» С. К. Руженцова и Б. А. Иванова. Опыт показывает их полезность.

Особенностью данного сборника является наличие ответов к задачам, предложенным для самостоятельного решения. Правильно ли решена задача? Этот вопрос при самостоятельном решении по большей части является открытым, что затрудняет работу учащегося. Для того чтобы он сам мог убедиться в правильности полученного им решения, в сборнике помещены ответы. Они даны в текстовой или графической форме в зависимости от поставленных в задаче вопросов. Ответ к задаче в форме чертежа содержит положение искомых элементов на фоне задания.

В сборнике даны преимущественно чертежи с указанием оси x как базы для отсчета размеров при построениях и для удобства при перечерчивании заданий. Наличие оси x как направляющей линии облегчает введение в чертеж любой информации и построение чертежей-ответов. Если же ось не показана (как это сделано в некоторых задачах), то ее роль для отсчета размеров может быть присвоена какой-либо из прямых на данном чертеже. Все это находится в логической связи с техническими чертежами, где всегда имеет место база отсчета, хотя и не обозначаемая так, как на чертежах в начертательной геометрии. Однако ось x сохраняет и присущее ей значение линии пересечения плоскостей проекций V и H, что имеет значение для представления пространственной картины рассматриваемого положения. Но и вне этого значения (определяемого названием «ось проекций») такая прямая является неотъемлемой составляющей каждого чертежа для построения его по заданным размерам. При этом выбор положения оси не является ограниченным и определяется исходя из необходимости и целесообразности.

Авторы придерживаются в основном обозначений, примененных еще в XIX столетии отечественными учеными Н. И. Макаровым и В. И. Курдюмовым и в настоящее время используемых в учебной литературе и в практике кафедр без каких-либо осложнений. Эти обозначения, в отличие от всех других, в достаточной степени просты, выразительны, легко читаемы и не загромождают чертежи.

В сборнике применен термин *проецировать* (от латинск. *projicere*) взамен *проектировать*, так как последнее имеет и другое значение, а именно «разрабатывать, составлять проект» (например, сооружения, механизма, перевозок и т. д.). Переход на слово *проецировать* вызвал также такие названия, как *проецирующая прямая*, *горизонтально-проецирующая* плоскость и т. п.

В том же смысле, в каком в некоторых курсах начертательной геометрии применено слово «эпюр» (а иногда «эпюра»), в данном сборнике взято слово «чертеж» (что, вообще, не является новым).

Для лучшего понимания решенных в сборнике задач и усвоения построений рекомендуется перечерчивать исходный чертеж и выполнять на нем все описанные построения.

Следует обратить особое внимание на то, что для сравнимости полученного учащимся чертежа-ответа предложенной для самостоятельного решения задачи с приведенным в сборнике ответом необходимо как можно точнее воспроизвести чертеж-задание, пользуясь осью x как базой отсчета. При желании можно чертеж-задание увеличить, что должно быть учтено при сравнении полученного ответа с ответом в сборнике.

При решении задач, для которых нет решенных прототипов, можно использовать помещенные в конце сборника краткие указания.

Выражение *изобразить наглядно*, дать наглядное изображение, означает построить изображение в косоугольной фронтальной диметрической проекции (хотя бы в известной под названием «кабинетная»).

Рекомендуется при самостоятельном решении задач предварительно дать рисунок требуемого построения и составить план решения, как это сделано в сборнике для некоторых решенных задач, а лишь затем выполнять построение.

Согласованность данного сборника задач с учебником «Курс начертательной геометрии» В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского не исключает возможности пользоваться другими учебниками, так как для понимания и решения задач по данному сборнику требуется знание тех основных положений, которые должны содержаться в любом учебнике. При этом, если имеется различие в некоторых обозначениях, можно сопоставить обозначения при помощи таблицы, которую можно найти в учебнике.

Для линий связи применена штрих-пунктирная линия с одной точкой между смежными штрихами. Но если линия связи проведена лишь для проверки правильности построения, то использована линия с двумя точками.

Номера решенных задач отмечены звездочками. Ответы на нерешенные задачи помещены в конце сборника.

Некоторые сокращения слов и условные обозначения в сборнике:

пл.— плоскость;
горизонт. — горизонтальный, -ая, -ое;
фронт. — фронтальный, -ая, -ое;
$\perp$ — перпендикулярно;
$\parallel$ — параллельно;
$\equiv$ — совпадает;
∟ — прямой угол.

ГЛАВА I

ТОЧКА И ПРЯМАЯ

§ 1. Точка

1*. Дать наглядные изображения точек A, B, C, D относительно плоскостей V и H. Точки заданы своими проекциями (рис. 1, *а*).

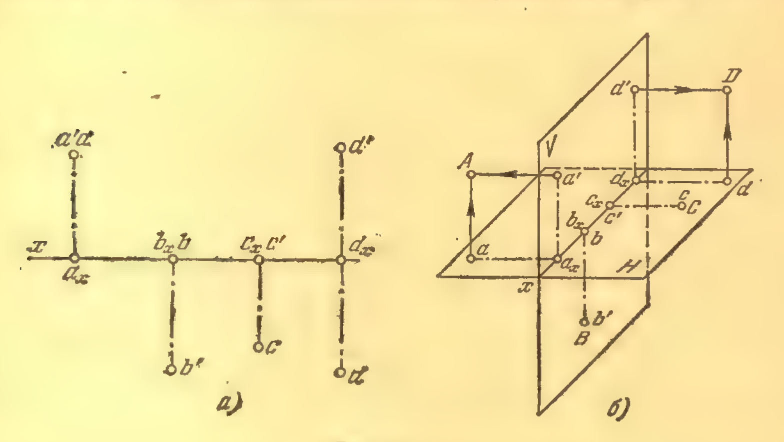


Рис. 1а, б.

Решение. Точки a_x, b_x, c_x и d_x (рис. 1, *б*) выбираем на оси x произвольно. Так как точка A находится во второй четверти (апликата точки положительна, ордината отрицательна), то отрезок a_xa, соответствующий значению ординаты, откладываем влево от пл. V. Отрезок a_xa', соответствующий значению апликаты, откладываем вверх от пл. H.

При построении точки D, находящейся в первой четверти (апликата и ордината положительны), отрезок d_xd откладываем вправо от пл. V, а отрезок d_xd' — вверх от пл. H.

Положения точек A и D получены на пересечении перпендикуляров, проведенных через точки a и d (к пл. H) и через точки a' и d' (к пл. V).

Точка B лежит в пл. V; это следует из того, что горизонт. проекция b точки лежит (рис. 1, *а*) на оси x (ордината равна нулю). Следовательно, на рис. 1, *б* точка b

совпадает с b_x. Отрезок $b_x b'$, соответствующий отрицательному значению апликаты, откладываем вниз от пл. H. Положение самой точки B совпадает с положением ее фронт. проекции b'.

Точка C располагается в пл. H; это следует из того, что проекция c' лежит (рис. 1, *а*) на оси x (апликата точки C равна нулю). Поэтому и на рис.1, *б* c' совпадает с c_x.

Так как для точки C ордината положительна, то соответствующий этой ординате отрезок $c_x c$ откладывается (рис. 1, *б*) вправо от пл.V. Положение самой точки C совпадает с положением ее горизонт. проекции c.

2. Изобразить наглядно положения точек A, B, C, D и E, заданных своими проекциями (рис. 2).

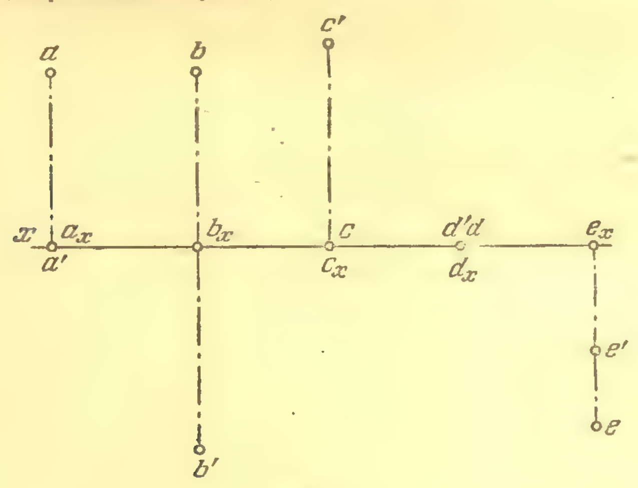


Рис. 2.

3*. Построить проекции точек A и B по их координатам. Построить проекцию точки C, расположенной симметрично точке A относительно фронт. пл. проекций. Изобразить наглядно положение этих точек относительно плоскостей V и H.

Координата / Точка	y	z
A	13,5	20
B	6,5	—20

Р е ш е н и е. Намечаем ось x (рис. 3, *а*) и на ней точку a_x. Так как точка A расположена в первой четверти (апликата и ордината положительны), то проекция a' находится над осью x на расстоянии 20, а проекция a — под осью x на расстоянии 13,5.

Для построения проекций точки B сначала задаемся (на оси x) произвольно точкой b_x и откладываем вниз от нее отрезок $b_x b$, равный значению ординаты (6,5), и отрезок $b_x b'$, соответствующий отрицательному значению апликаты (—20). Точка B находится в четвертой четверти.

Точка C должна быть расположена симметрично точке A относительно пл. V. Следовательно, ордината точки C равна —13,5, а апликата равна 20. Точка c_x совпадает с точкой a_x, $c' = a'$, а горизонт. проекция c находится над осью x на расстоянии 13,5.

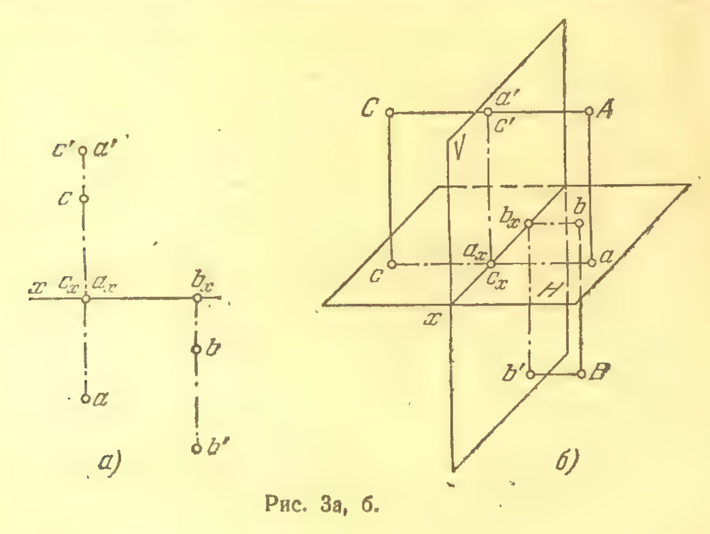


Рис. 3а, б.

На рис. 3, *б* дано соответствующее наглядное изображение положений точек A, B и C. Расстояние a_xb_x на рис. 3, *б* равно половине расстояния a_xb_x на рис. 3, *а*.

4. Построить проекции точек A, B, C по их координатам. Построить проекцию точки D, расположенной симметрично точке C относительно оси x. Изобразить наглядно положения этих точек относительно плоскостей V и H.

Координата / Точка	y	z
A	—25	0
B	—20	20
C	—30	—20

5*. Построить три проекции каждой из точек A и B по их координатам.

Координата / Точка	x	y	z
A	13,5	16,5	20
B	33,5	—26,5	—13,5

Решение. Для построения проекций точки A, находящейся в первом октанте (рис. 4, *а*), откладываем (рис. 4, *б*) на оси x отрезок Oa_x, равный значению абсциссы (13,5). Проекция a' находится над осью x на расстоянии 20, а проекции a — под осью x на расстоянии 16,5. Профильная проекция a'' находится на одном уровне с a' (рис. 4, *а* и *б*) на расстоянии $a''a_z$, равном значению ординаты точки A (16,5), вправо от оси z.

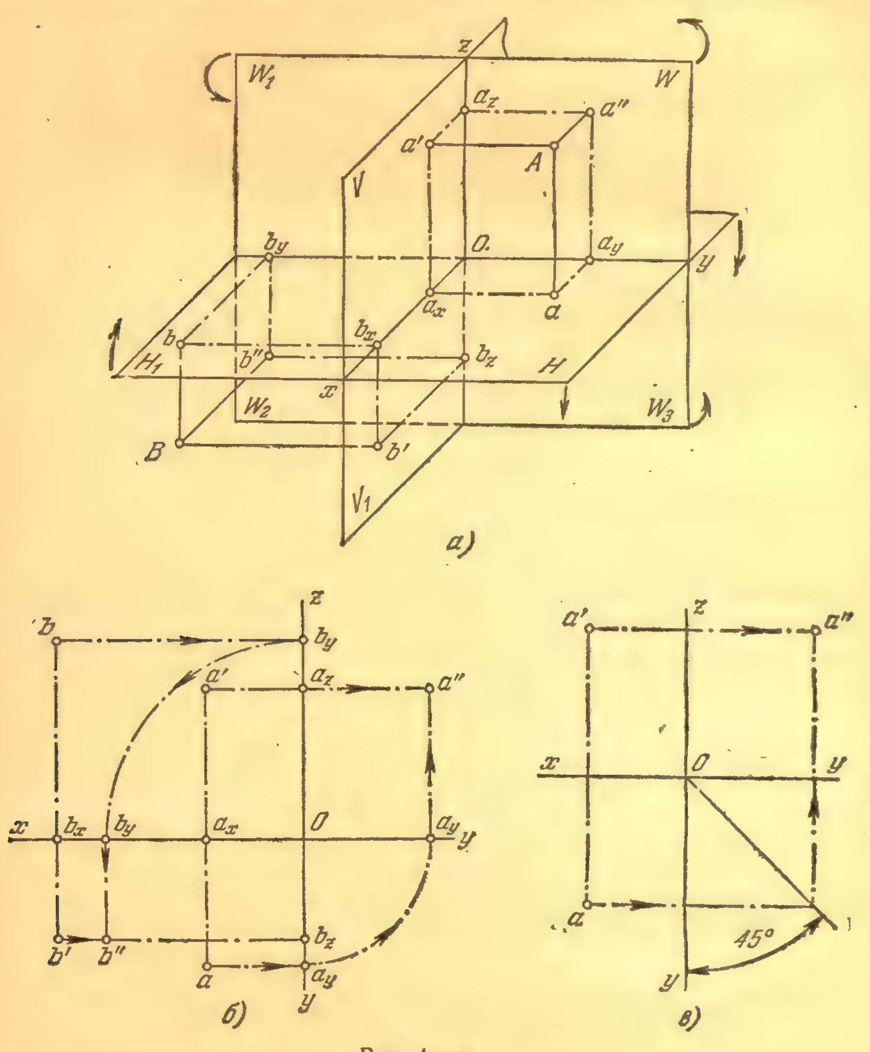


Рис. 4а—в.

Для построения проекций точки B откладываем на оси x отрезок Ob_x, равный 33,5. Так как точка B находится в третьем октанте (рис. 4,*а*), то точка b' находится под осью x на расстоянии 13,5, а точка b — над осью x на расстоянии 26,5. Точка b'' располагается на одном уровне с точкой b' слева от оси z на расстоянии b_zb'' (26,5) от нее. На рис. 4, *в* показан прием построения профильной проекции точки A при помощи вспомогательной прямой, проведенной из точки O под углом 45° к оси y.

§ 2. Прямая

6*. Изобразить наглядно положение отрезка AB относительно плоскостей V и H. Отрезок задан своими проекциями (рис. 5, *а*).

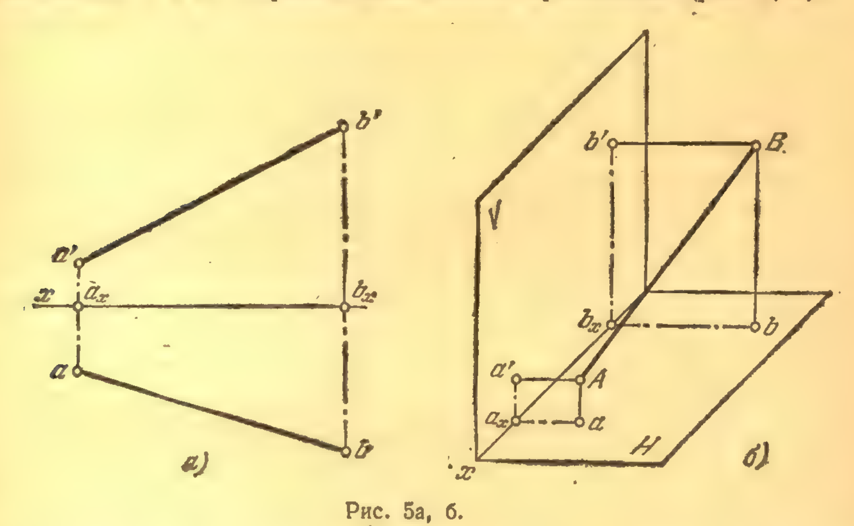


Рис. 5а, б.

Решение. Определяем положения концевых точек отрезка, как это было показано в задаче 1*. Отрезок AB определяется точками A и B (рис. 5, *б*).

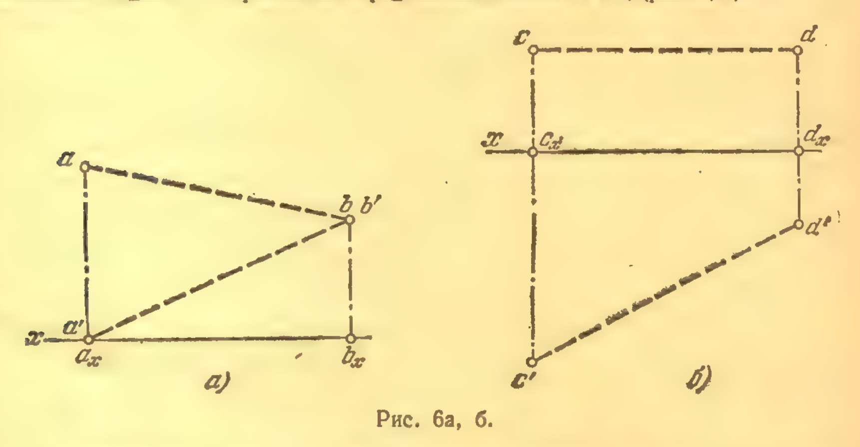


Рис. 6а, б.

7. Изобразить наглядно положения отрезков AB и CD относительно плоскостей V и H. Отрезки заданы своими проекциями (рис. 6, *а* и *б*).

8. Построить чертеж отрезка AB, если он:

а) находится в первой четверти пространства, расположен параллельно пл. V, концом B упирается в переднюю полу пл. H;

б) расположен в биссекторной плоскости четвертой четверти пространства, концом B упирается в ось проекций;

в) расположен во второй четверти пространства параллельно пл. V, концом B упирается в заднюю полу пл. H, конец A равноудален от плоскостей V и H;

г) расположен произвольно на нижней поле пл. V, концом B упирается в ось проекций;

д) расположен в четвертой четверти пространства параллельно пл. H, конец B равноудален от плоскостей проекций;

е) расположен в третьей четверти пространства перпендикулярно к пл. V, концом A упирается в ее нижнюю полу;

ж) расположен в четвертой четверти пространства перпендикулярно к пл. H, конец A равноудален от плоскостей проекций.

9. Прочитать чертежи отрезков, изображенных на рис. 7, *а—г*.

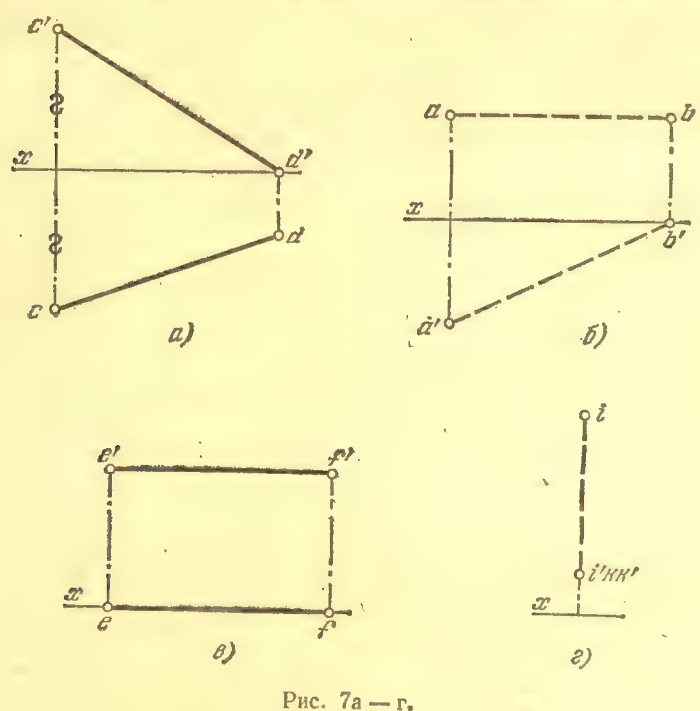


Рис. 7а — г.

§ 3. Взаимное положение прямой и точки

10*. Определить, лежат ли точки B и C на прямой AD, а точка K на прямой MN (рис. 8, *а* и *б*).

Решение. Так как проекции b и b', c и c' (рис. 8, *а*) не находятся на одноименных с ними проекциях прямой AD, то точки B и C на этой прямой не лежат.

Для определения, лежит ли точка K на прямой MN (рис. 8, *б*), построим профильные проекции точки K и прямой MN (рис. 8, *в*). Точка K не принадлежит прямой MN, так как ее профильная проекция k'' не лежит на профильной проекции $m''n''$.

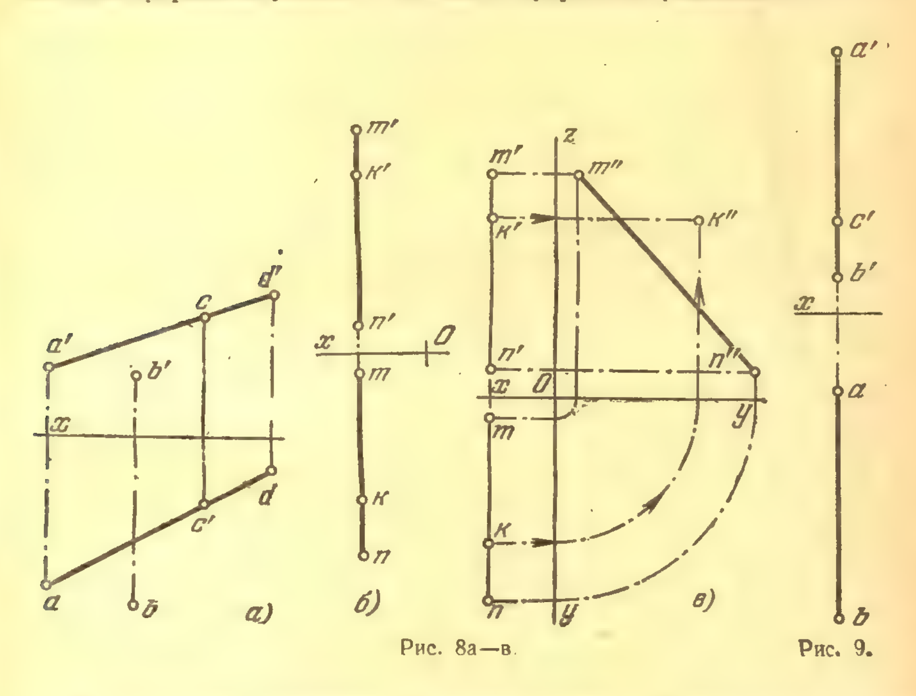


Рис. 8а—в.

Рис. 9.

11. Построить горизонт. проекцию точки C, принадлежащей прямой AB (рис. 9).

§ 4. Следы прямой

12*. Построить следы прямой, проходящей через точки A и B (рис. 10, *а*), и указать, через какие четверти пространства она проходит.

Решение. Проводим проекции $a'b'$ и ab прямой AB.

Для построения ее горизонт. следа продолжаем (рис. 10, *б*) фронт. проекцию $a'b'$ до пересечения с осью x в точке (m'), которая является фронт. проекцией горизонт. следа прямой. Затем из точки m' проводим перпендикуляр к оси x (линию связи) до пересечения с продолженной горизонт. проекцией прямой в точке (m), которая является горизонт. проекцией горизонт. следа прямой. Точка m совпадает с самим горизонт. следом — точкой M.

Для построения фронт. следа прямой продолжаем ее горизонт. проекцию ab до пересечения с осью x в точке (n), которая является горизонт. проекцией фронт. следа прямой. Из точки n проводим перпендикуляр к оси x до пересечения с продолженной проекцией $a'b'$ в точке (n'), которая является фронт. проекцией фронт. следа прямой. Точка n' совпадает с самим фронт. следом прямой — точкой N. Из расположения проекций m' и m, n' и n следует, что точка M (горизонт. след прямой) лежит

на передней поле пл. H, а точка N (фронт. след прямой)—на верхней поле пл. V. Следовательно, прямая проходит через вторую, первую и четвертую четверти пространства.

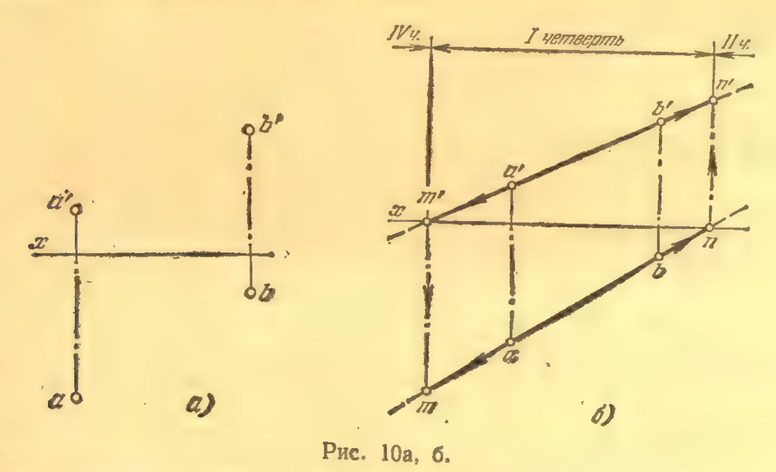


Рис. 10а, б.

13. Построить следы прямой, определяемой точками A и B (рис. 11, a и $б$), и указать, через какие четверти пространства она проходит.

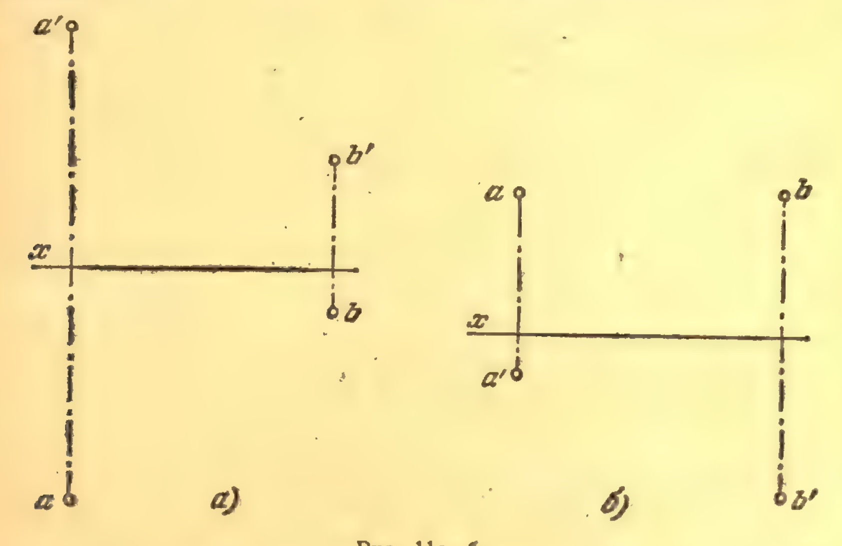


Рис. 11а, б.

14*. Построить следы профильной прямой AB (рис. 12, a) и указать, через какие четверти пространства она проходит.

Решение. Из построения (рис. 12, $б$) следует, что горизонт. проекция n фронт. следа прямой и фронт. проекция m' горизонт. следа совпадают в точке пересечения проекций прямой с осью x. Для построения точек m и n' находим сначала профильные

проекции m'' и n''. Для этого продолжаем профильную проекцию $a''b''$ до пересечения с осями z и y. Получив проекции m'' и n'', находим m и n'.

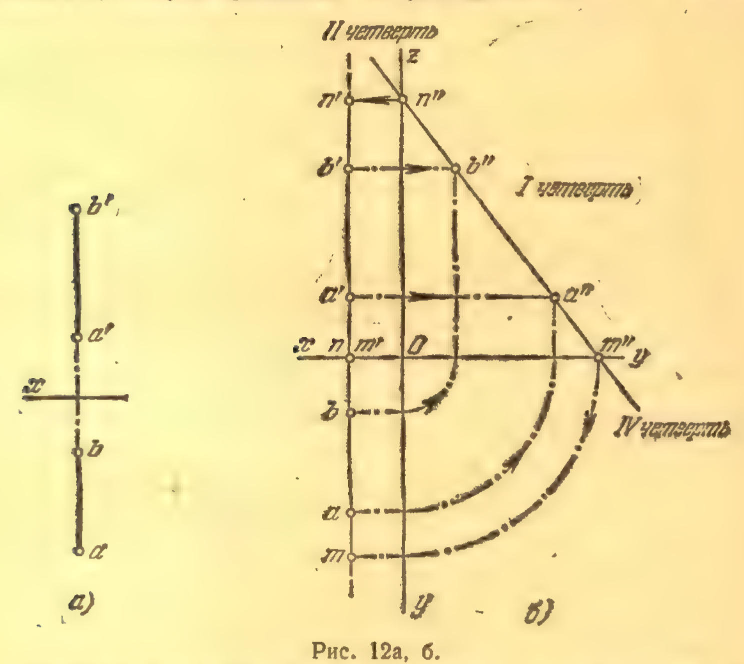


Рис. 12а, б.

Из расположения проекций m и m', n и n' следует, что точка M (горизонт. след прямой) лежит на передней поле пл. H, а точка N (фронт. след прямой) — на верхней поле пл. V. Прямая проходит через вторую, первую и четвертую четверти.

15. Построить следы прямой AB (рис. 13) и изобразить наглядно их положение.

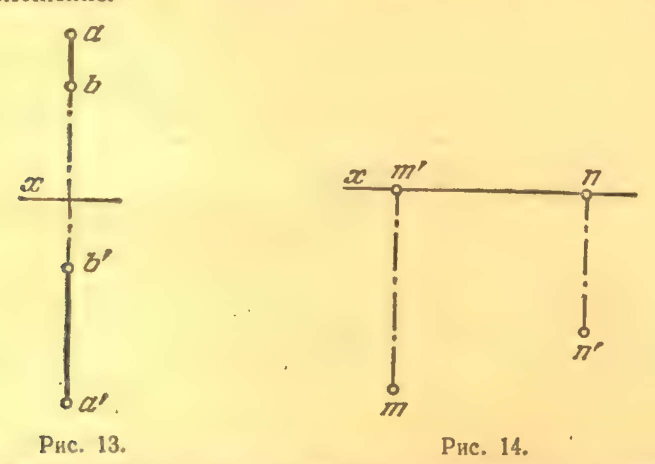


Рис. 13. Рис. 14.

16. Построить проекции прямой, зная положение проекций ее следов (рис. 14), и указать, через какие четверти пространства она проходит.

§ 5. Натуральная величина отрезка прямой и углы наклона прямой к плоскостям проекций

17*. Найти натуральную величину отрезка прямой AB, заданного его проекциями, и определить углы наклона прямой к плоскостям V и H (рис. 15).

Решение. Как известно, натуральная величина отрезка может быть определена как величина гипотенузы прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка на какой-либо плоскости проекций, а другим — разность расстояний концов отрезка до этой же плоскости. Если одним из катетов является горизонт. проекция, то угол между гипотенузой и этим катетом равен углу наклона (α) прямой к горизонт. плоскости проекций. Угол наклона (β) этой же прямой к фронт. пл. проекций определяется из треугольника, в котором в качестве первого катета взята фронт. проекция отрезка, а второй катет определен по разности расстояний концов отрезка до фронт. пл. проекций.

Для определения натуральной величины отрезка AB и углов α и β на рис. 15 построены прямоугольные треугольники $ba\bar{A}$ и $b'a'\bar{A}$. В треугольнике $ba\bar{A}$ катет $a\bar{A}$ равен разности расстояний точек A и B до горизонт. пл. проекций. В треугольнике $b'a'\bar{A}$ катет $a'\bar{A}$ равен разности расстояний точек A и B до фронт. пл. проекций.

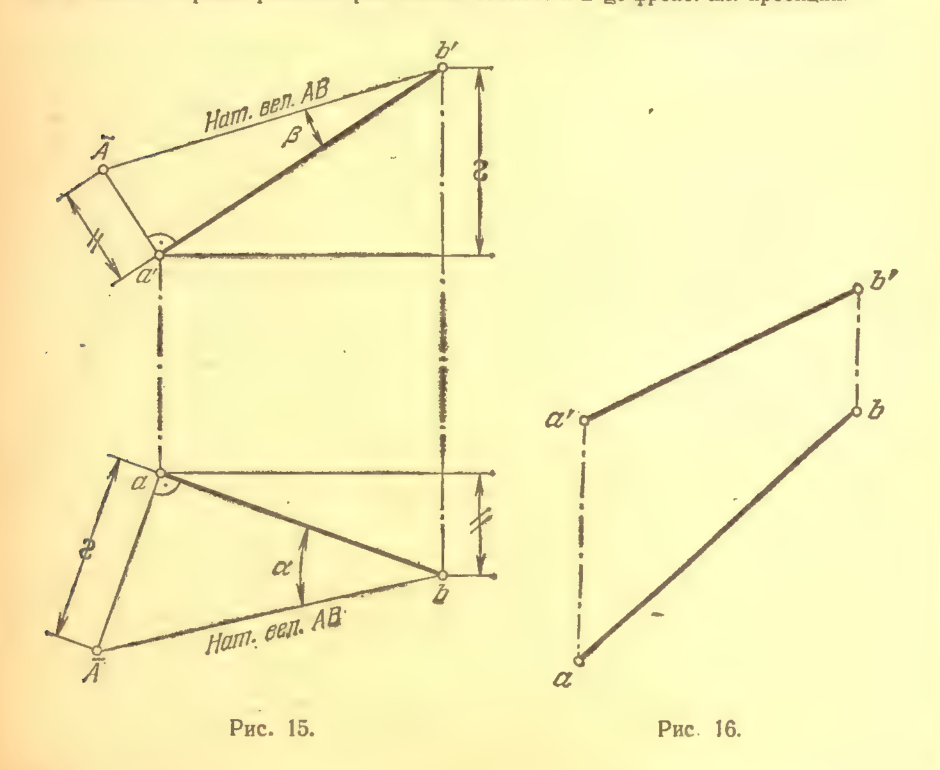


Рис. 15. Рис. 16.

18. Определить натуральную величину отрезка прямой AB (рис. 16) и углы наклона его к плоскостям проекций.

19. Определить натуральную величину отрезка заданной прямой между ее фронт. (N) и горизонт. (M) следами и углы наклона этой прямой к обеим плоскостям проекций (рис. 17).

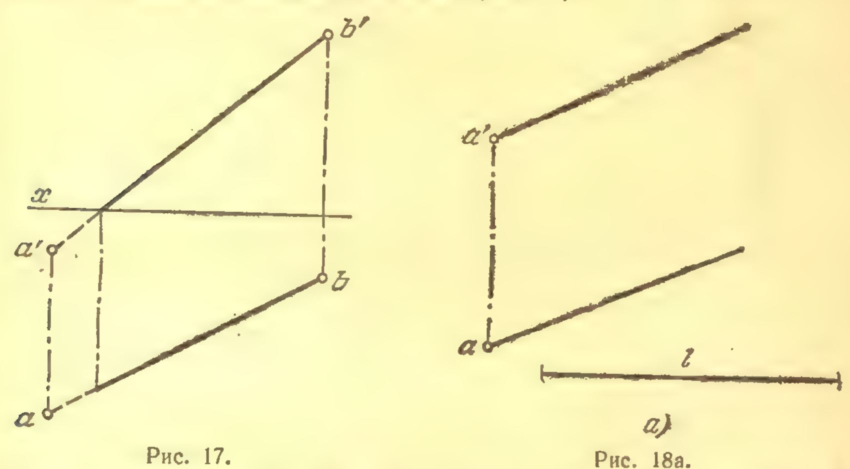


Рис. 17. Рис. 18а.

20*. Отложить на заданной прямой отрезок AB, равный l (рис. 18, a).

Решение. На заданной прямой (рис. 18, б) берем произвольный отрезок AK и определяем его натуральную величину. Строим прямоугольный треугольник с катетами ak и $k\overline{K}$, равным разности расстояний точек A и K от пл. H. На гипотенузе построенного треугольника откладываем отрезок $a\overline{B}$ заданной длины l. Из точки $\overline{B}$ проводим прямую параллельно $k\overline{K}$. Получаем точку b и горизонт. проекцию ab искомого отрезка AB, равного l. По точке b находим точку b'; $a'b'$ — фронт. проекция искомого отрезка AB.

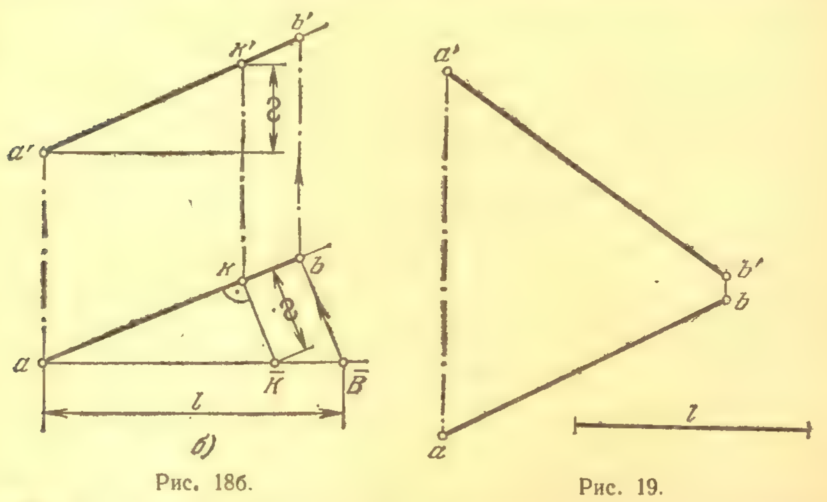
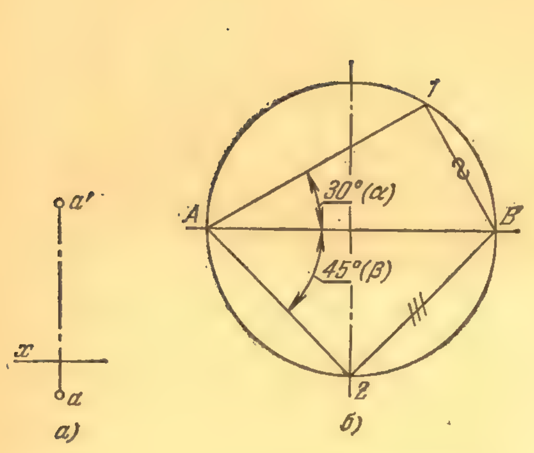


Рис. 18б. Рис. 19.

21. На прямой AB (рис. 19) отложить отрезок AC, равный l.



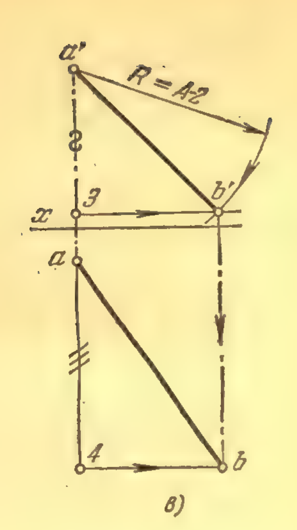


Рис. 20а—в.

г)

Рис. 20г.

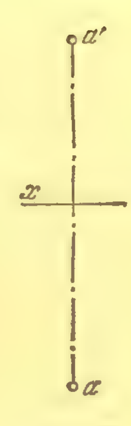


Рис. 21.

22*. Провести в первой четверти через точку A (рис. 20, *а*) прямую, составляющую с пл. H угол $\alpha=30°$ и с пл. V угол $\beta=45°$.

Решение. Следует проверить условие: каждый из углов (α и β) должен быть острым, а сумма этих углов должна быть или меньше 90° (для прямой общего положения), или равна 90° (для профильной прямой). В задании $\alpha+\beta=30°+45°=75°$, т. е. меньше 90°. Следовательно, построение может быть выполнено.

С углами α и β мы уже встречались в задаче 17*. Если задаться каким-либо отрезком AB прямой и принять его за гипотенузу некоторого прямоугольного треугольника, то, зная углы α и β, можно построить два таких треугольника (рис. 20, *б*). В одном из них (с углом α) катет $A—1$ выражает горизонт. проекцию отрезка AB, а катет $B—1$ — разность расстояний концов отрезка AB от пл. H; в другом треугольнике (с углом β) катет $A—2$ выражает фронт. проекцию отрезка AB, а катет $B—2$ — разность расстояний концов отрезка от пл. V.

Теперь можно построить чертеж (рис. 20, *в*).

Откладываем на линии связи $a'a$ от точки a' вниз отрезок $a'—3$, равный найденному на рис. 20, *б* катету $B—1$. Через точку *3* проводим прямую, перпендикулярную к линии связи $a'a$, а из точки a' проводим дугу окружности, радиус которой должен равняться катету $A—2$ (рис. 20, *б*). В пересечении прямой и дуги получим точку b'.

Для построения точки b откладываем на линии связи $a'a$ от точки a вниз отрезок $a—4$, равный катету $B—2$ (рис. 20, *б*), проводим через точку *4* прямую перпендикулярно к линии связи $a'a$ и находим на ней точку b.

При точном построении проекция ab (рис. 20, *в*) должна получиться равной катету $A—1$ (рис. 20, *б*).

Конечно, можно получить при тех же данных еще три положения отрезка AB; соответствующие чертежи показаны на рис. 20, *г*. Построение по существу не отличалось бы от приведенного на рис. 20, *в*.

23. Через точку A (рис. 21) провести (вправо вниз, от себя) прямую, составляющую с пл. H угол $\alpha=15°$ и с пл. V угол $\beta=30°$, до пересечения ее с пл. V.

§ 6. Деление отрезка в данном отношении

24*. Разделить отрезок AB точкой C в отношении $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$ (рис. 22, *а*).

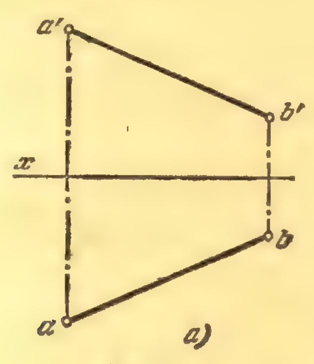


Рис. 22а.

Решение. Так как делению отрезка в каком-либо отношении соответствует такое же деление его проекций, то делим (рис. 22, *б*) проекцию ab (можно было бы начать и с фронт. проекции) на 5 частей. Для этого через точку a проводим произвольную прямую и откладываем на ней пять каких-либо равных между собой отрезков.

Точку 5 соединяем с точкой b. Через точку 3 проводим прямую, параллельную прямой $b—5$, до пересечения с ab в точке c. По точке c строим проекцию c'. В точке C отрезок AB разделен в отношении 3 : 2, считая от точки A.

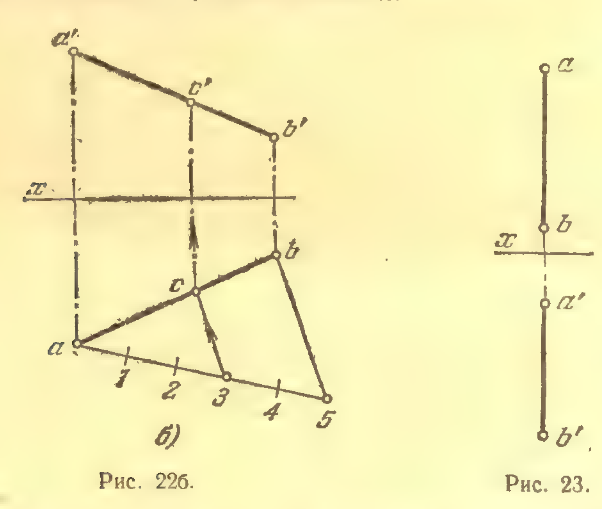


Рис. 22б. Рис. 23.

25. Дан отрезок AB (рис. 23). Найти точку C, делящую расстояние между фронтальным (N) и горизонтальным (M) следами прямой в отношении $CM : CN = 1 : 3$.

§ 7. Взаимное положение прямых

26*. Пересечь прямые AB и CD (рис. 24, *а*) прямой MN, отстоящей от пл. проекций H на расстояние l.

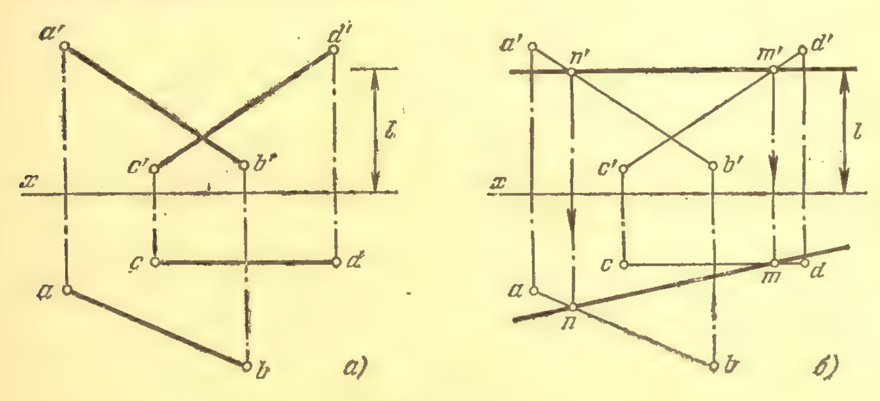


Рис. 24а, б.

Решение. Согласно условию искомая прямая должна быть параллельна пл. H. Следовательно, ее фронт. проекция параллельна оси проекции x и отстоит от нее на расстояние l. Проводим (рис. 24, *б*) фронт. проекцию искомой прямой и отмечаем точки

n' и m' пересечения ее с одноименными проекциями заданных прямых. Строим горизонт. проекции n и m соответственно на ab и cd и проводим горизонт. проекцию mn искомой прямой.

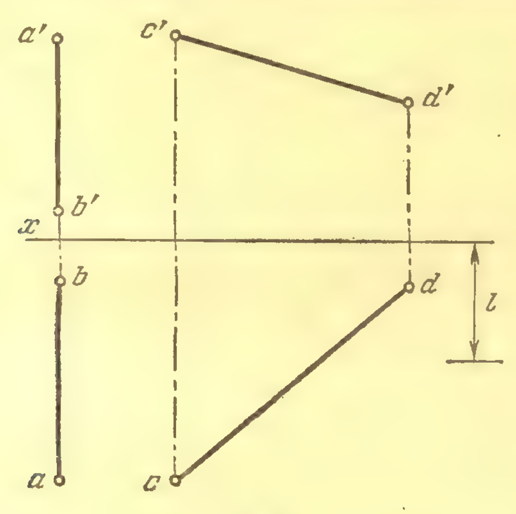


Рис. 25.

27. Прямые AB и CD (рис. 25) пересечь прямой, параллельной пл. проекций V и отстоящей от нее на расстояние l.

28*. Через точку E (рис. 26, *а*) провести прямую, пересекающую заданные прямые AB и CD.

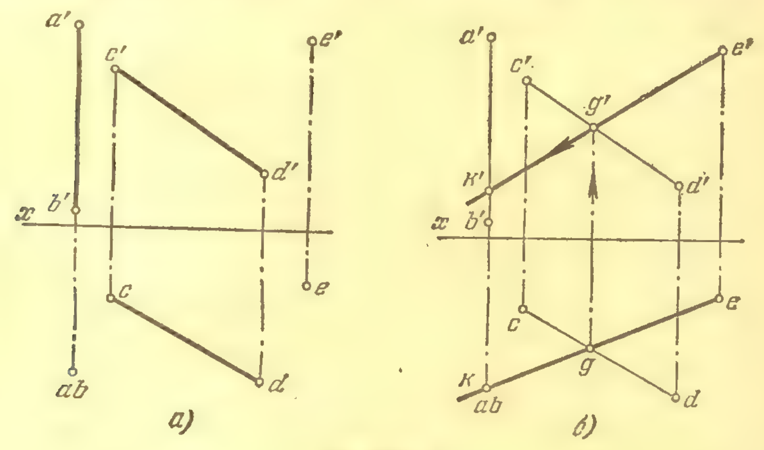


Рис. 26а, б.

Решение. Искомая прямая должна удовлетворять трем условиям: 1) проходить через точку E, 2) пересекать прямую AB, 3) пересекать прямую CD. Поэтому на чертеже (рис. 26, *б*): 1) проекции прямой должны пройти через соответствующие проекции точки E;

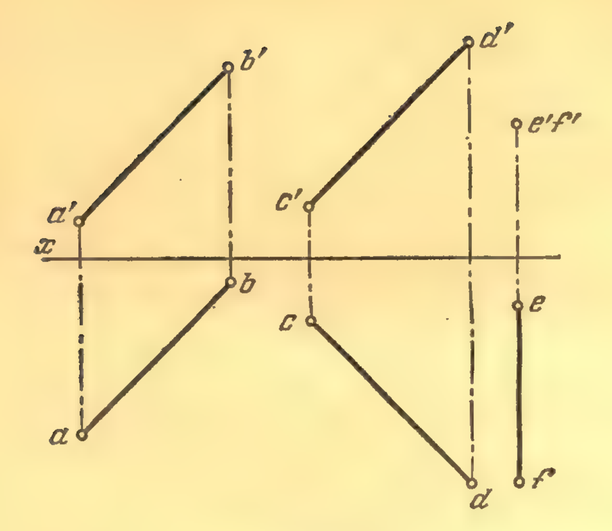


Рис. 27.

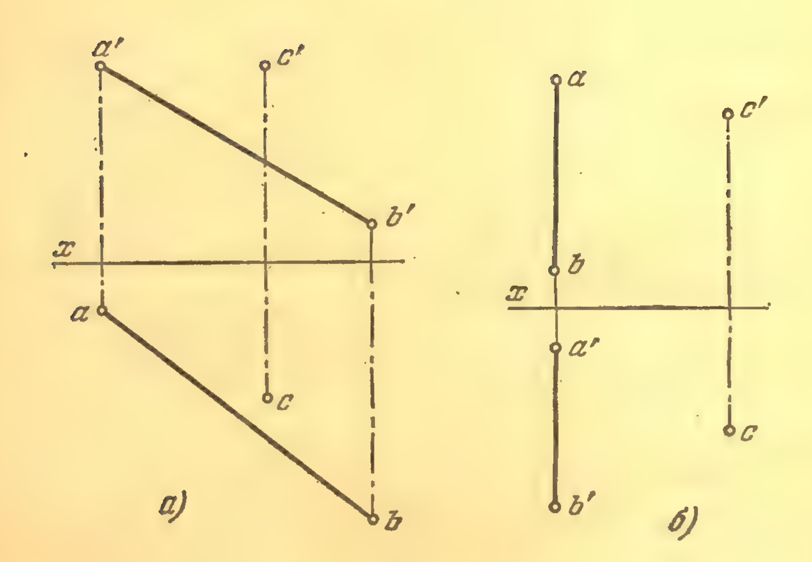


Рис. 28а, б.

2) горизонт. проекция искомой прямой должна пройти через точку, являющуюся горизонт. проекцией прямой AB;

3) точки пересечения проекций искомой прямой с одноименными проекциями прямой CD должны лежать на одном перпендикуляре к оси проекций.

Построение искомой прямой начинаем с проведения ее горизонт. проекции через точки e и a (b).

Отмечаем точку пересечения с cd — точку g, находим g' на $c'd'$ и через g' и e' проводим прямую — фронт. проекцию искомой прямой.

Точки k' и k являются проекциями точки пересечения искомой прямой с прямой AB.

29. Пересечь прямые AB, CD и EF (рис. 27) прямой, параллельной пл. проекций H.

30. Провести через точку C прямую, пересекающую прямую AB и ось проекций x (рис. 28, *а* и *б*).

Примечание. Следует помнить, что ось проекций x проецируется на профильную плоскость проекций в точку, совпадающую с началом координат — точкой O.

§ 8. Построение проекций прямого угла

31*. Провести из точки C перпендикуляр на прямую AB (рис. 29,*а*, где $AB \parallel$ пл. V).

Решение. Известно, прямой угол проецируется на плоскость в виде прямого угла в том случае, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая пересекает эту плоскость под острым углом.

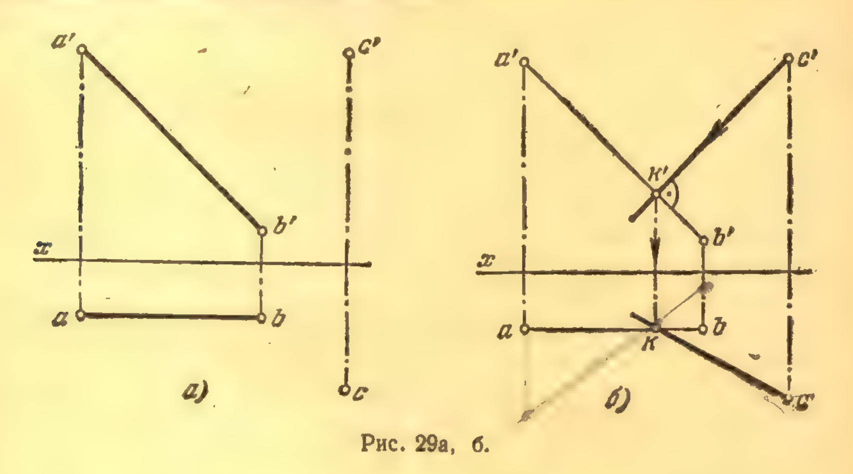


Рис. 29а, б.

В данном случае (рис. 29, *а*) прямая AB параллельна пл. V. Поэтому можно из точки c' (рис. 29, *б*) провести прямую перпендикулярно к $a'b'$ и найти проекции точки K, в которой CK пересекает AB. Получаем проекции $c'k'$ и ck искомого перпендикуляра.

32. Провести из точки C прямую перпендикулярно к прямой AB: 1) $AB \parallel$ пл. H (рис. 30, *a*), 2) $AB \parallel$ пл. W (рис. 30, *б*).

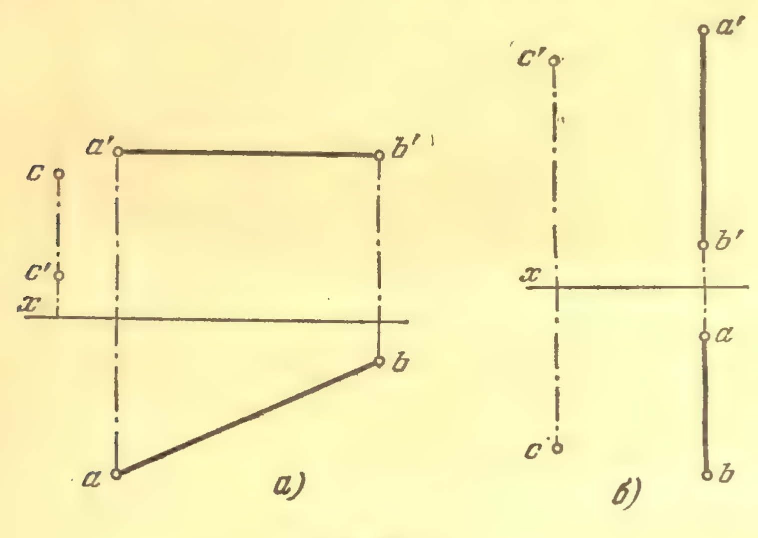


Рис. 30а, б.

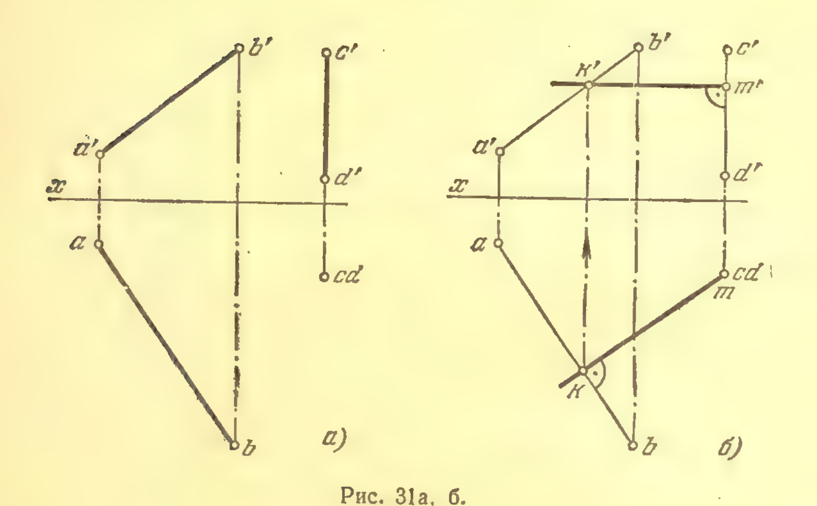


Рис. 31а, б.

33*. Пересечь прямые AB и CD (рис. 31, *a*) третьей прямой, перпендикулярной к ним, т. е. найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD, из которых одна прямая (CD) перпендикулярна к пл. проекций H.

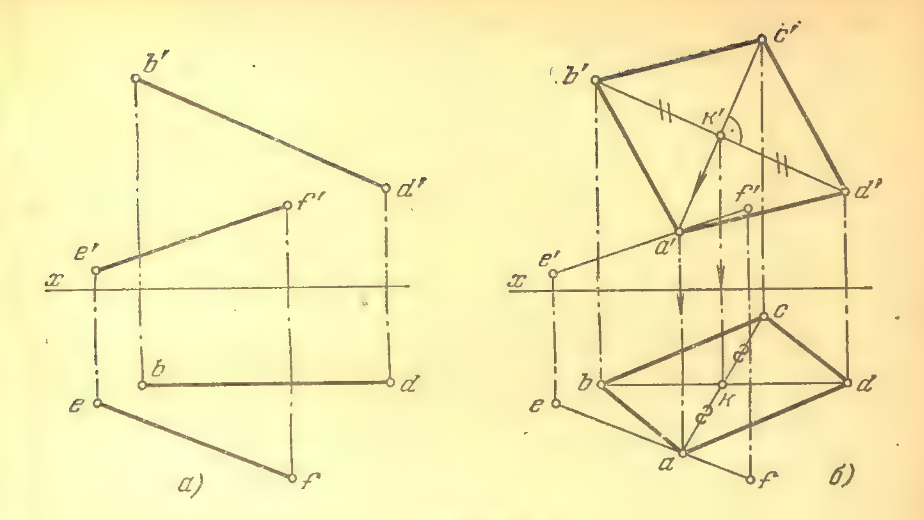


Рис. 32а, б.

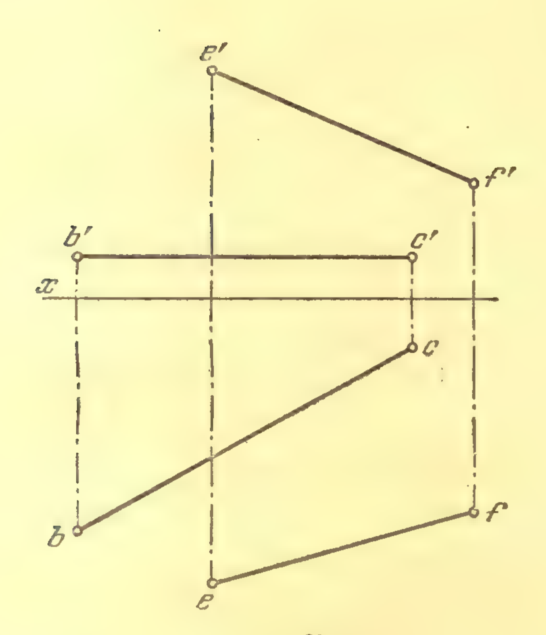


Рис. 33.

Решение. Так как прямая CD перпендикулярна к пл. H, то любой перпендикуляр к ней располагается параллельно пл. H. Поэтому прямой угол между искомой прямой и прямой AB изображается на пл. H в виде прямого угла. Горизонт. проекция точки пересечения искомой прямой с прямой CD — точка m — совпадает с $c\,(d)$ (рис. 31, *б*). Проводим через точку m горизонт. проекцию прямой перпендикулярно к ab до пересечения с ней в точке k и находим k'. Фронт. проекция искомой прямой ($k'm'$) располагается параллельно оси x.

34*. Построить ромб $ABCD$, зная, что отрезок BD является одной из его диагоналей ($BD \parallel$ пл. V), а вершина A должна быть на прямой EF (рис. 32, *а*).

Решение. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Поэтому делим (рис. 32, *б*) проекции диагонали BD пополам. Так как $BD \parallel$ пл. V, то из точки k' проводим перпендикуляр к прямой $b'd'$. Это соответствует правилам построения проекции прямого угла на плоскости, по отношению к которой диагональ BD параллельна. Точка пересечения этого перпендикуляра с проекцией $e'f'$ представляет собой фронт. проекцию a' искомой вершины ромба A. Для построения точки c' откладываем на продолжении прямой $a'k'$ отрезок $k'c'$, равный отрезку $c'k'$. По точке a' строим на ef точку a. Дальнейшее ясно из чертежа.

35. Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием, равным BC ($BC \parallel$ пл. H). Вершина A должна быть на прямой EF (рис. 33).

36. Построить прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AB лежит на прямой MN ($MN \parallel$ пл. V) и равен l. Для катета BC дана его проекция bc (рис. 34).

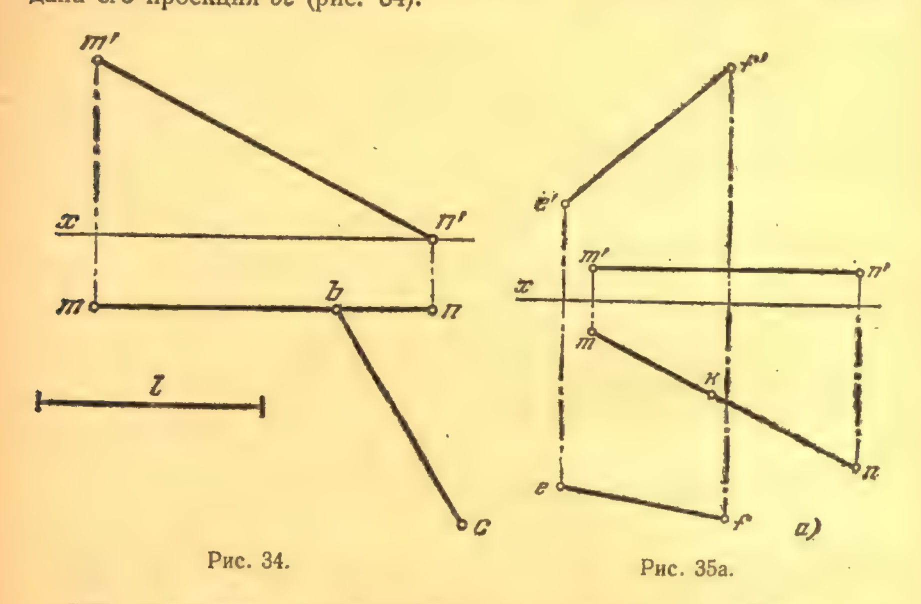


Рис. 34. Рис. 35а.

37*. Построить равнобедренный треугольник с основанием BC на прямой MN ($MN \parallel$ пл. H) и вершиной A на прямой EF (рис. 35, *а*). Основание BC должно равняться высоте треугольника AK, причем для точки K дана ее горизонт. проекция.

Решение. Для построения треугольника надо найти его высоту AK и отложить половину ее величины на прямой MN по обе стороны от точки K. На рис. 35, б по точке k строим точку k'. Из точки k проводим перпендикуляр к прямой mn (прямой угол между высотой AK и основанием BC, лежащим на MN, изображается на пл. проекций H в виде прямого же угла, так как прямая MN параллельна пл. H). Продолжаем этот перпендикуляр до пересечения с ef. По точке a строим a' на $e'f'$; получаем фронт. проекцию высоты AK.

Теперь можно найти натуральную величину высоты AK. Для этого строим прямоугольный треугольник $ak\overline{K}$, у которого катет $k\overline{K}$ равен разности расстояний точек A и K от пл. H. Гипотенуза $a\overline{K}$ выражает высоту AK. Откладывая на прямой mn отрезки kb и kc, равные половине высоты AK (т. е. половине отрезка $a\overline{K}$), получаем точки b и c, а по ним проекции b' и c'. Дальнейшее ясно из чертежа.

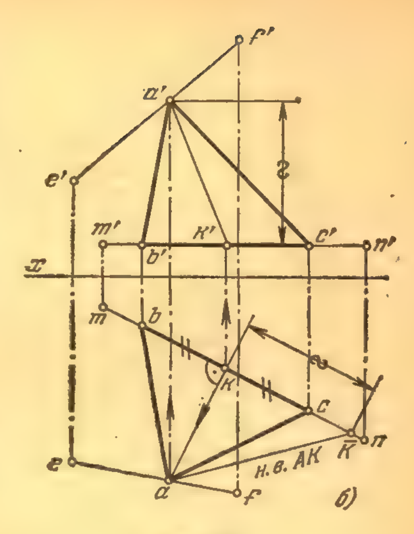


Рис. 35б.

38. Построить квадрат $ABCD$ со стороной BC на прямой MN, которая || пл. V (рис. 36).

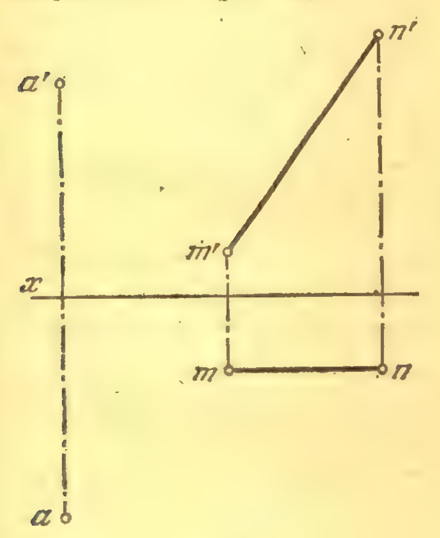


Рис. 36.

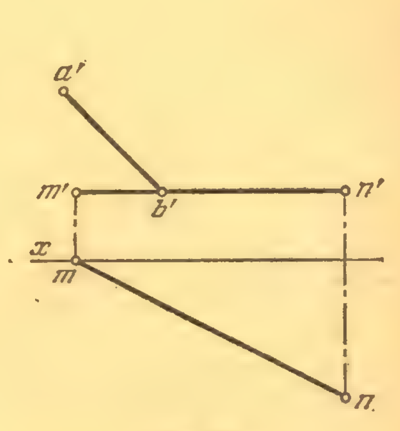


Рис. 37.

39. Построить прямоугольный треугольник ABC с катетом BC на прямой MN (MN || пл. H). Для катета AB дана проекция $a'b'$. Катет BC должен быть в 1,5 раза больше катета AB (рис. 37).

ГЛАВА II

ПЛОСКОСТЬ

§ 9. Прямая и точка в плоскости

40*. В плоскости, заданной точками A, B и C, провести горизонталь на расстоянии l от пл. проекций H (рис. 38, *а*).

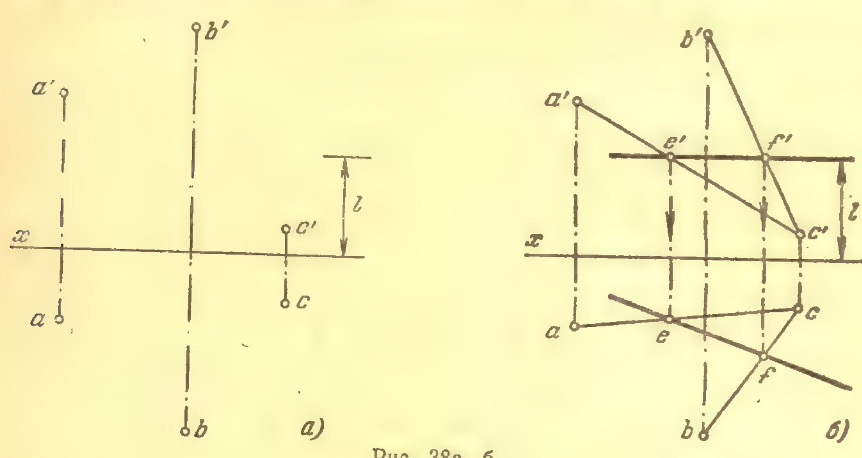


Рис. 38а, б.

Решение. Переходим от задания плоскости тремя точками к заданию ее двумя прямыми AC и BC (рис. 38, *б*). Проводим фронт. проекцию искомой горизонтали на расстоянии l от оси x. Отмечаем точки e' и f' на проекциях $a'c'$ и $b'c'$ и находим проекции e и f на ac и bc. Горизонт. проекция искомой прямой проходит через точки e и f.

41. Провести через точку C горизонталь плоскости, заданной прямой AB и точкой C (рис. 39).

42*. В плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и CD, провести через точку K фронталь (рис. 40, *а*).

Решение. Так как направление горизонт. проекции фронтали известно, то начинаем построение с проведения этой проекции через точку k: прямая km должна быть параллельна оси x (рис. 40, *б*). Чтобы построить фронт. проекцию искомой фронтали, надо построить фронт. проекцию какой-либо точки, принадлежащей фронтали. Выбираем на проекции фронтали произвольную точку e, проводим через нее горизонт. проекцию cf некоторой прямой, лежащей в заданной плоскости. Строим далее точку f' на прямой $a'b'$, проводим $c'f'$ и находим на ней точку e'. Фронт. проекция искомой фронтали проходит через точки k' и e'.

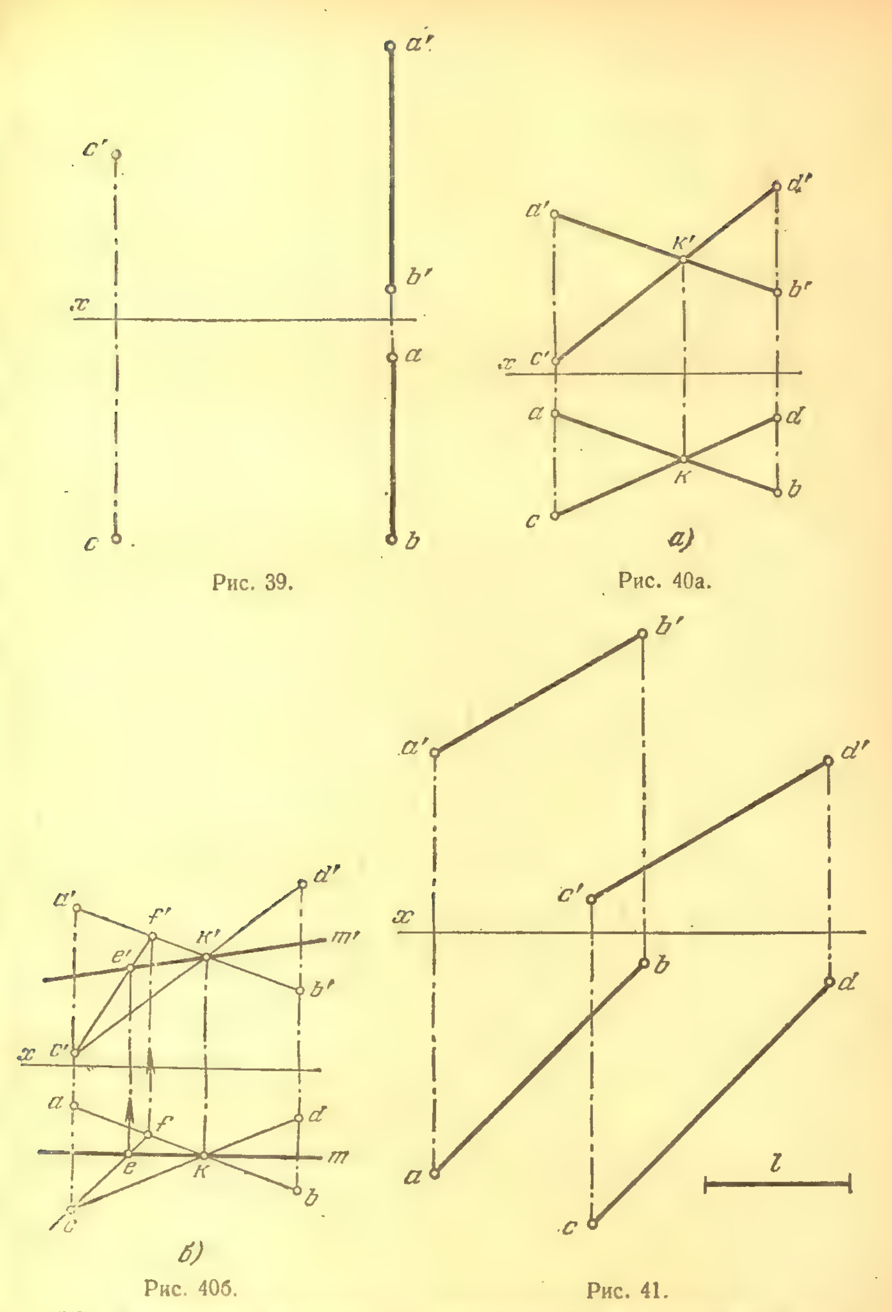


Рис. 39.

Рис. 40а.

Рис. 40б.

Рис. 41.

43. В плоскости, заданной параллельными прямыми *AB* и *CD*, провести фронталь на расстоянии *l* от пл. проекций *V* (рис. 41).

44*. В плоскости, заданной прямой AB и точкой C, провести через точку A линию ската плоскости (рис. 42, *а*).

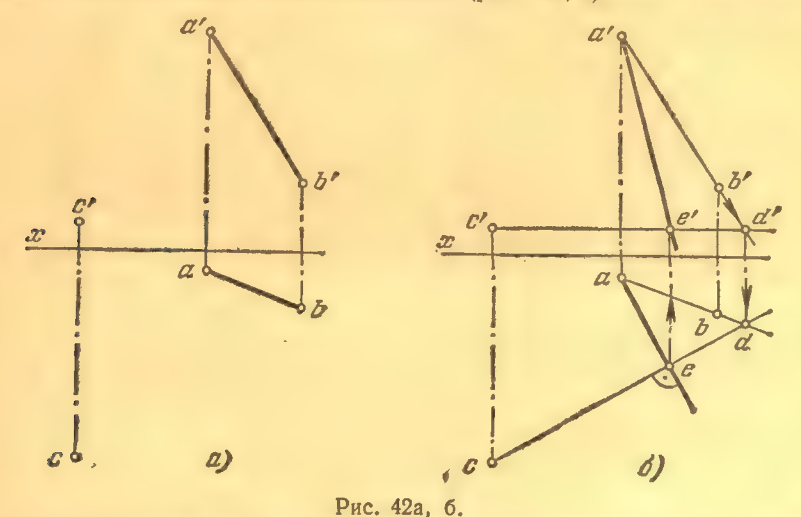


Рис. 42а, б.

Решение. Как известно, линия ската перпендикулярна к любой горизонтали плоскости. Горизонт. проекции, линии ската и горизонтали взаимно перпендикулярны. На рис. 42, *б* проведена горизонталь через точку C, сначала получена точка d', а по ней точка d на продолженной проекции ab. Таким образом, получена проекция cd горизонтали CD. Через точку a проводим горизонт. проекцию линии ската до пересечения с прямой cd в точке e, находим e' на $c'd'$ и проекцию $a'e'$ искомой линии ската.

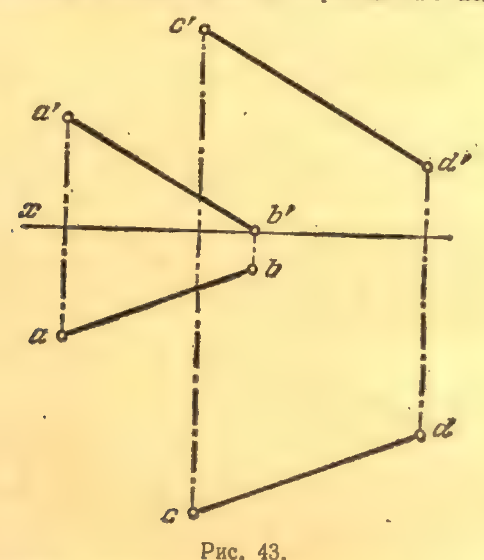


Рис. 43.

45. В плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD, провести через точку B линию ската (рис. 43).

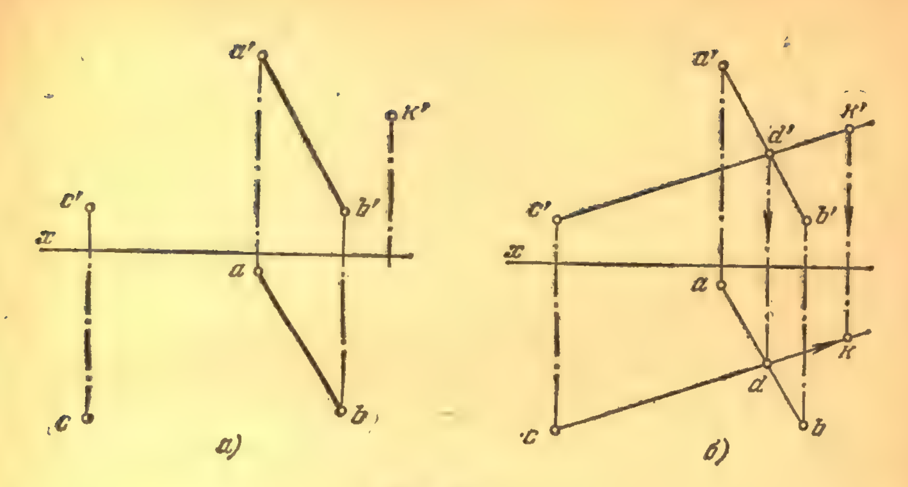


Рис. 44а, б.

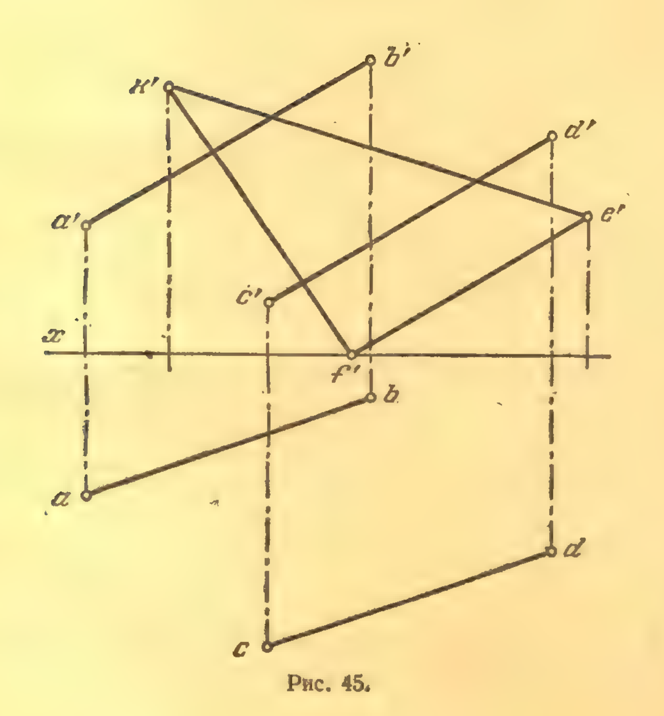


Рис. 45.

46*. Найти недостающую проекцию точки K, лежащей в плоскости, заданной прямой AB и точкой C (рис. 44, *а*).

Решение. Известно, что если точка принадлежит плоскости, то она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости. Поэтому через точки c' и k' (рис. 44, *б*) проводим фронт. проекцию вспомогательной прямой, лежащей в данной плоскости. Получив точку d', находим точку d на проекции ab. Теперь проводим прямую из точки c через точку d и на этой прямой находим горизонт. проекцию точки K.

47. Построить недостающую проекцию треугольника KEF, лежащего в плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD (рис. 45).

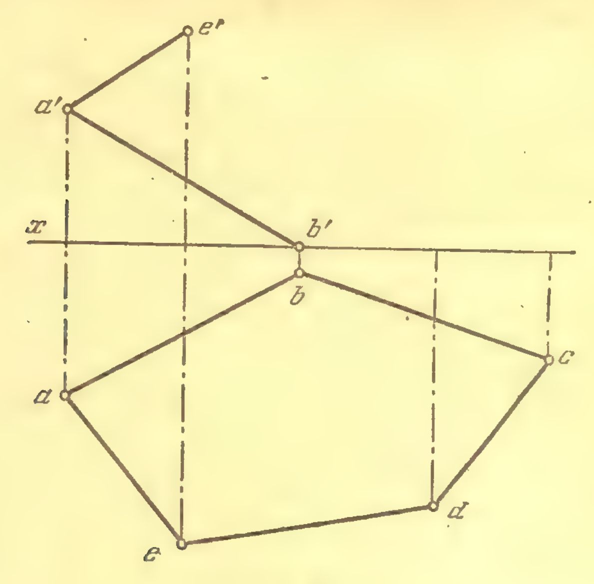


Рис. 46.

48. Построить фронт. проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$ по заданной его горизонт. проекции и фронтальным проекциям двух смежных сторон (рис. 46).

49. Дана пирамида $SABC$ (рис. 47).

1) Найти горизонт. проекцию точки K, лежащей на грани SAC.

2) Найти фронт. проекцию точки E, лежащей на грани SBC.

50*. Определить расположение плоскости, заданной треугольником ABC, относительно плоскостей проекций V, H и W (рис. 48, *а*).

Решение. Заданная плоскость, как видим, не перпендикулярна ни к пл. V, ни к пл. H, так как ни на одной из этих плоскостей она не изображается в виде прямой линии. Следовательно, плоскость треугольника ABC является или плоскостью общего положения, или профильно-проецирующей. Но если плоскость профильно-проецирующая (т. е. расположена перпендикулярно к пл. W), то она должна проходить через перпендикуляр к W (рис. 48, *б*). Посмотрим, можно ли провести в ABC перпендикуляр к W. Оказывается, можно (рис. 48, *в*): им служит хотя бы горизонталь KB (являющаяся в то же время фронталью). Построение начинаем с проведения фронт. проекции

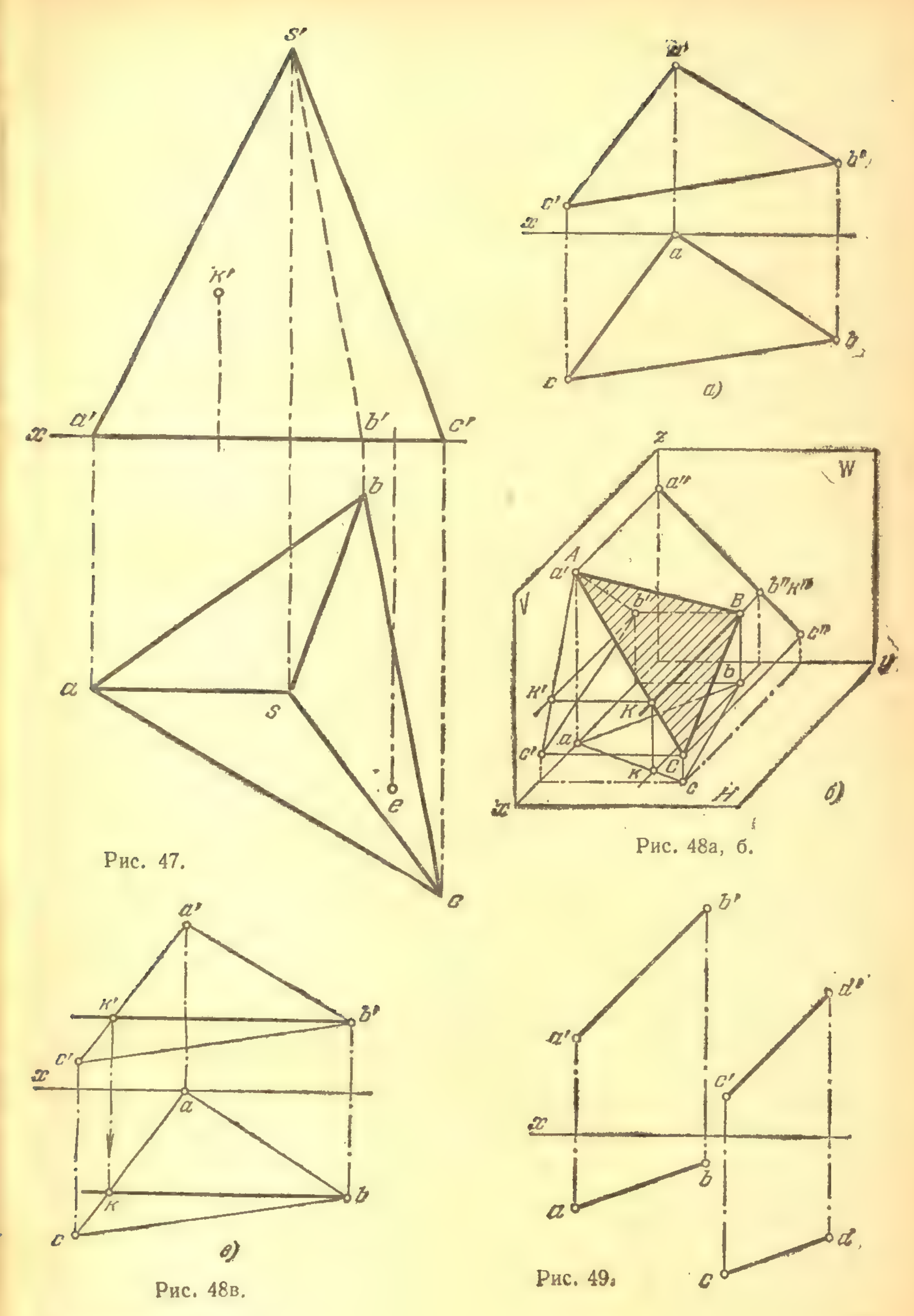


Рис. 47.

Рис. 48а, б.

Рис. 48в.

Рис. 49.

$b'k'$ горизонтали, затем находим горизонт. проекцию bk. Так как $bk \parallel b'k'$ (конечно, в пределах графической точности чертежа), то прямая BK, а следовательно, и плоскость ABC перпендикулярны к пл. W.

Мы здесь обошлись без построения профильной проекции треугольника ABC. Конечно, можно было начать с ее построения: если она оказалась бы отрезком прямой, то этим устанавливалось бы, что плоскость ABC профильно-проецирующая.

51. Определить расположение плоскости, заданной двумя параллельными прямыми, относительно плоскостей проекций V, H и W (рис. 49).

§ 10. Следы плоскости

52*. Построить следы плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD (рис. 50, *а*).

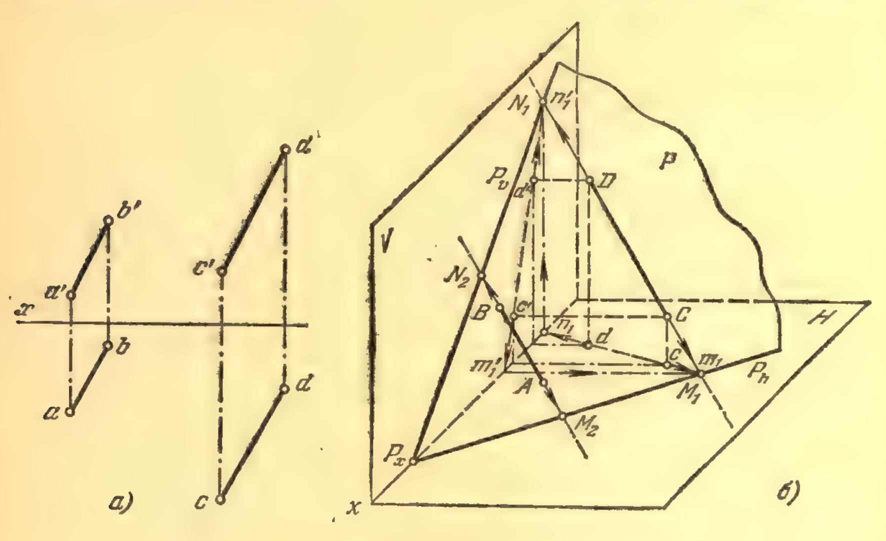


Рис. 50а, б.

Решение. Если прямая лежит в плоскости, то следы прямой лежат на одноименных с ними следах плоскости (рис. 50, *б*). Чтобы построить следы заданной плоскости, надо построить следы прямых AB и CD. Фронт. след P_v пройдет через фронт. следы прямых, т. е. через точки N_1 и N_2, а горизонтальный — через следы M_1 и M_2. Строим следы прямых AB и CD, как это рассмотрено в § 4 (например, задача 12*). Через точки m_1 и m_2 проходит горизонт. след P_h, а через точки n_1' и n_2' — след P_v (рис. 50, *в*). Если построение выполнено точно, то оба следа пересекаются в точке P_x на оси x.

53. Построить следы плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и AC (рис. 51).

54*. Построить следы плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AB ($AB \parallel$ пл. H) и CD (рис. 52, *а*).

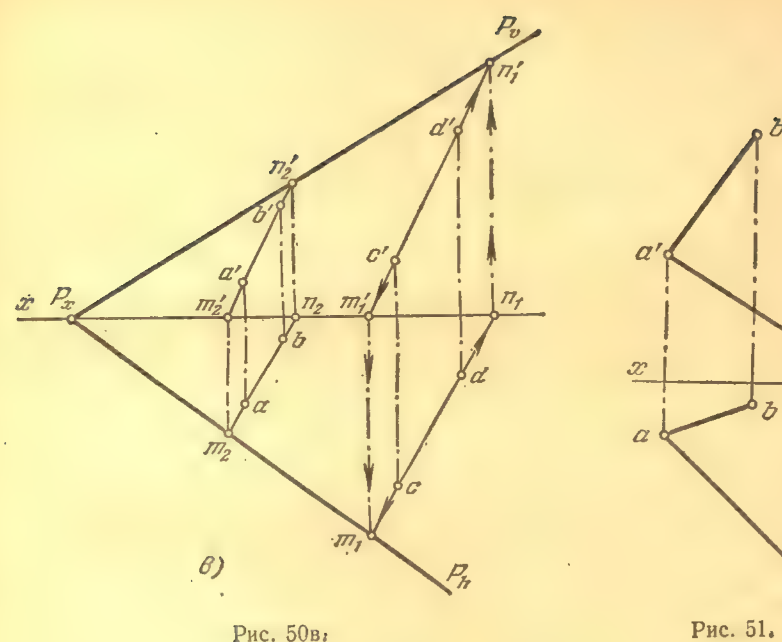


Рис. 50в.

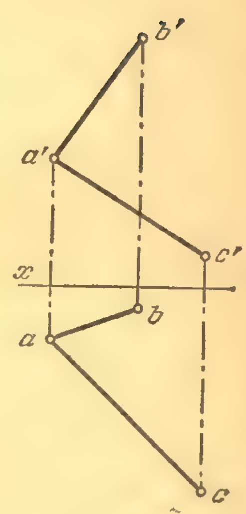


Рис. 51.

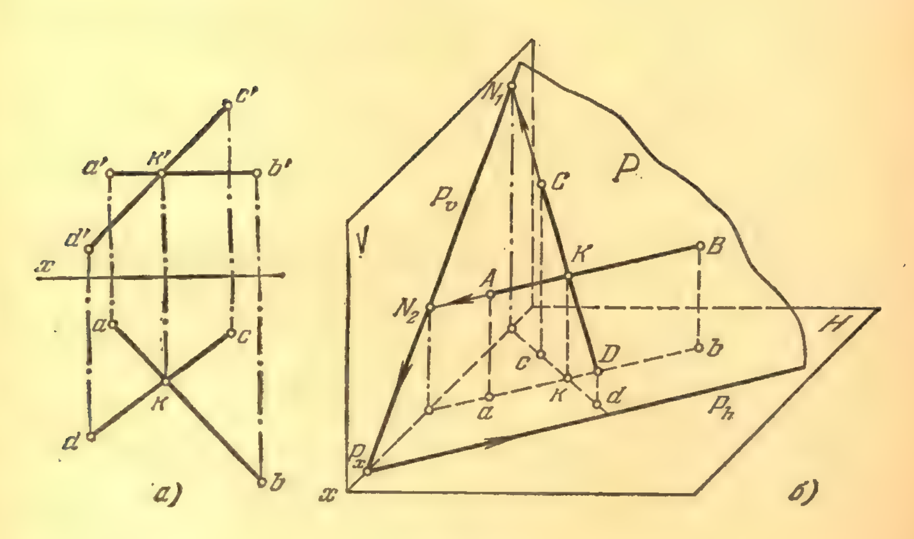


Рис. 52а, б.

Решение. Так как следы плоскости должны проходить через одноименные с ними следы прямых, лежащих в этой плоскости (рис. 52, *б*), то надо построить фронт. следы обеих прямых — точки N_2 и N_1, и провести через них фронт. след плоскости (P_v). Направление горизонт. следа плоскости известно: след P_h должен быть параллелен горизонтали AB (рис. 52, *б*). Поэтому след P_h пройдет через точку пересечения следов (P_x) параллельно горизонтали AB. На рис. 52, *в* показано, что проекции ab и cd продолжены до пересечения их с осью x в точках n_2 и n_1 и по ним построены точки n_2' и n_1' на проекциях $a'b'$ и $c'd'$. Через n_2' и n'_1 проведен след P_v до пересечения с осью x в точке P_x. Через точку P_x проведен след P_h параллельно прямой ab.

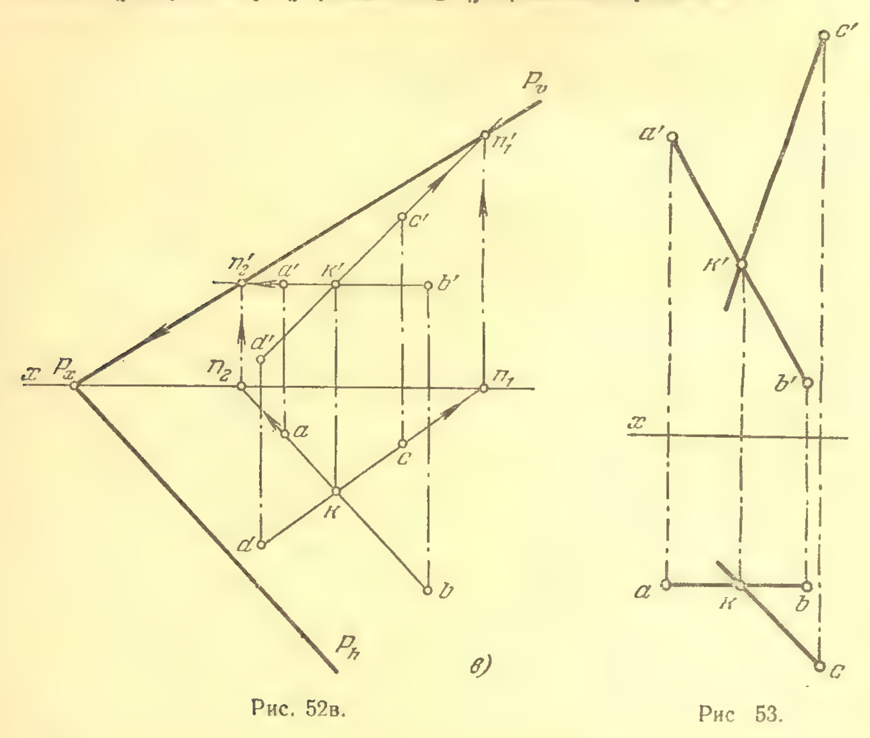


Рис. 52в.

Рис 53.

55. Построить следы плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и KC (рис. 53).

56*. Построить недостающую проекцию отрезка AB прямой, лежащей в плоскости P (рис. 54, *а*).

Решение. Чтобы построить горизонт. проекцию отрезка AB, надо найти горизонт. проекции точек A и B (рис. 54, *б*). Проекцию b находим с помощью горизонтали, проведенной в плоскости. Сначала проводим проекцию $b'n'$ параллельно оси x, за ем через точку n — горизонт. проекцию горизонтали параллельно P_h и на ней находим проекцию b. Горизонт. проекцию точки A находим при помощи фронтали, хотя, конечно, можно было бы и для этой точки применить горизонталь. Через a' проводим фронт. проекцию фронтали (параллельно P_v), находим точки m' и m (проекции горизонт. следа фронтали). Горизонт. проекция фронтали проходит через точку m параллельно оси x; на этой проекции получаем точку a. Искомая проекция отрезка AB определяется точками a и b.

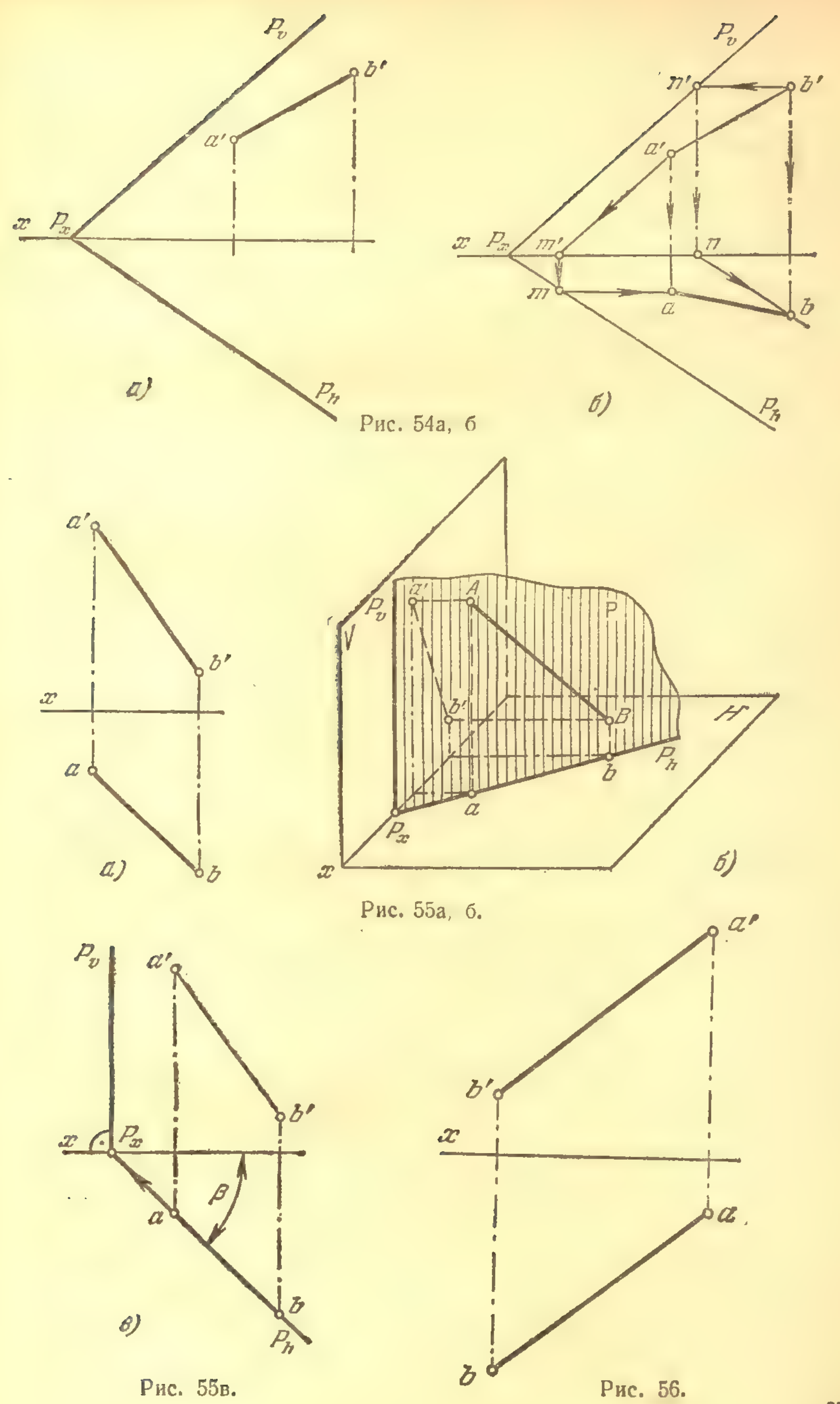


Рис. 54а, б

Рис. 55а, б.

Рис. 55в.

Рис. 56.

57*. Заключить прямую AB (рис. 55, *а*) в горизонтально-проецирующую плоскость, задав эту плоскость ее следами на пл. H и V.

Решение. Горизонтальные проекции всех элементов, лежащих в горизонтально-проецирующей плоскости, находятся на P_h. Поэтому (рис. 55, *б*) след P_h совпадает с ab. Через точку P_x, получаемую при пересечении P_h с осью x, проводим перпендикулярно к оси x фронт. след искомой плоскости (P_v).

Угол между следом P_h и осью x равен углу β между пл. P и пл. проекций V (рис. 55, *в*).

58. Заключить прямую AB (рис. 56) во фронтально-проецирующую плоскость, выразив эту плоскость следами на пл. V и H. Построить чертеж и наглядное изображение. Указать угол наклона пл. P к пл. H.

59. Заключить прямую AB (рис. 57) в профильно-проецирующую плоскость, выразив эту плоскость следами. Построить чертеж и дать наглядное изображение. Указать углы наклона пл. P к пл. V и H. Построение следов пл. P выполнить с помощью профильной проекции прямой и без нее.

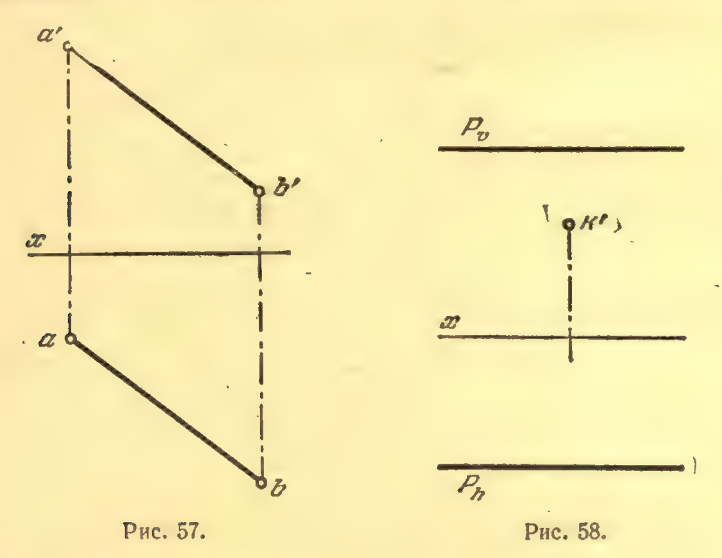


Рис. 57. Рис. 58.

60. Построить недостающую проекцию точки K (рис. 58), лежащей в пл. P (профильной плоскостью проекций не пользоваться).

ГЛАВА III

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПЛОСКОСТЬЮ И ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ МЕЖДУ СОБОЙ

§ 11. Пересечение прямой с проецирующей плоскостью

61*. Найти точку пересечения прямой AB с пл. T (рис. 59, *а*), заданной ее фронт. следом T_v.

Решение. В данном случае пл. T параллельна пл. H и, следовательно, перпендикулярна к фронт. плоскости проекций; для пл. T в системе V, H дан только фронт.

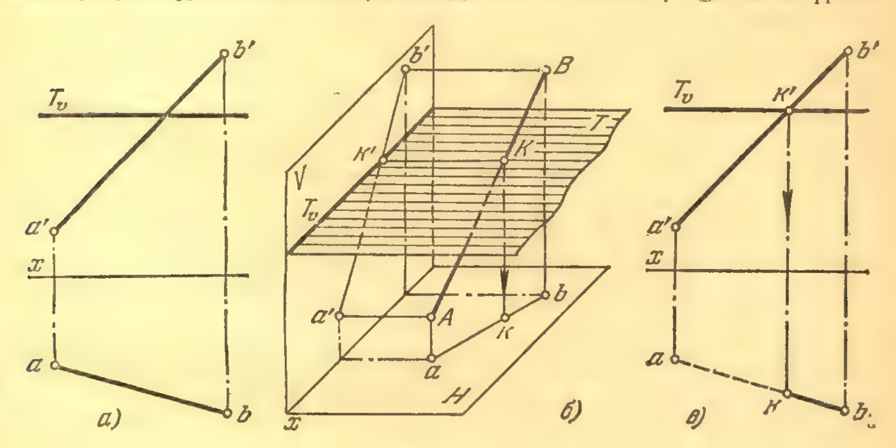


Рис. 59а—в.

след T_v, параллельный оси проекций x. Очевидно, фронт. проекция (k') искомой точки пересечения должна лежать как на следе T_v, так и на фронт. проекции прямой AB, т. е. на $a'b'$ (рис. 59, *б*). Поэтому точку k' (рис. 59, *в*) находим в точке пересечения следа T_v с проекцией $a'b'$. По точке k' находим точку k на ab.

Так как прямая AB в направлении от K к A находится под пл. T, то на чертеже соответствующая часть горизонт. проекции изображена штриховой линией.

62. Найти точку пересечения прямой AB с пл. S (рис. 60).

63*. Найти точку пересечения прямой AB с пл. R (рис. 61, *а*).

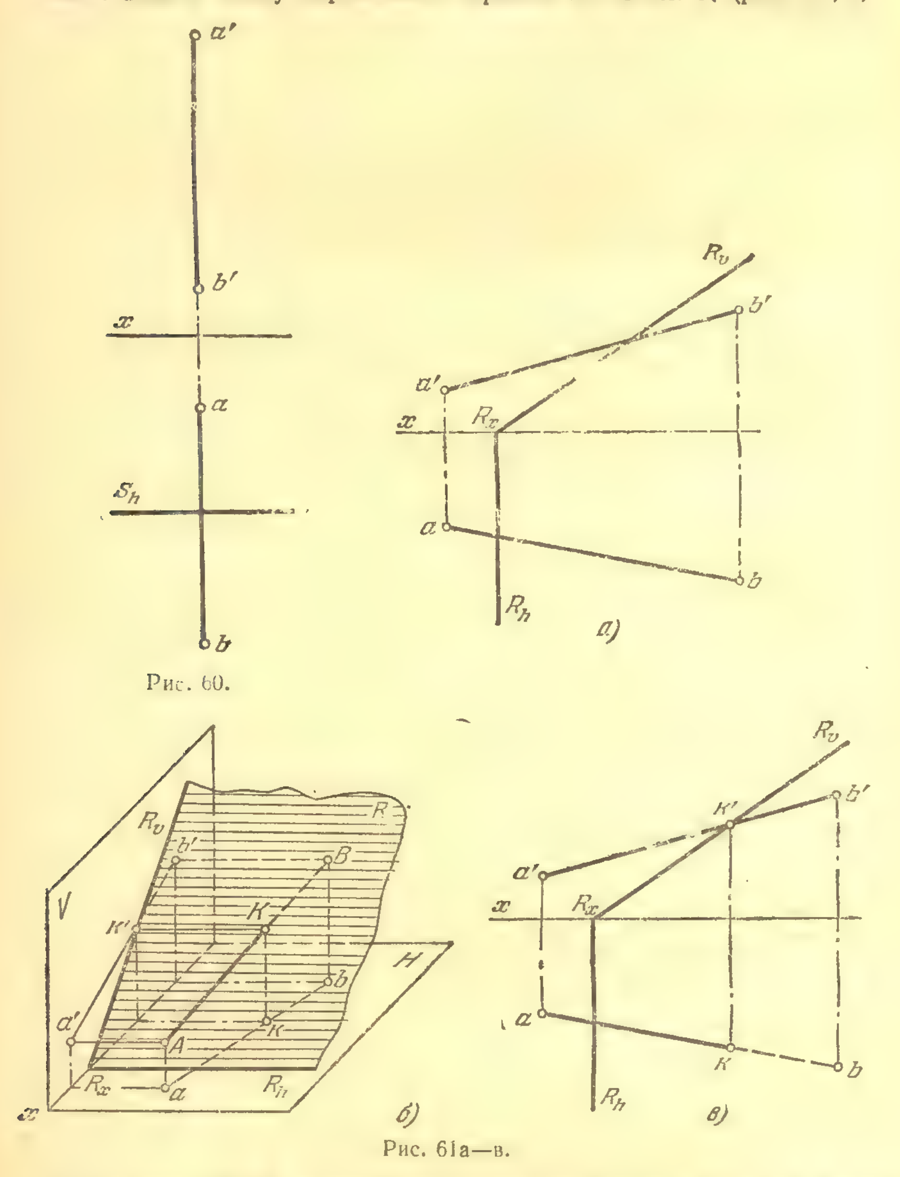


Рис. 60.

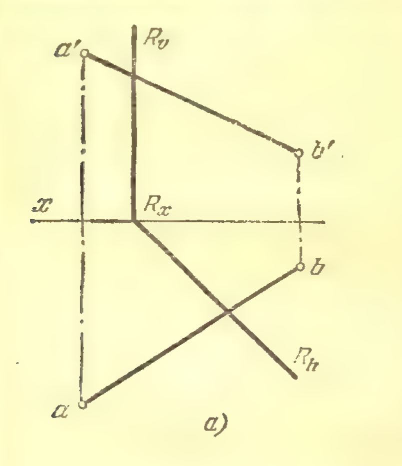
Рис. 61а—в.

Решение. Пл. R является фронтально-проецирующей. Очевидно, фронт. проекция (k') искомой точки пересечения должна находиться как на следе R_v, так и на фронт. проекции прямой AB, т. е. на $a'b'$ (рис. 61, *б*).

На чертеже (рис. 61, *в*) находим k' в точке пересечения следа R_v с $a'b'$, а проекцию k — на ab. Прямая AB в направлении от K к B находится под пл. R; поэтому на чертеже соответствующая часть горизонт. проекции изображена штриховой линией.

64*. Найти точку пересечения прямой AB с пл. R (рис. 62, *а*).

Решение. Пл. R является горизонтально-проецирующей. Очевидно, горизонт. проекция искомой точки пересечения должна находиться как на следе R_h, так и на



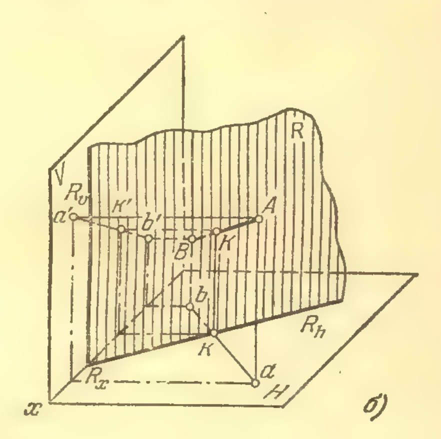


Рис. 62а, б.

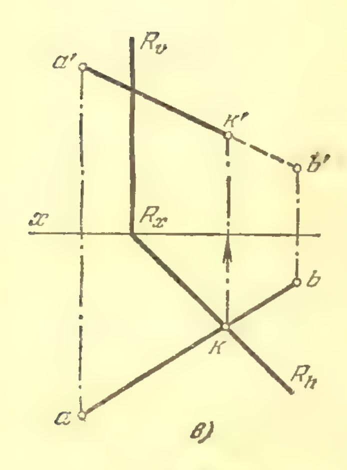


Рис. 62в.

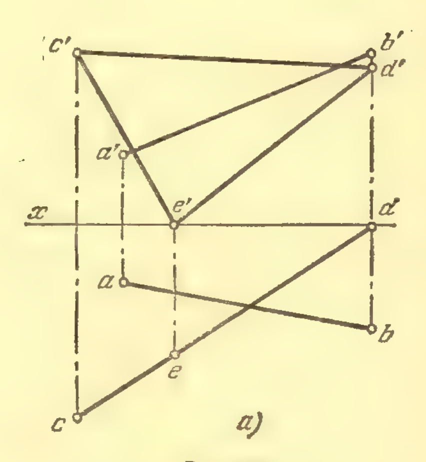


Рис. 63а.

ab (рис. 62, *б*). Поэтому точку k (рис. 62, *в*) получаем как точку пересечения следа R_h с ab. По точке k находим проекцию k' на $a'b'$.

Прямая AB в направлении от K к B находится за плоскостью R; на чертеже соответствующая часть фронт. проекции изображена штриховой линией.

65*. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью, заданной треугольником CDE (рис. 63, *а*).

Решение. Замечаем, что плоскость треугольника перпендикулярна к пл. H. Проекция k точки пересечения должна лежать как на прямой cd, так и на ab (рис. 63, *б* и *в*). По точке k находим k' на $a'b'$.

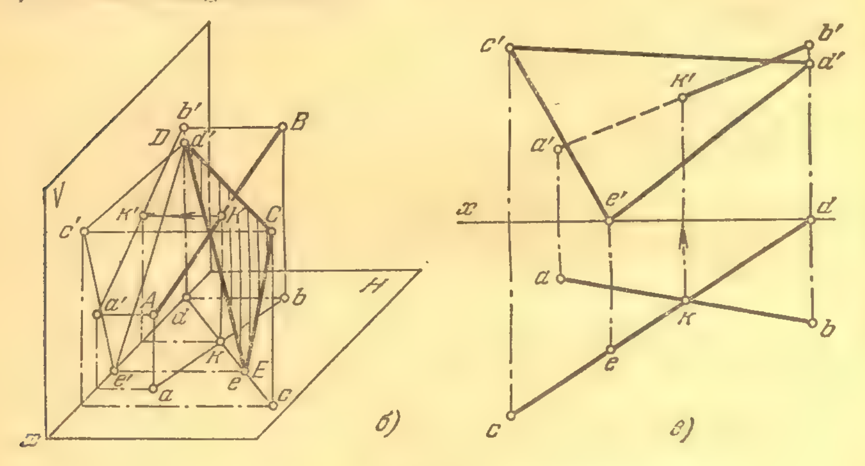


Рис. 63б, в.

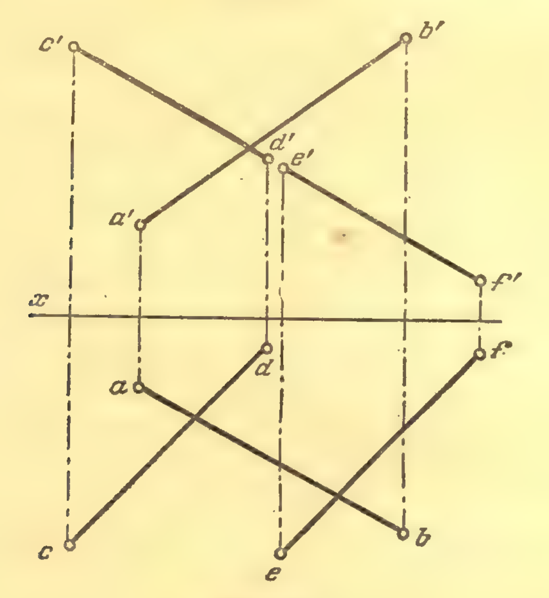


Рис. 64.

Так как прямая AB в направлении от K к A находится за треугольником CDE (рис. 63, *в*), то на чертеже соответствующая часть фронт. проекции прямой изображена штриховой линией.

66. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью, заданной параллельными прямыми CD и EF (рис. 64).

§ 12. Пересечение плоскостей между собой

67*. Найти линию пересечения пл. T, заданной следом T_v, с плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и BC (рис. 65, *а*).

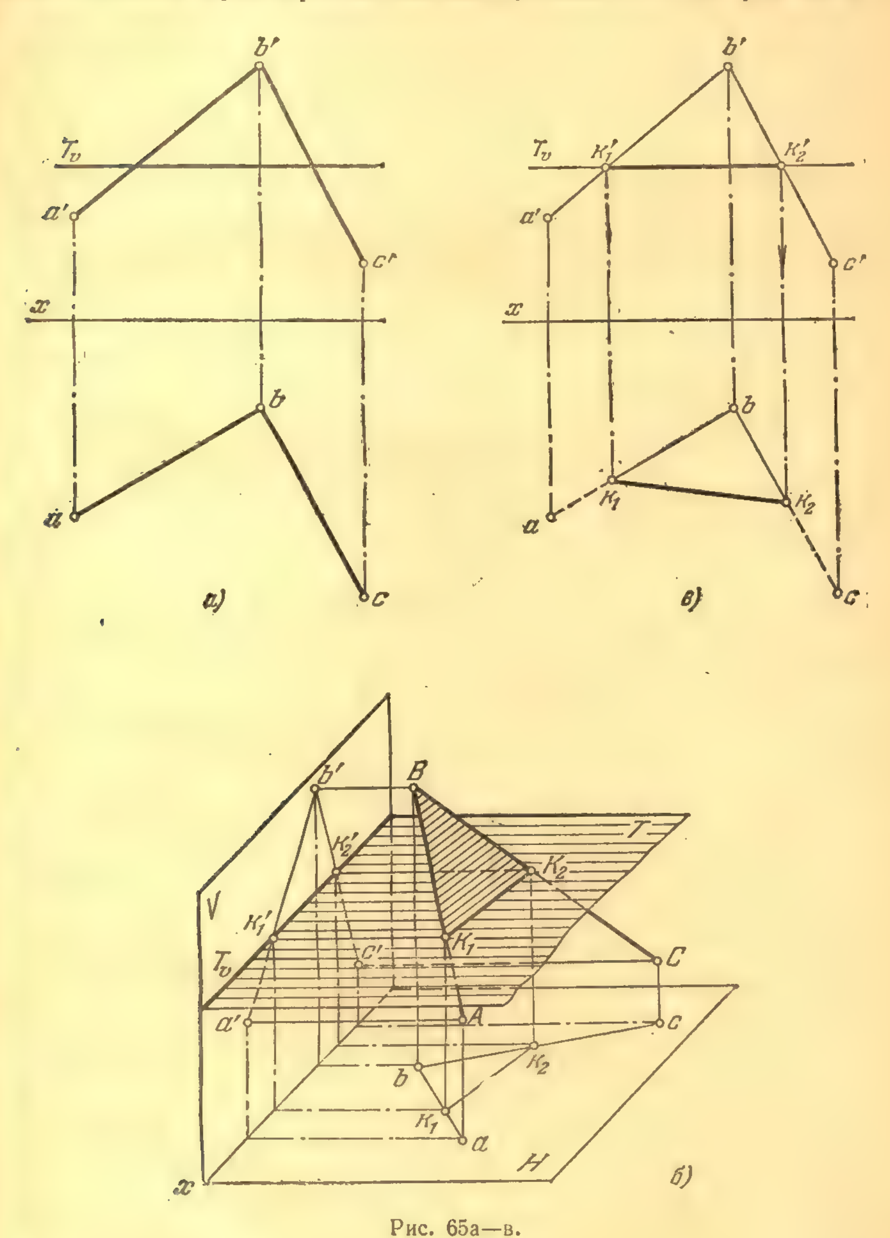


Рис. 65а—в.

Решение Как известно, построение линии пересечения двух плоскостей сводится к нахождению двух точек, общих для обеих заданных плоскостей, или одной такой точки при известном направлении искомой линии.

В данном случае искомая прямая может быть определена, если найти точки пересечения прямых AB и BC с пл. T (рис. 65, *б*). Следовательно, построение точек K_1 и K_2 сводится к показанному на рис. 59, *б* и *в*.

Если считать плоскости непрозрачными, то горизонтальные проекции участков прямых AB и BC, находящихся под пл. T, следует изображать штриховыми линиями. Пл. T не влияет на видимость прямых AB и CD на пл. V, так как перпендикулярна к ней (рис. 65, *в*).

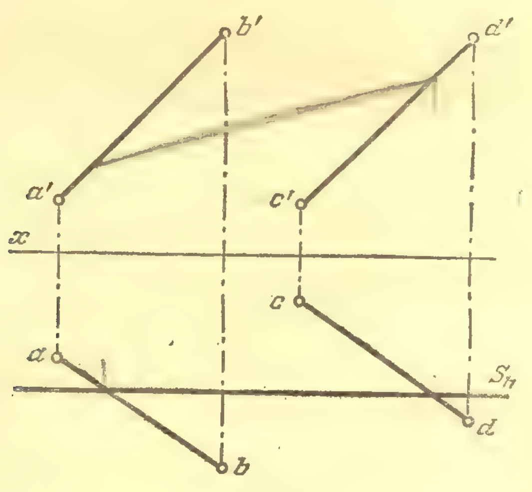


Рис. 66.

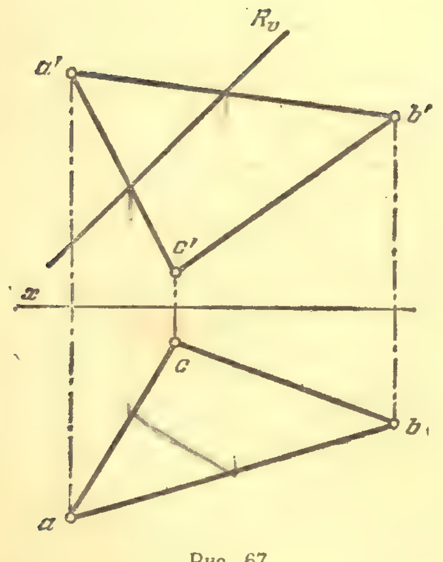


Рис. 67.

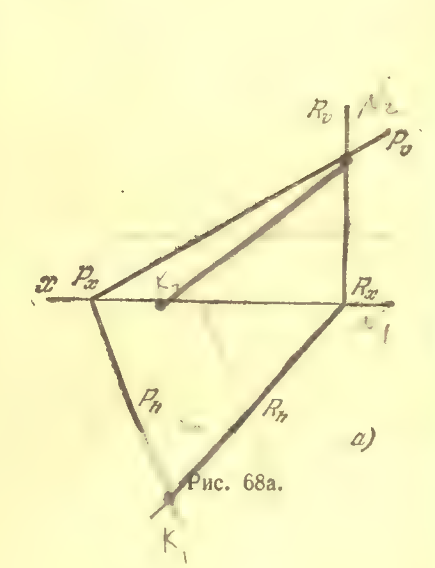


Рис. 68а.

68. Найти линию пересечения пл. S, заданной следом S_h, с плоскостью, заданной параллельными прямыми AB и CD (рис. 66).

69. Найти линию пересечения фронтально-проецирующей пл. R, заданной следом R_v, с плоскостью, заданной треугольником ABC (рис. 67).

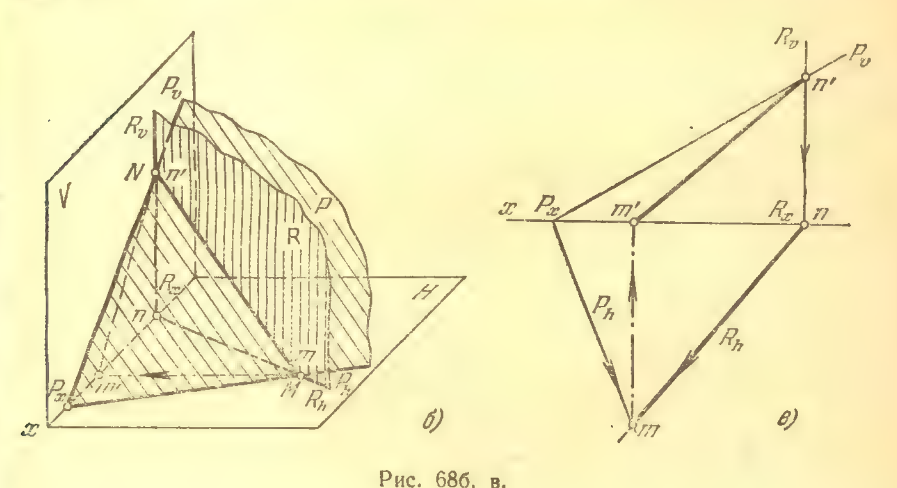


Рис. 68б, в.

70*. Найти линию пересечения плоскостей P и R (рис. 68, *а*).

Решение. Для построения линии пересечения плоскостей можно использовать точку N пересечения следов P_v и R_v и точку M пересечения следов P_h и R_h (рис. 68, *б*). Прямая MN, проходящая через эти точки, является искомой линией пересечения. Ее проекция mn совпадает со следом R_h, так как пл. R является горизонтально-проецирующей. Эти построения показаны на рис. 68, *в*.

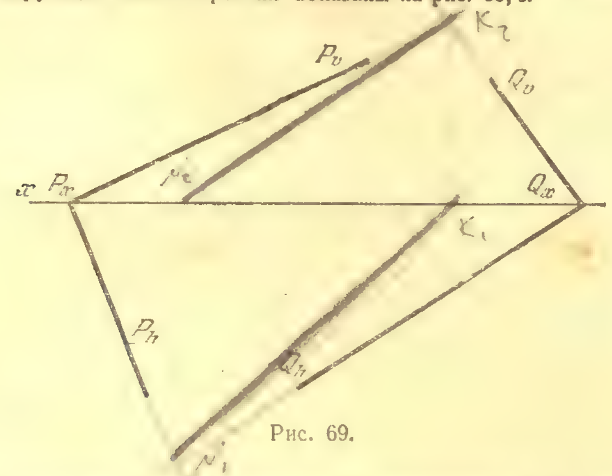


Рис. 69.

71. Построить линию пересечения плоскостей P и Q (рис. 69).

72. Построить линию пересечения плоскостей P и Q (рис. 70). Профильной плоскостью проекций не пользоваться.

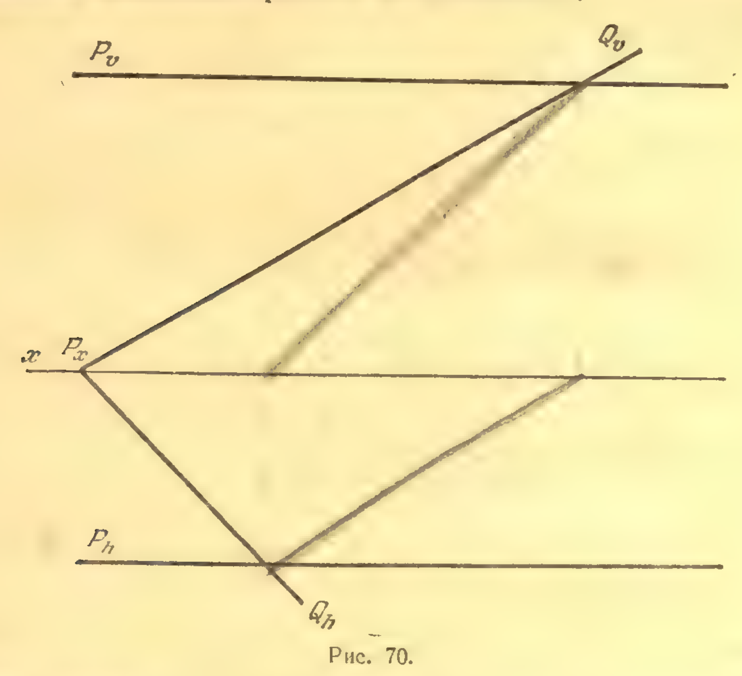


Рис. 70.

73*. Построить линию пересечения плоскостей P и Q, у которых $P_h \| Q_h$ (рис. 71, *а*).

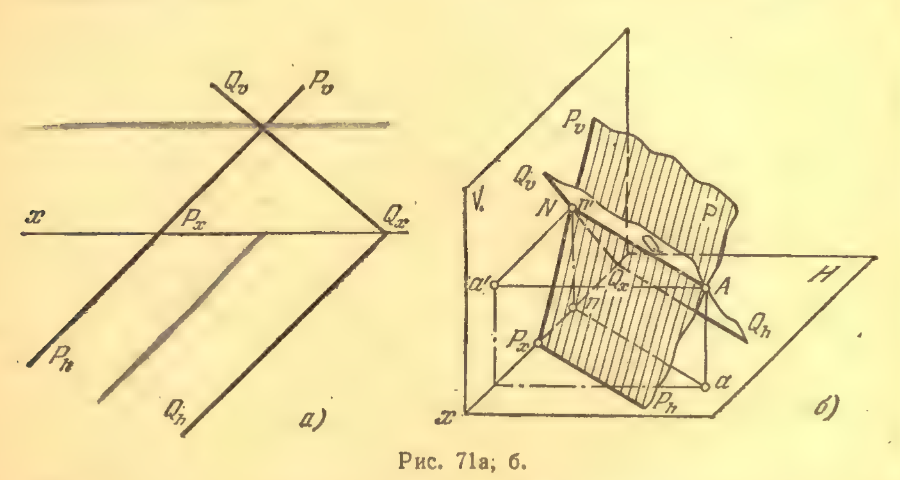


Рис. 71а; б.

Решение. В данном случае горизонт. следы плоскостей параллельны. Это значит, что искомая прямая параллельна пл. H и для плоскостей P и Q является го-

ризонталью (рис. 71, *б*). Чтобы провести эту горизонталь, достаточно построить одну принадлежащую ей точку. Используем точку N пересечения следов P_v и Q_v. Построив проекции (рис. 71, *в*) n' и n, проводим $n'a'$ параллельно оси x, а na — параллельно следам P_h и Q_h.

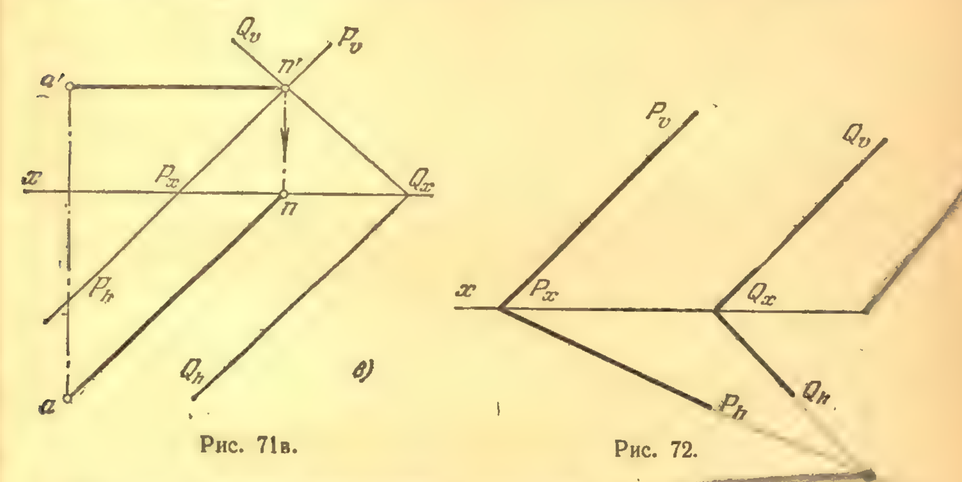


Рис. 71в.

Рис. 72.

74. Найти линию пересечения плоскостей P и Q (рис. 72).

Рис. 73а, б.

75*. Найти линию пересечения плоскостей P и Q (рис. 73, *а*), пользуясь профильной плоскостью проекций и не пользуясь ею.

Рис. 73в, г.

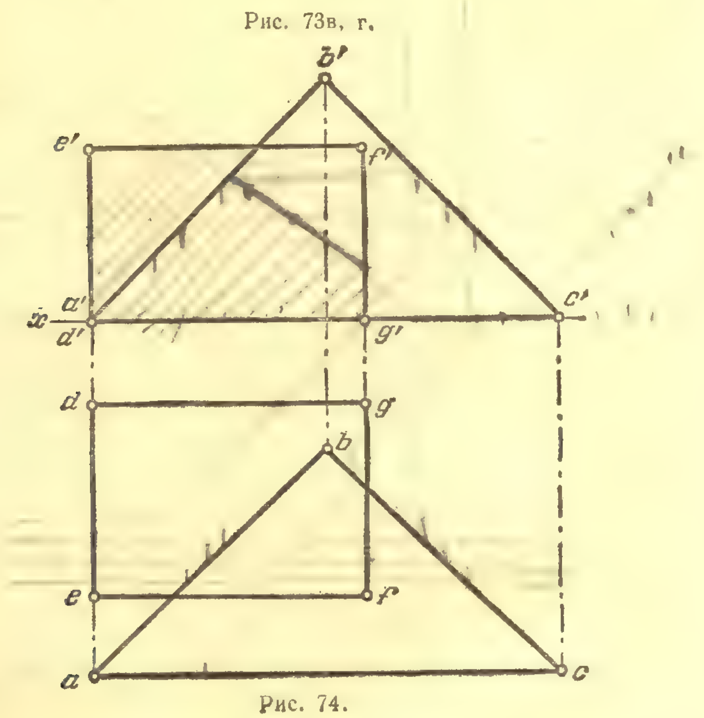


Рис. 74.

Решение. Так как заданные плоскости являются профильно-проецирующими, то линия их пересечения MN (рис. 73, *б*) параллельна оси x. Чтобы найти эту прямую, надо построить одну принадлежащую ей точку. Вводим (рис. 73, *б* и *в*) вспомогательную плоскость S и строим линии пересечения ее с пл. P (*1—2*) и Q (*3—4*). Эти линии, пересекаясь, дают точку M (m', m), общую для пл. P и Q. Через m' и m проводим проекции искомой прямой $m'n'$ и mn параллельно оси x. В качестве вспомогательной плоскости можно использовать и профильную плоскость проекций (рис. 73, *б* и *г*): линия MN проходит через точку пересечения следов P_w и Q_w.

76. Построить линию пересечения плоскостей треугольника ABC и четырехугольника $DEFG$ (рис. 74), пользуясь профильной плоскостью проекций и не пользуясь ею. Определить видимость плоскостей.

§ 13. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

77*. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью, заданной треугольником CDE (рис. 75, *а*).

Решение. Как известно, для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения следует через прямую провести вспомогательную плоскость (R), построить линию пересечения этой плоскости с заданной (*1—2*) и найти

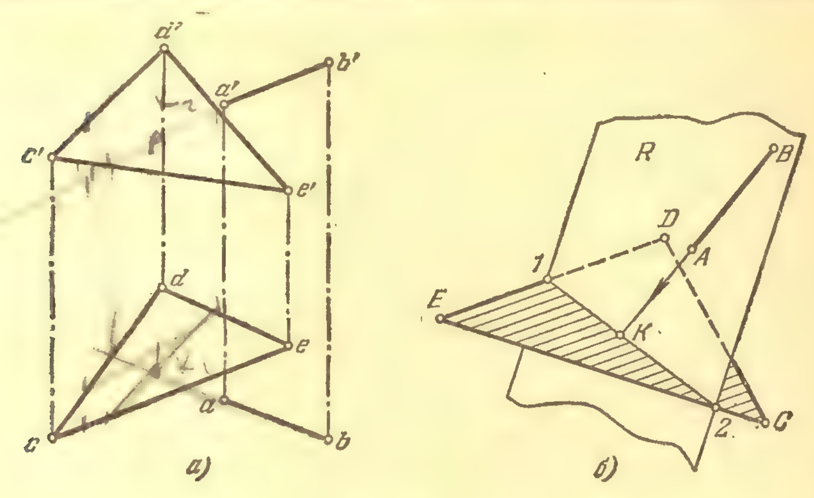


Рис. 75а, б.

точку пересечения (K) заданной и построенной прямых. Точка K является искомой точкой пересечения прямой с плоскостью (рис. 75, *б*). В качестве вспомогательной плоскости обычно используют горизонтально- или фронтально-проецирующую плоскость.

На рис. 75, *в* через прямую AB проведена фронтально-проецирующая плоскость R, ее след R_v совпадает с $a'в'$. Горизонт. след плоскости в данной задаче не нужен и поэтому не показан.

Строим линию пересечения плоскости R и плоскости, заданной треугольником CDE (пример такого построения см. в задаче 67). Построив линию *1—2* (рис. 75, *в*), находим точку пересечения ее с прямой AB — точку K (k, k').

Для определения участков прямой AB, которые будут закрыты треугольником, следует воспользоваться анализом положения точек на скрещивающихся прямых.

Например, точки *1* и *3* находятся на скрещивающихся прямых (соответственно) *ED* и *AB*. Фронтальные проекции этих точек совпадают, т. е. точки *1* и *3* одинаково удалены от пл. *H*. Но расстояния их от пл. *V* различны: точка *3* находится дальше от пл. *V*, чем точка *1*. Поэтому по отношению к пл. *V* точка *3* закрывает точку *1* (направление взгляда указано стрелкой *s*). Следовательно, прямая *AB* проходит перед треугольником *CDE* до точки *K*. Начиная же от точки *K* влево прямая *AB* закрывается треугольником, и поэтому этот участок прямой показан штриховой линией.

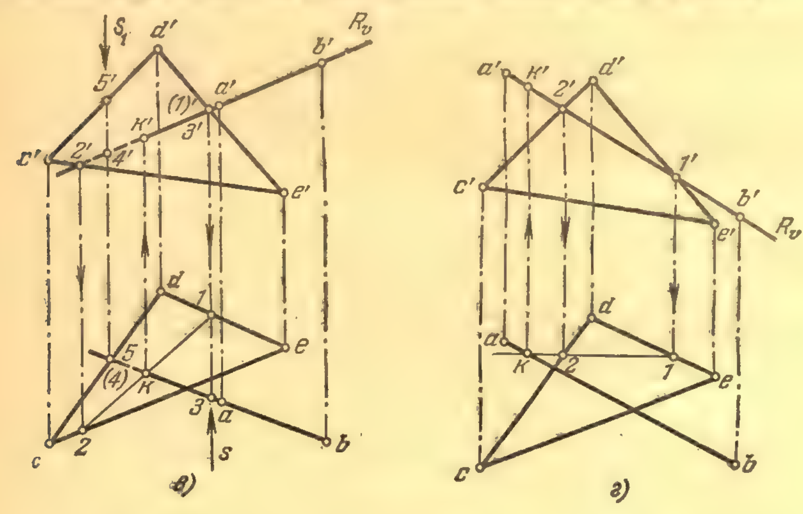


Рис. 75в, г.

Для выявления невидимого участка на горизонт. проекции прямой *AB* рассмотрим точки *4* и *5*, лежащие соответственно на прямых *AB* и *CD*.

Если смотреть на эти точки по направлению s_1, мы видим сначала точку *5*. Точка *4* закрывается точкой *5*. Следовательно, прямая *AB* в этом месте закрыта треугольником *CDE*, и участок ее проекции от точки *k* до точки *4* должен быть показан штриховой линией. В данном случае точка *K* оказалась внутри контура треугольника *CDE*.

При ином взаимном положении пересекающихся элементов возможен случай, когда точка *K* окажется вне треугольника (рис. 75, *г*). Это означает, что прямая *AB* пересекает плоскость, заданную треугольником *CDE*, вне контура этого треугольника. *AB* становится невидимой за точкой *K* (влево).

78. Найти точки пересечения прямой *AB* с гранями пирамиды (рис. 76). Грани пирамиды следует рассматривать как плоскости, заданные треугольниками.

79. Найти точки пересечения прямой *AB* с гранями призмы (рис. 77). Грани призмы следует рассматривать как плоскости, заданные параллельными прямыми.

80*. Найти точки пересечения прямой *AB* с плоскостью *P* (рис. 78, *а*).

Р е ш е н и е. Проводим через прямую *AB* (рис. 78, *б* и *в*) фронтально-проецирующую плоскость *R* (ее след R_v совпадает с *a'b'*) и строим линию *MN* пересечения обеих плоскостей — заданной и проведенной через *AB* (построение подобно выполненному в задаче 70). Искомая точка *K*(*k*, *k'*) пересечения прямой *AB* с плоскостью *P* находится в точке пересечения *MN* с *AB*.

В данной задаче видимость участка прямой от точки *A* до *K* очевидна; однако в более сложных случаях следует видимый участок прямой определять на основании

Рис. 76.

Рис. 77.

анализа положения точек. Например, взяв точку *1* (на прямой *AB*) и точку *N* (на следе P_v), видим, что точка *1* располагается дальше относительно пл. *V*, чем точка *N*. Следовательно, прямая *AB* до точки *K* видима. За точкой *K* прямая показана штриховой линией — она невидима. Аналогично определяется видимость на горизонт. проекции.

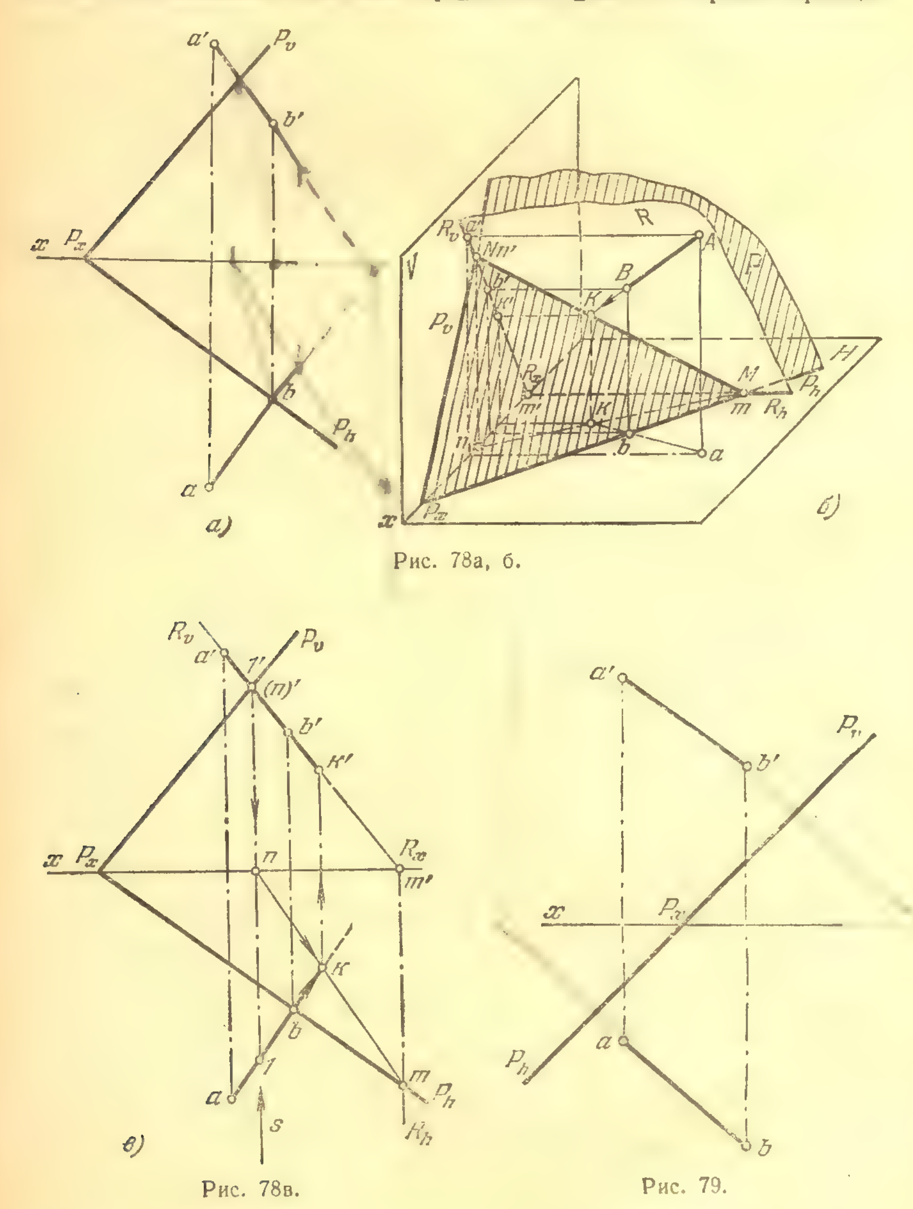


Рис. 78а, б.

Рис. 78в.

Рис. 79.

81. Найти точку пересечения прямой *AB* с плоскостью *P* (рис. 79).

82*. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью P (рис. 80, *а*).

Решение. Через прямую AB проводим горизонтально-проецирующую плоскость R (след R_h совпадает с ab) и строим линию пересечения плоскостей P и R,

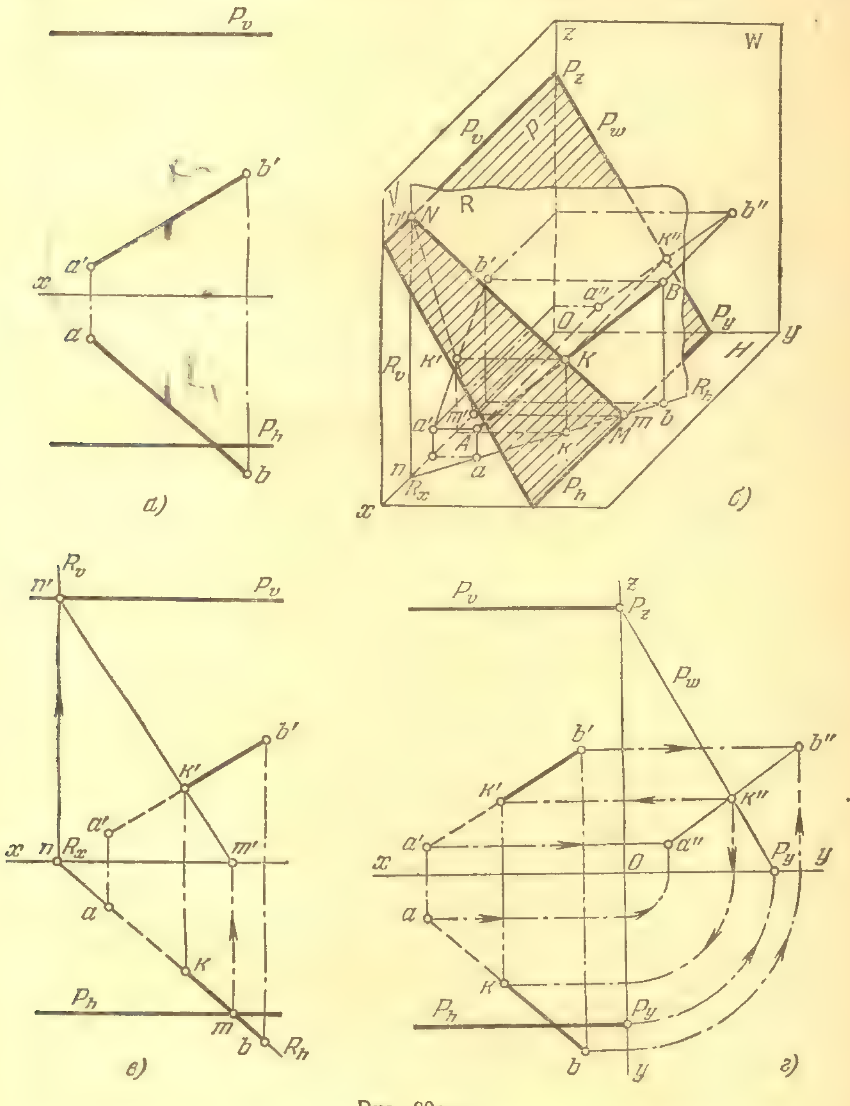


Рис. 80а—г.

используя точки M и N пересечения их одноименных следов (рис. 80, *б* и *в*). Искомая точка (k', k) находится в точке пересечения MN с AB. На рис. 80, *г* точка K построена с помощью пл. W. Так как пл. P профильно-проецирующая (рис. 80, *б*),

то профильная проекция k'' лежит в точке пересечения следа P_w с $a''b''$. Зная k'', строим k' на $a'b'$ и k на ab. Видимые участки прямой AB определяются так же, как в задачах 77 и 80.

83. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью P (рис. 81).

84*. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью, заданной треугольником CDE (рис. 82, *а*).

Решение. Через прямую AB проводим (рис. 82, *б* и *в*) пл. R, параллельную пл. W. Она пересекает заданную плоскость по прямой MN (точки m', n', m и n лежат на пересечении следов R_v и R_h с одноименными проекциями соответствующих сторон

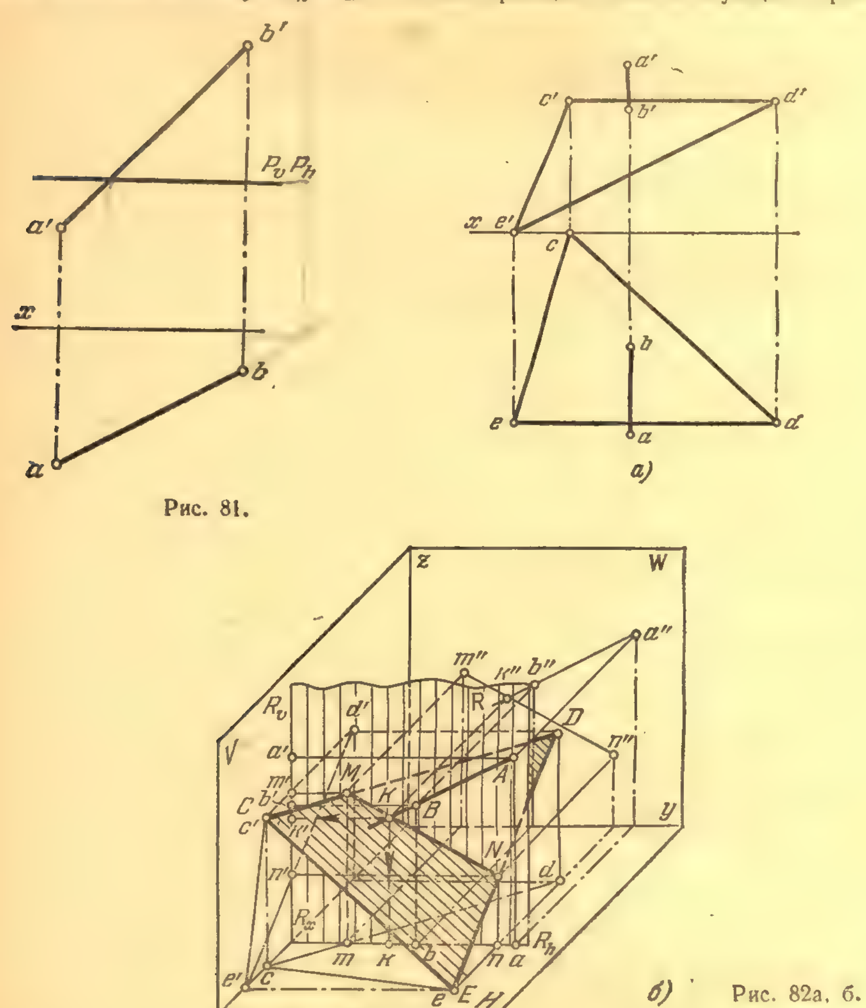


Рис. 82а, б.

треугольника CDE). Так как прямые AB и MN профильные, то для нахождения точки (K) их пересечения строим профильные проекции $a''b''$ и $m''n''$. Проекция k'' находится на пересечении $a''b''$ и $m''n''$. По k'' строим k' на $a'b'$ и k на ab.

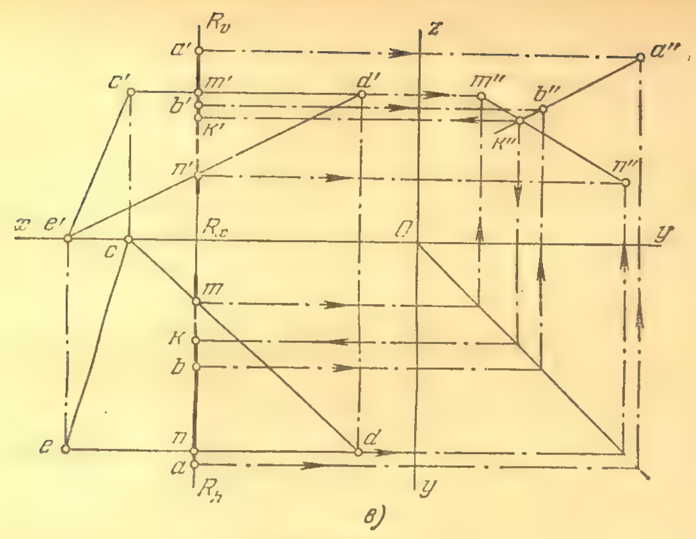


Рис. 82в.

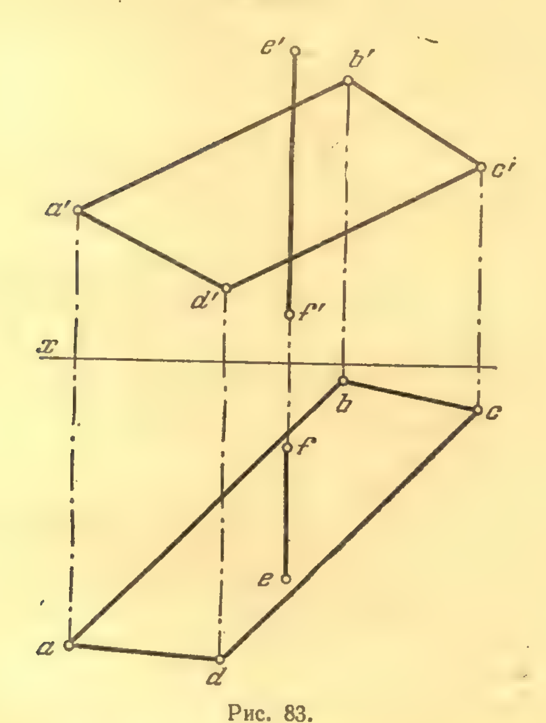


Рис. 83.

85. Найти точку пересечения прямой EF с плоскостью, заданной четырехугольником $ABCD$ (рис. 83).

§ 14. Общие случаи пересечения плоскостей

86*. Найти линию пересечения плоскостей, заданных треугольником ABC и параллельными прямыми ED и FG (рис. 84, a).

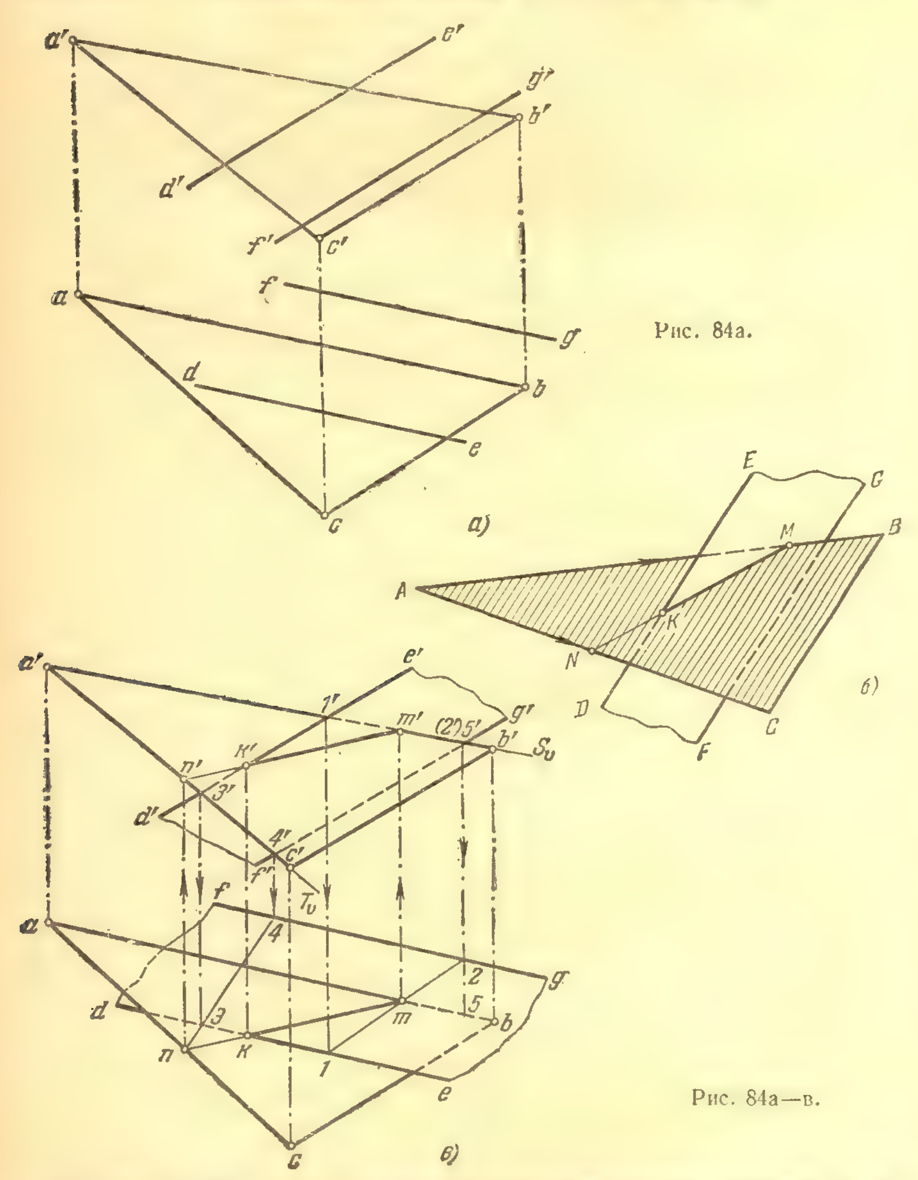


Рис. 84а.

Рис. 84а—в.

Решение. В данном случае общие точки для обеих плоскостей можно найти как точки пересечения (M и N) сторон треугольника AB и AC с плоскостью, заданной прямыми ED и FG (рис. 84, $б$).

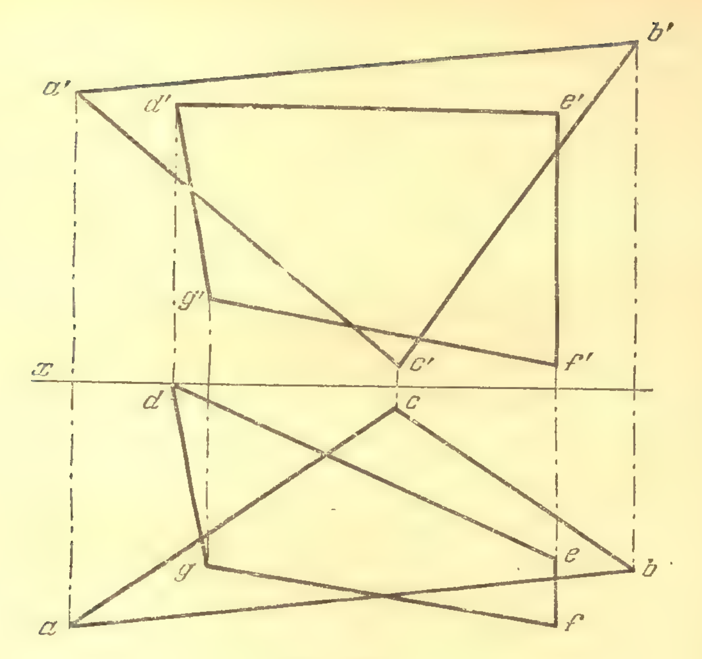


Рис. 85.

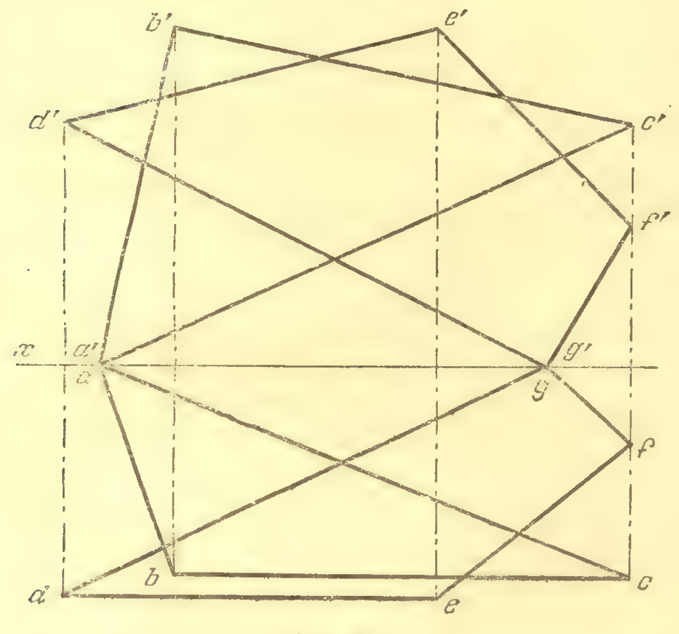


Рис. 86.

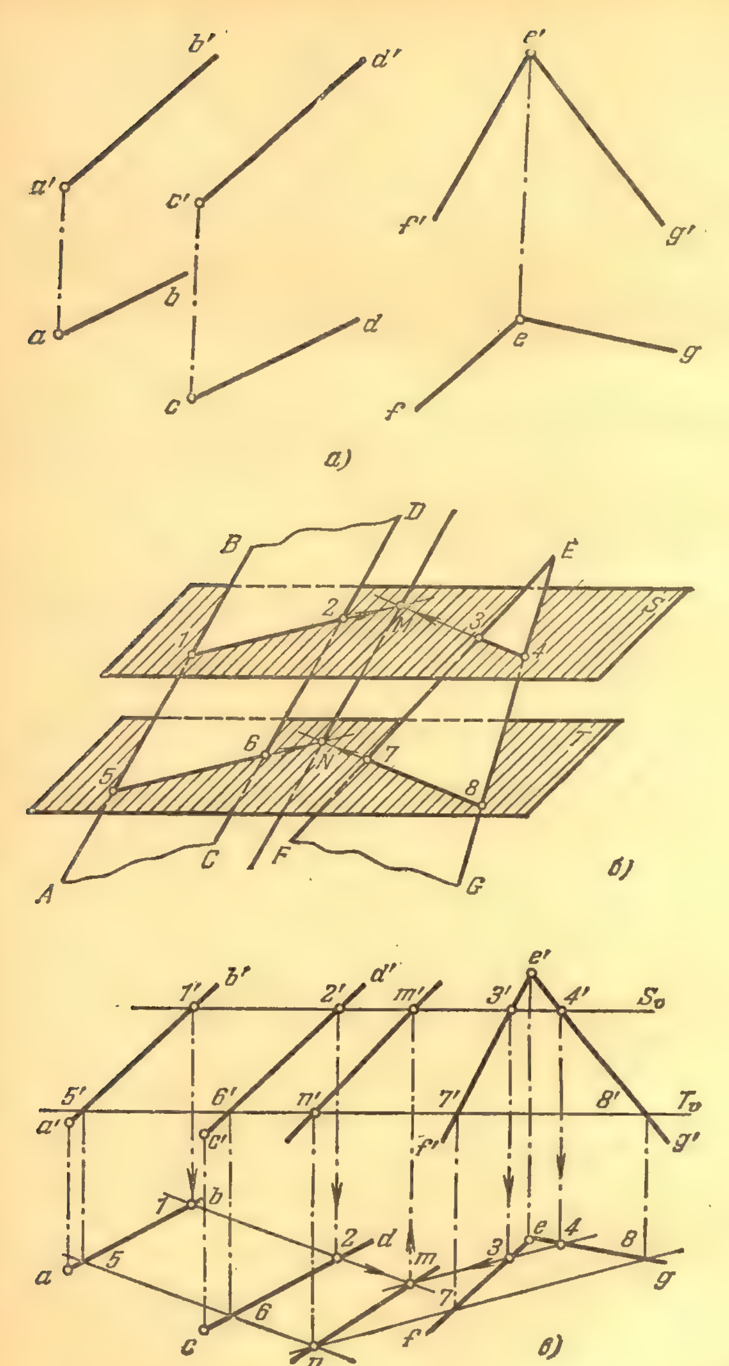

b'
d'
e'
a'
c'
f'
g'
b
a
d
e
g
c
f
a)
D
B
E
2
M
3
S
1
4
6
N
7
T
5
8
C
F
A
G
б)
e'
1'
b'
d'
2'
m'
3'
4'
S_v
5'
6'
n'
7'
8'
T_v
a'
c'
f'
g'
1
b
e
4
2
d
3
8
a
5
m
g
7
6
c
f
n
в)

Рис. 87а—в.

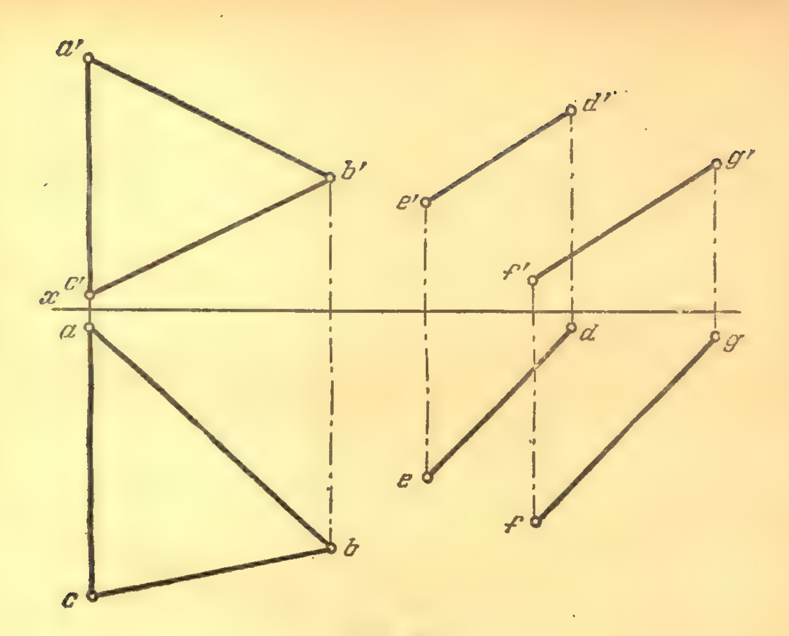


Рис. 88.

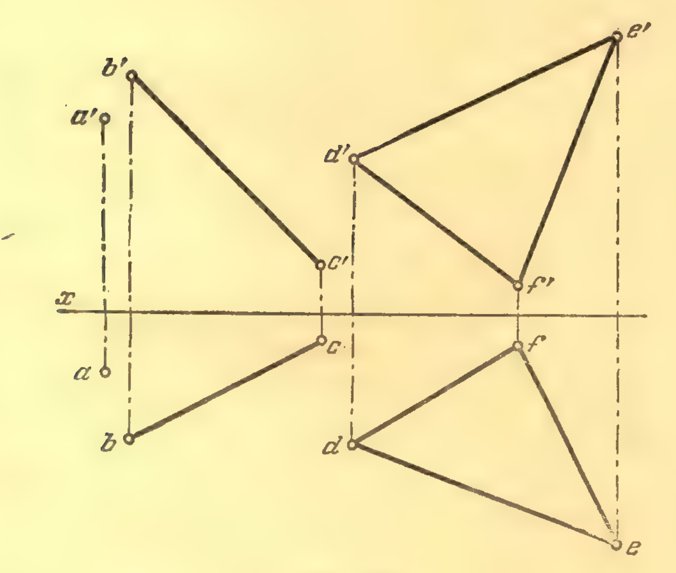


Рис. 89.

Через прямую AB проводим фронтально проецирующую плоскость S, задав ее следом S_v (рис. 84, *в*). Она пересекает плоскость параллельных прямых по прямой *1—2* (*1'2'*, *1—2*), которая пересекается со стороной AB в точке $M(m, m')$. Фронтально-проецирующая плоскость T, проведенная через прямую AC, задана следом T_v; эта плоскость пересекает плоскость параллельных прямых по линии *3—4* (*3'4'*, *3—4*), которая в пересечении со стороной AC дает точку N (n, n'). Искомая линия пересечения плоскостей проходит через точки M и N.

Для определения видимости плоскостей при взаимном их пересечении следует вообще применять прием, указанный, например, при решении задачи 77. Рассмотрим точки *2* (лежит на прямой FG) и *5* (лежит на прямой AB). Анализ положения этих точек показывает, что на пл. V точка *5* закрывает точку *2*, а это значит, что прямая AB в этом месте проходит перед FG, т. е. треугольник ABC виден до прямой KM. Остальное ясно из чертежа.

87. Найти линию пересечения плоскостей, заданных треугольником ABC и четырехугольником $DEFG$ (рис. 85).

88. Найти линию пересечения плоскостей, заданных треугольником ABC и четырехугольником $DEFG$ (рис. 86).

89*. Найти линию пересечения плоскостей, из которых одна задана параллельными прямыми AB и CD, а другая — пересекающимися FE и EG (рис. 87, *а*).

Решение. Для нахождения общих точек данных плоскостей введены две вспомогательные плоскости S и T (рис. 87, *б*) и построены линии пересечения этих плоскостей с заданными. Через точки M и N пересечения этих линий проходит искомая прямая. На рис. 87, *в* плоскости S и T параллельны пл. H. Они пересекают заданные плоскости по горизонталям *1—2*, *3—4* и *5—6*, *7—8* (см. задачу 67).

Прямые *1 — 2* и *3 — 4*, пересекаясь, дают точку M (m, m'), а прямые *5—6* и *7 — 8* — точку N (n, n'). Прямая MN (mn, $m'n'$) — искомая линия пересечения плоскостей.

90. Найти линию пересечения плоскостей, из которых одна задана треугольником ABC, а другая — параллельными прямыми ED и FG (рис. 88).

91. Найти линию пересечения плоскостей, из которых одна задана треугольником DEF, другая — прямой BC и точкой A (рис. 89).

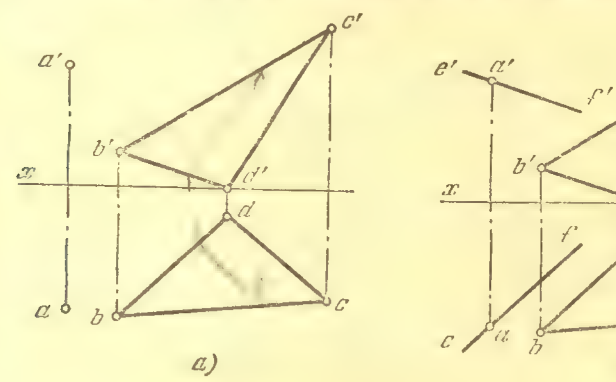
ГЛАВА IV

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ И ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 15. Параллельность прямой и плоскости и двух плоскостей

92*. Через точку A провести какую-либо прямую, параллельную плоскости треугольника BCD (рис. 90, *а*).

Решение. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому через точку A можно провести неопределенное число прямых, параллельных данной плоскости. Например, проведя (рис. 90, *б*)



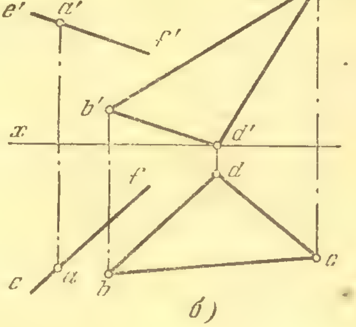


Рис. 90а, б.

через точку a' прямую $e'f'$ параллельно $b'd'$ и через a прямую ef параллельно bd, мы получаем проекции прямой EF, параллельной стороне треугольника BD, а следовательно, и его плоскости. Выбор прямой BD был произволен.

93*. Через точку A провести какую-либо прямую, параллельную пл. P (рис. 91, *а*).

Решение. Строим (рис. 91, *б*) проекции mn и $m'n'$ некоторой прямой MN, лежащей в пл. P. Затем через a' проводим фронт. проекцию $b'c'$ параллельно $m'n'$,

а через a горизонт. проекцию bc параллельно mn. Прямая BC параллельна прямой MN, а следовательно, и плоскости P.

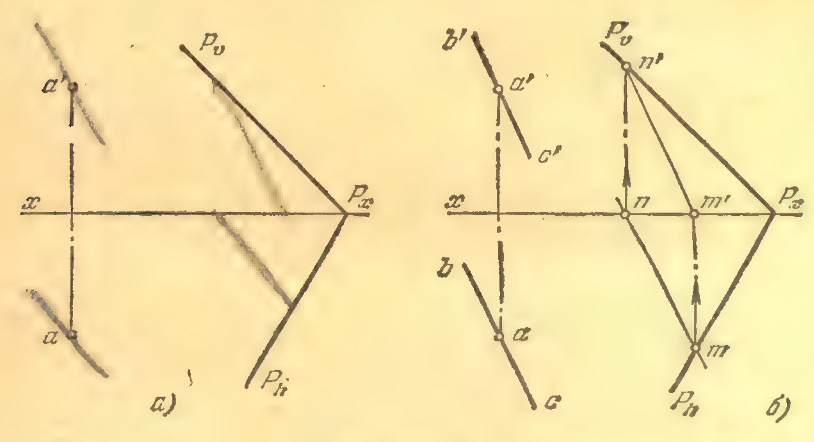


Рис. 91а, б.

94*. Определить, параллельна ли прямая AB плоскости P (рис. 92, a).

Решение. Для определения, параллельна ли прямая AB пл. P, надо попытаться провести в этой плоскости прямую, параллельную данной. На рис. 92, б проведена фронт. проекция $c'd'$ параллельно $a'b'$. Строим горизонт. проекцию cd,

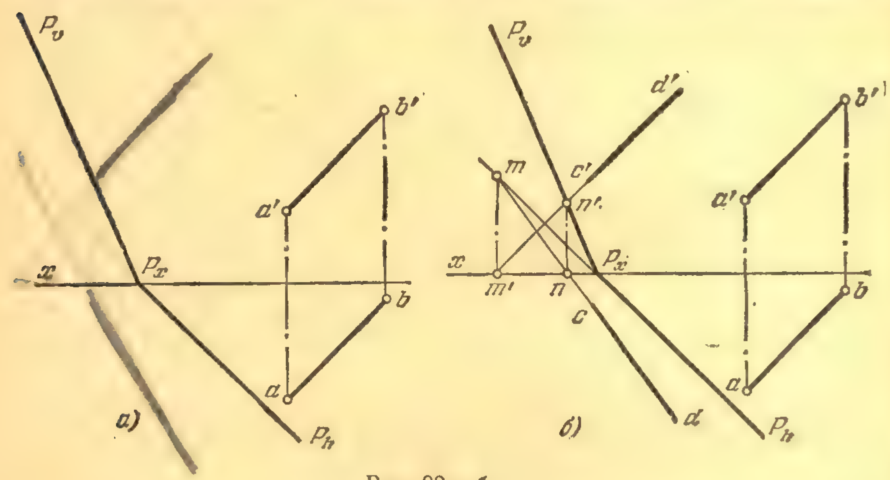


Рис. 92а, б.

соблюдая условие, что прямая CD должна лежать в пл. P. Так как построенная проекция cd оказалась не параллельной ab, то прямые AB и CD не параллельны, а это значит, что прямая AB и пл. P также не параллельны.

Можно было начать с проведения горизонт. проекции некоторой прямой параллельно ab, построить ее фронт. проекцию, придерживаясь условия, что эта прямая должна лежать в пл. P, и сопоставить построенную фронт. проекцию с $a'b'$.

95. Определить, параллельна ли прямая AB

а) плоскости, заданной двумя параллельными прямыми CD и EF (рис. 93, *а*),

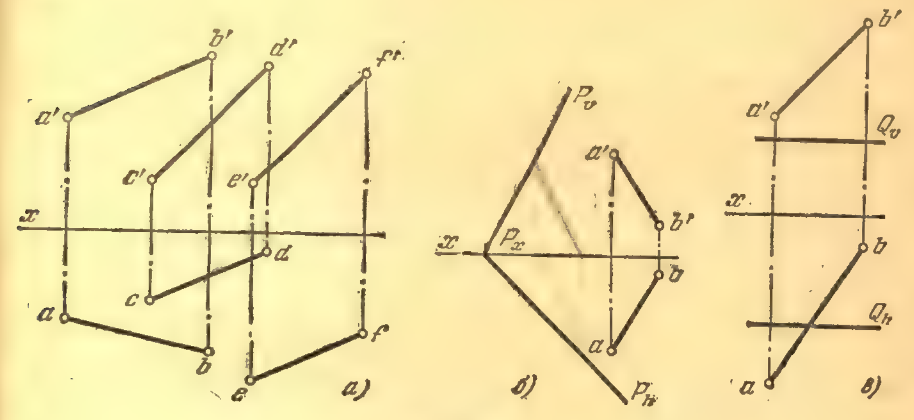


Рис. 93а—в.

б) плоскости P (рис. 93, *б*),

в) плоскости Q (рис. 93, *в*).

96*. Провести через точку A плоскость параллельно плоскости, заданной точками B, C и D (рис. 94, *а*).

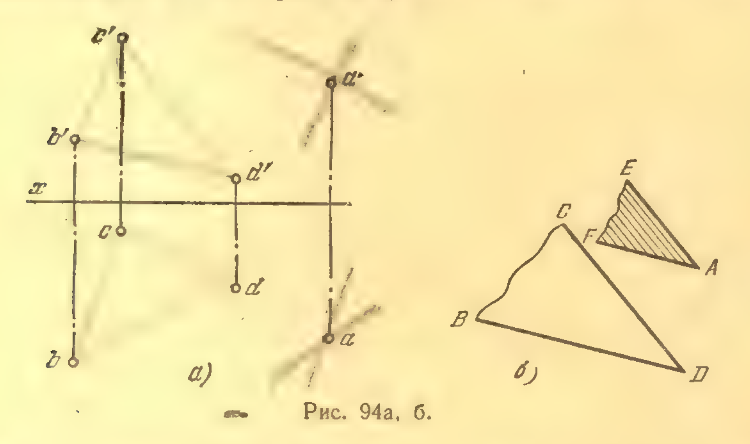


Рис. 94а, б.

Решение. Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной из них соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 94, *б*).

Для построения искомой плоскости проводим в заданной плоскости две пересекающиеся прямые BD и CD (рис. 94, *б* и *в*). Затем через a' проводим $a'f'$ параллельно $b'd'$ и $a'e'$ параллельно $c'd'$, а через a проводим af параллельно bd и ae параллельно cd. Прямые AF и AE параллельны прямым BD и CD; следовательно, параллельны между собой и определяемые ими плоскости.

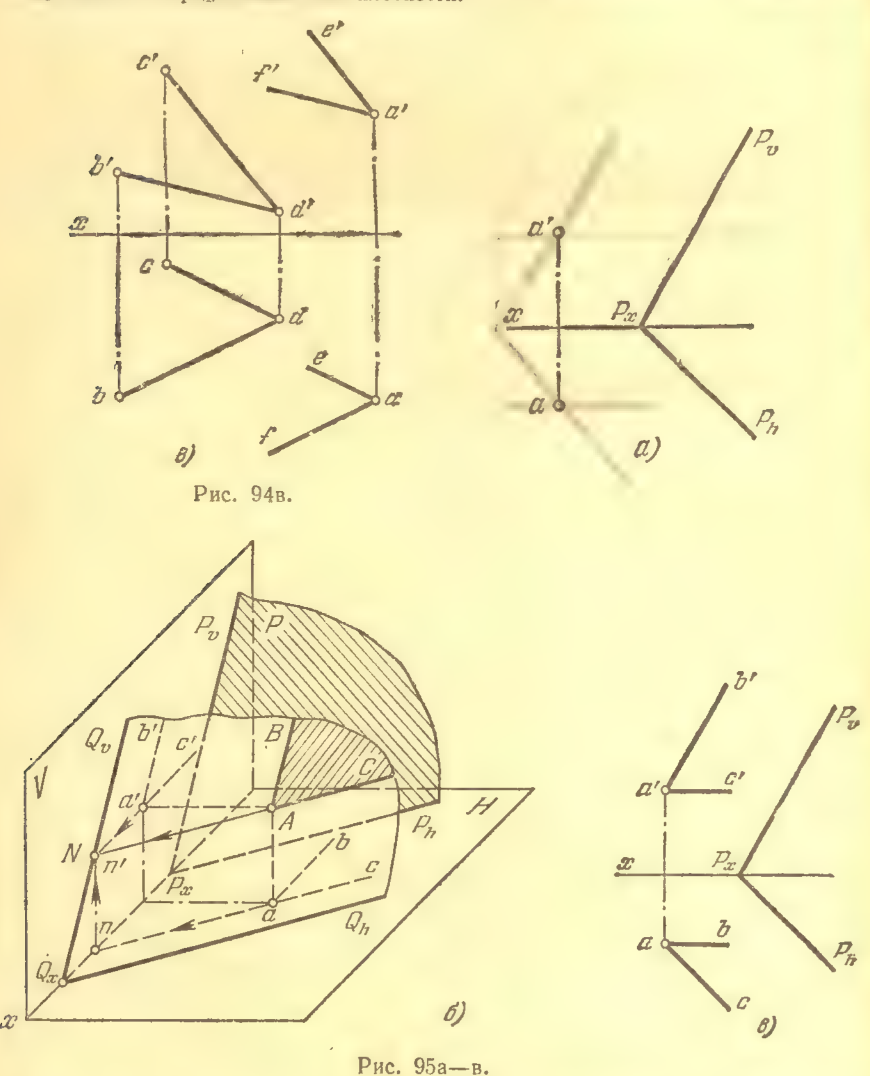


Рис. 94в.

Рис. 95а—в.

97*. Через точку A (рис. 95, *а*) провести плоскость параллельно пл. P.

Решение. Как известно, горизонтали параллельных плоскостей параллельны между собой, параллельны между собой и фронтали. Также одноименные следы параллельных плоскостей соответственно параллельны между собой (рис. 95, *б*).

На рис. 95, *в* задаем искомую плоскость двумя прямыми — горизонталью AC и фронталью AB, для чего через a' проводим $a'b'$ параллельно P_v и $a'c'$ параллельно оси x, а через точку a проводим ac параллельно P_h и ab параллельно оси x. Так как след P_v есть одна из фронталей пл. P, а след P_h — одна из ее горизонталей, то получаем параллельность горизонталей и параллельность фронталей одной и другой плоскостей, т. е. параллельность этих плоскостей. На рис. 95, *г* показано построение для искомой плоскости ее следов Q_v и Q_h. Для их построения проводим через точку A горизонталь искомой плоскости параллельно следу P_h и находим фронт. след $N(n, n')$ этой горизонтали. Теперь через n' проводим $Q_v \parallel P_v$, находим точку Q_x на оси x и проводим след Q_h параллельно P_h.

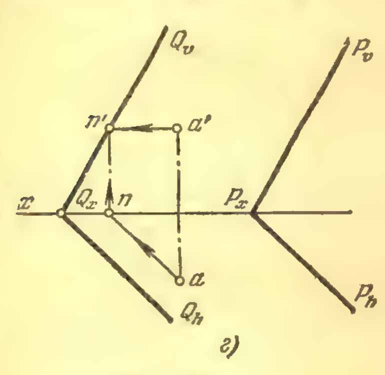


Рис. 95г.

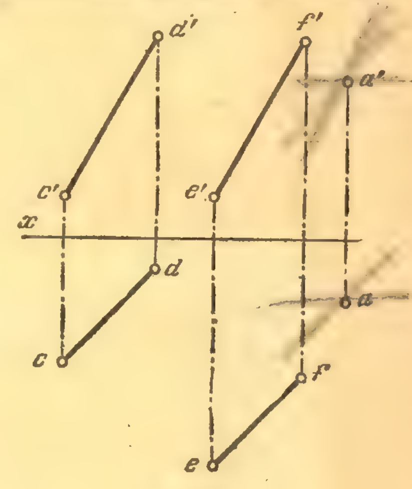


Рис. 96.

98. Через точку A (рис. 96) провести плоскость, параллельную плоскости, заданной параллельными прямыми CD и EF; выразить искомую плоскость двумя пересекающимися прямыми.

99. Через точку A (рис. 97) провести плоскость параллельно пл. P; выразить искомую плоскость ее следами.

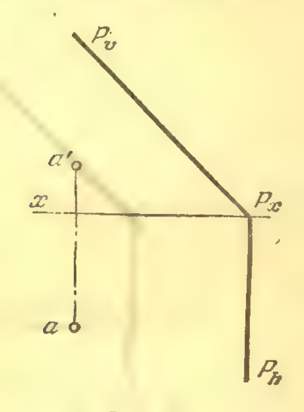


Рис. 97.

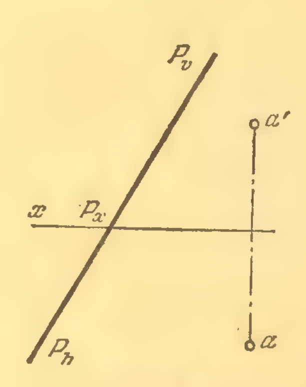


Рис. 98.

100. Через точку A (рис. 98) провести плоскость параллельно пл. P. Дать ответы: а) выразить пл. горизонталью и фронталью, б) следами.

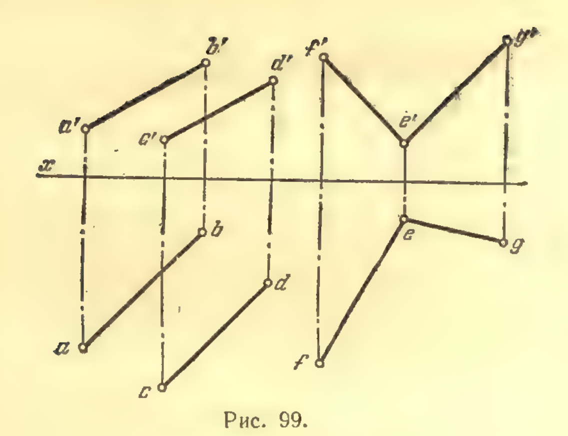


Рис. 99.

101. Определить, параллельны ли плоскости, из которых одна задана параллельными прямыми *AB* и *CD*, а другая — пересекающимися прямыми *EF* и *EG* (рис. 99).

§ 16. Перпендикулярность прямой и плоскости и двух плоскостей

102*. Провести через точку *A* перпендикуляр к плоскости, заданной прямыми *AB* и *AC* (рис. 100, *a*).

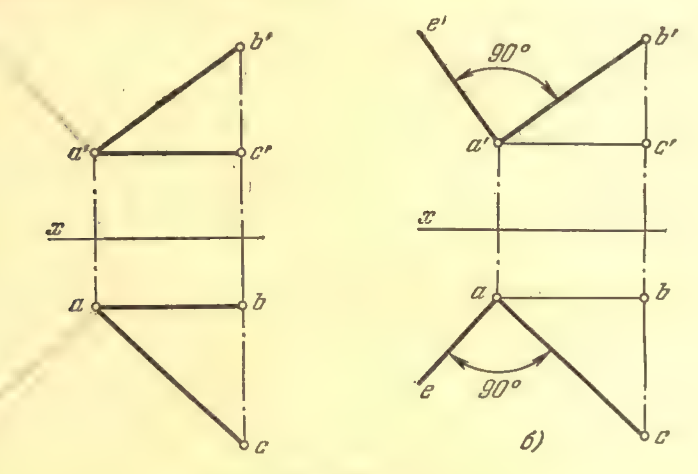


Рис. 100а, б.

Решение. Известно, что фронт. проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна к фронт. проекции фронтали плоскости, а горизонтальная — к горизонт. проекции горизонтали плоскости. На чертеже (рис. 100, *б*) проводим фронт. проекцию перпендикуляра *a′e′* перпендикулярно к фронт. проекции фронтали *a′b′*, а горизонтальную его проекцию *ae* — перпендикулярно к проекции *ac* горизонтали.

103. Через точку E провести перпендикуляр к плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD (рис. 101).

104. Через точку A провести перпендикуляр к пл. P (рис. 102).

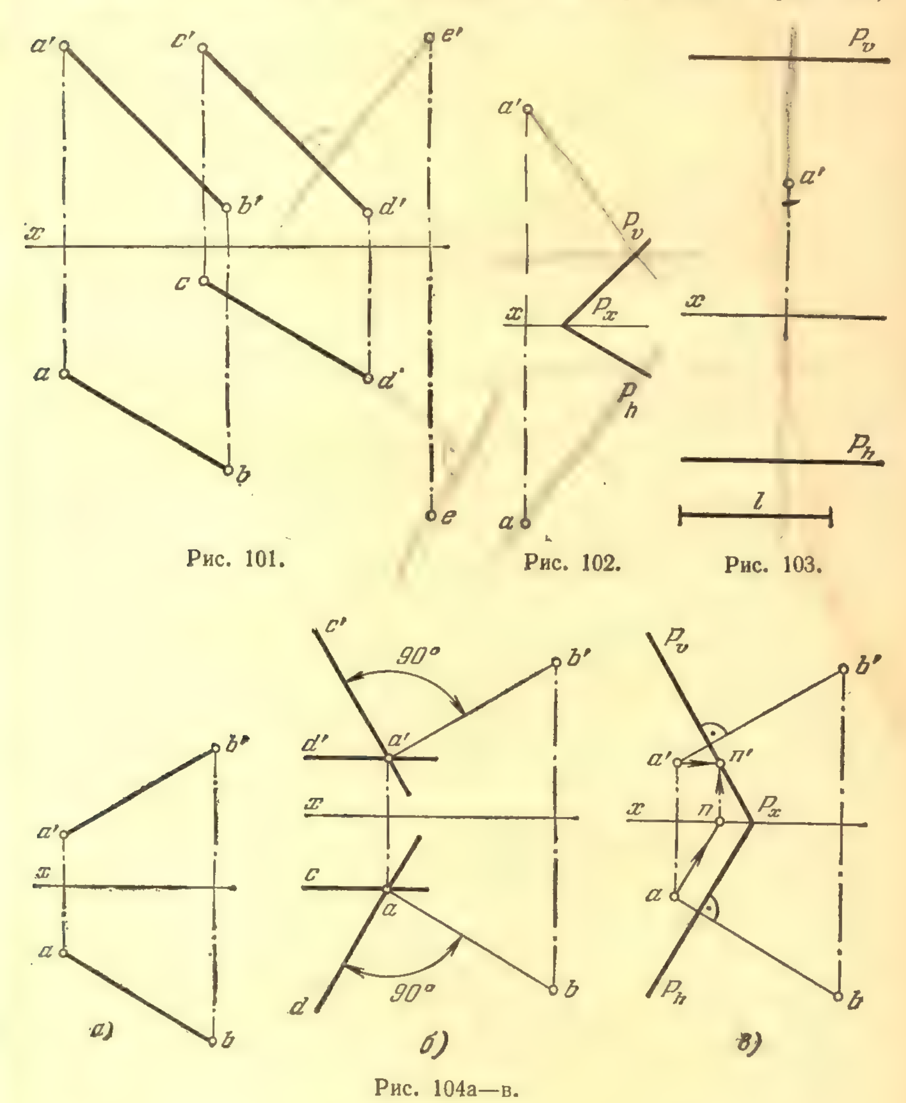


Рис. 101.

Рис. 102.

Рис. 103.

Рис. 104а—в.

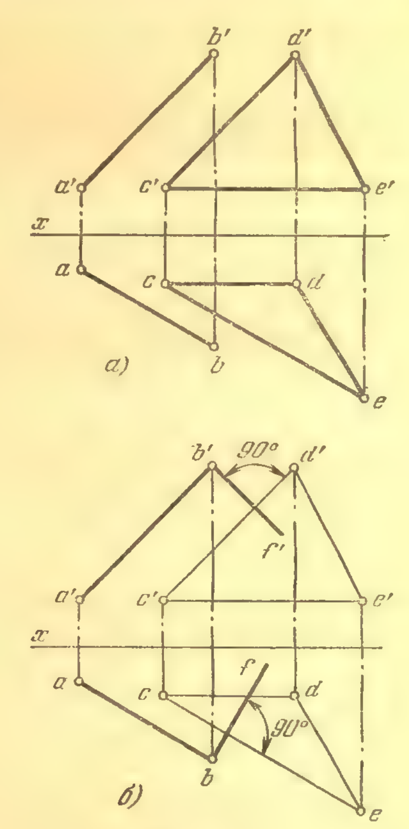
105. Через точку A плоскости P провести перпендикуляр к плоскости и отложить на нем отрезок, равный l (рис. 103).

106*. Провести через точку A плоскость перпендикулярно к отрезку AB (рис. 104, a). Плоскость задать главными линиями и следами.

Решение. Проводим через точку A (рис. 104, б) фронталь AC и горизонталь AD искомой плоскости перпендикулярно к AB. Фронт. проекция $a'c'$ фронтали перпендикулярна к $a'b'$, а горизонт. проекция ad горизонтали перпендикулярна к ab. Прямые AC и AD задают искомую плоскость. Чтобы задать плоскость следами (рис. 104, в), строим проекции n и n' фронт. следа ее горизонтали AD. Через n' проводим след P_v перпендикулярно к $a'b'$, а через P_x—след P_h перпендикулярно к ab.

107. Провести через точку A плоскость перпендикулярно к отрезку BC (рис. 105); следов плоскости не строить.

108*. Провести через прямую AB плоскость перпендикулярно к плоскости треугольника CDE (рис. 106, а).



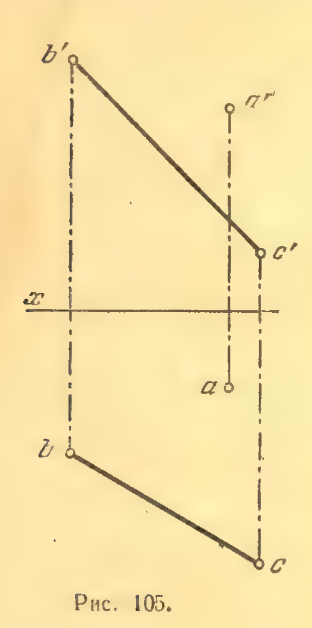


Рис. 105.

Рис. 106а, б.

Решение. Если плоскость содержит в себе перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны. Чтобы провести через AB искомую плоскость, надо из какой-либо точки прямой, например B, провести перпендикуляр к данной плоскости. Так как в треугольнике CDE сторона CD является фронталью, а CE — горизонталью (рис. 106, а), то, проведя $b'f' \perp c'd'$, $bf \perp ce$ (рис. 106, б), получим перпендикуляр к плоскости треугольника CDE. Прямые AB и BF определяют искомую плоскость.

109. Через точку K провести плоскость перпендикулярно к двум данным плоскостям, из которых одна задана параллельными прямыми AB и CD, а другая — треугольником EFG (рис. 107).

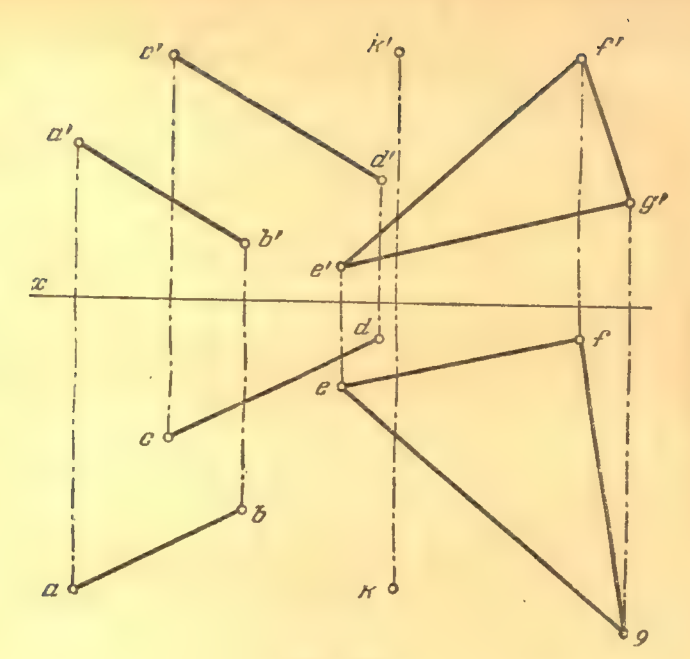


Рис. 107.

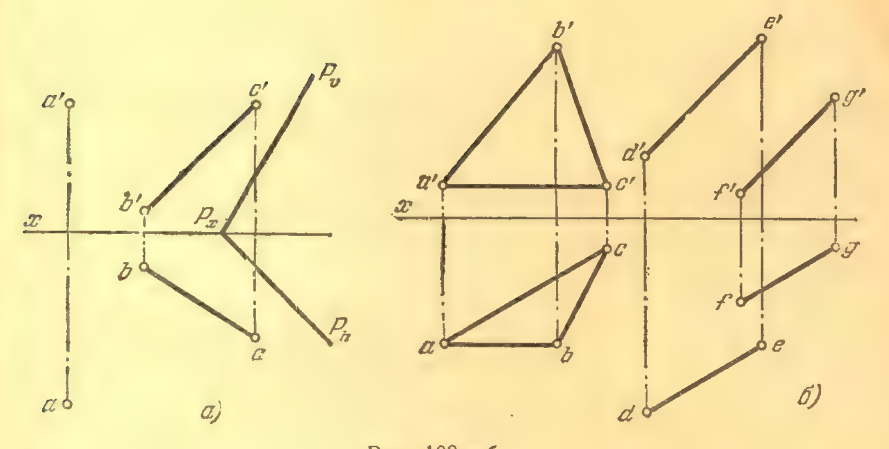


Рис. 108а, б.

110. Определить, будут ли две плоскости взаимно перпендикулярны: а) плоскость, заданная прямой *BC* и точкой *A*, и плоскость *P* (рис. 108, *а*); б) плоскость треугольника *ABC* и плоскость, заданная прямыми *DE* и *FG* (рис. 108, *б*).

§ 17. Смешанные задачи без применения способов преобразования чертежа

111*. Провести перпендикуляр из точки A к плоскости, заданной: а) треугольником BCD (рис. 109, *а*); б) следами (рис. 109, *б*); в) треугольником BCD (рис. 109, *в*). Во всех случаях построить основание перпендикуляра на заданной плоскости.

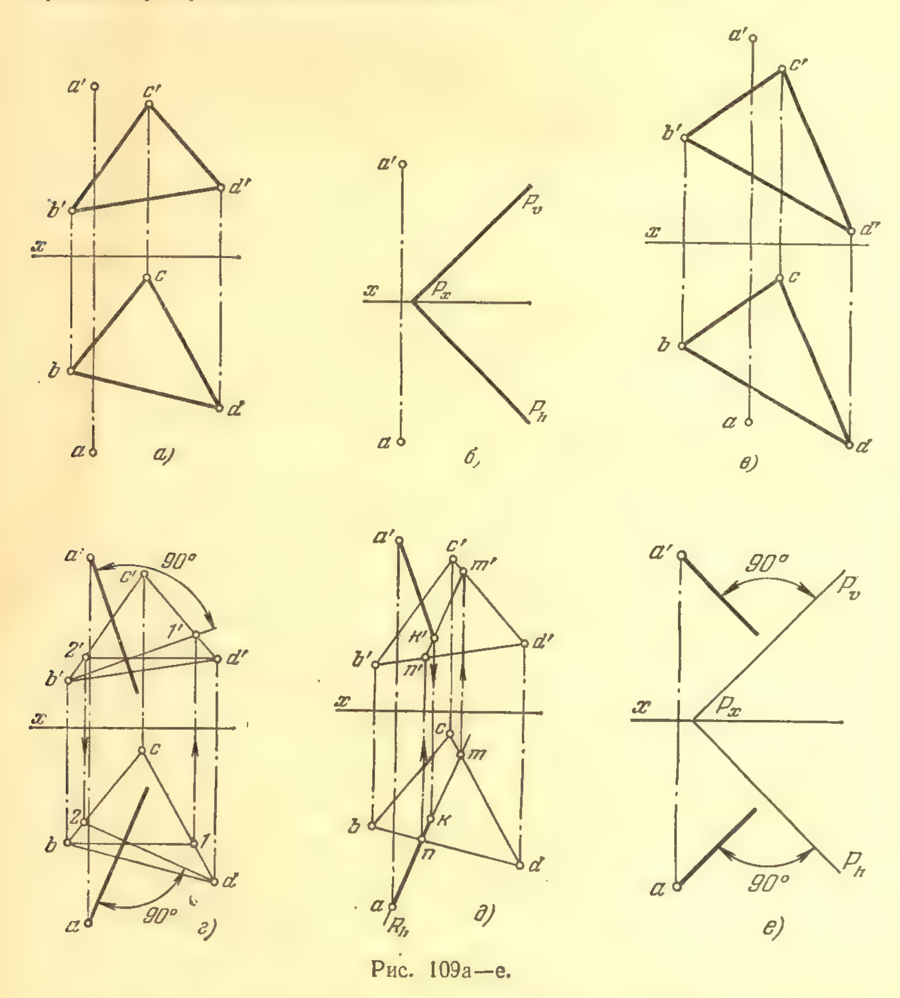
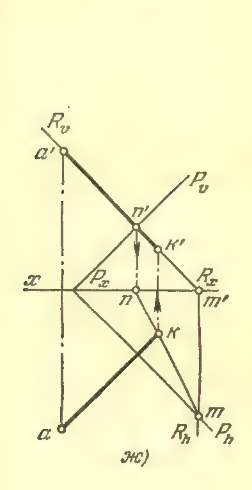


Рис. 109а—е.

Решение. а) Через точку B (рис. 109, *г*) проводим фронталь $B—1$ заданной плоскости, а через точку D — горизонталь $D—2$. Фронт. проекция искомого перпендикуляра проходит через a' перпендикулярно к $b'1'$, а горизонтальная — через a перпендикулярно к $d—2$. Основание перпендикуляра (рис. 109, *д*) определяется как точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью. Заключаем его в горизонтально-проецирующую плоскость R (задаем ее следом R_h) и находим линию пересе-

чения этой плоскости с плоскостью треугольника — прямую NM. Получаем точку k' — фронт. проекцию основания перпендикуляра — и по k' находим k.

б) На рис. 109, *е* фронт. проекция перпендикуляра проведена под прямым углом к следу P_v, а горизонтальная — под прямым углом к P_h. Для построения основания перпендикуляра заключаем его (рис. 109, *ж*) во фронтально-проецирующую плоскость R, строим линию пересечения плоскостей R и P — прямую MN. Получаем точку k— горизонт. проекцию основания перпендикуляра; по ней находим k'.



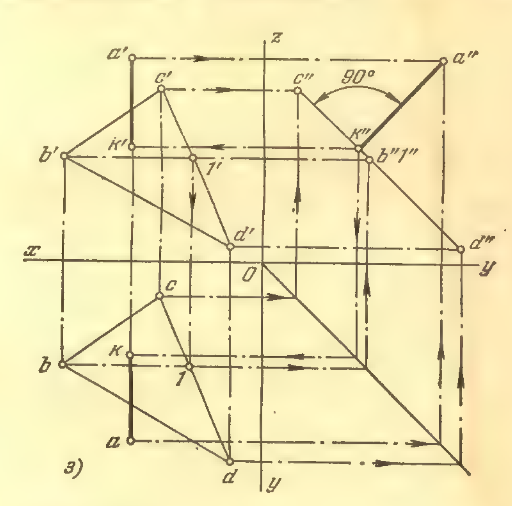


Рис. 109ж, з.

в) Проведя горизонталь $B—1$ (рис. 109, *в*), видим, что эта прямая параллельна оси x. Из этого заключаем, что плоскость треугольника является профильно-проецирующей. Следовательно, перпендикуляр к ней — прямая профильная.

Строим профильные проекции треугольника и точки A. Из a'' проводим перпендикуляр на $c''d''$. Точка k'' — профильная проекция основания перпендикуляра. По k'' находим k' и k на одноименных с ними проекциях искомого перпендикуляра.

112. Найти основания перпендикуляров, проведенных из точки A:

а) к плоскости, заданной параллельными прямыми BC и DE (рис. 110, *а*);

б) к плоскости грани SCD пирамиды $SBCD$ (рис. 110, *б*);

в) к плоскости грани SBD пирамиды $SBCD$ (рис. 110, *в*).

113*. Построить на плоскости, заданной параллельными прямыми CD и EF, геометрическое место оснований перпендикуляров, проведенных из точек прямой AB к этой плоскости (рис. 111, *а*).

Решение. Искомым геометрическим местом точек является (рис. 111, *б*) линия пересечения K_1K_2 плоскостей, 1) заданной и 2) перпендикулярной к ней, проведенной через прямую AB.

Проводим (рис. 111, *в*) в заданной плоскости горизонталь $C—1$ и фронталь $C—2$. Фронт. проекции перпендикуляров перпендикулярны к $c'2'$, а горизонтальные — к $c—1$.

Для построения искомого геометрического места точек находим (рис. 111, *г*) точки K_1 и K_2 пересечения проведенных перпендикуляров с заданной плоскостью. Прямая K_1K_2 и есть искомое геометрическое место.

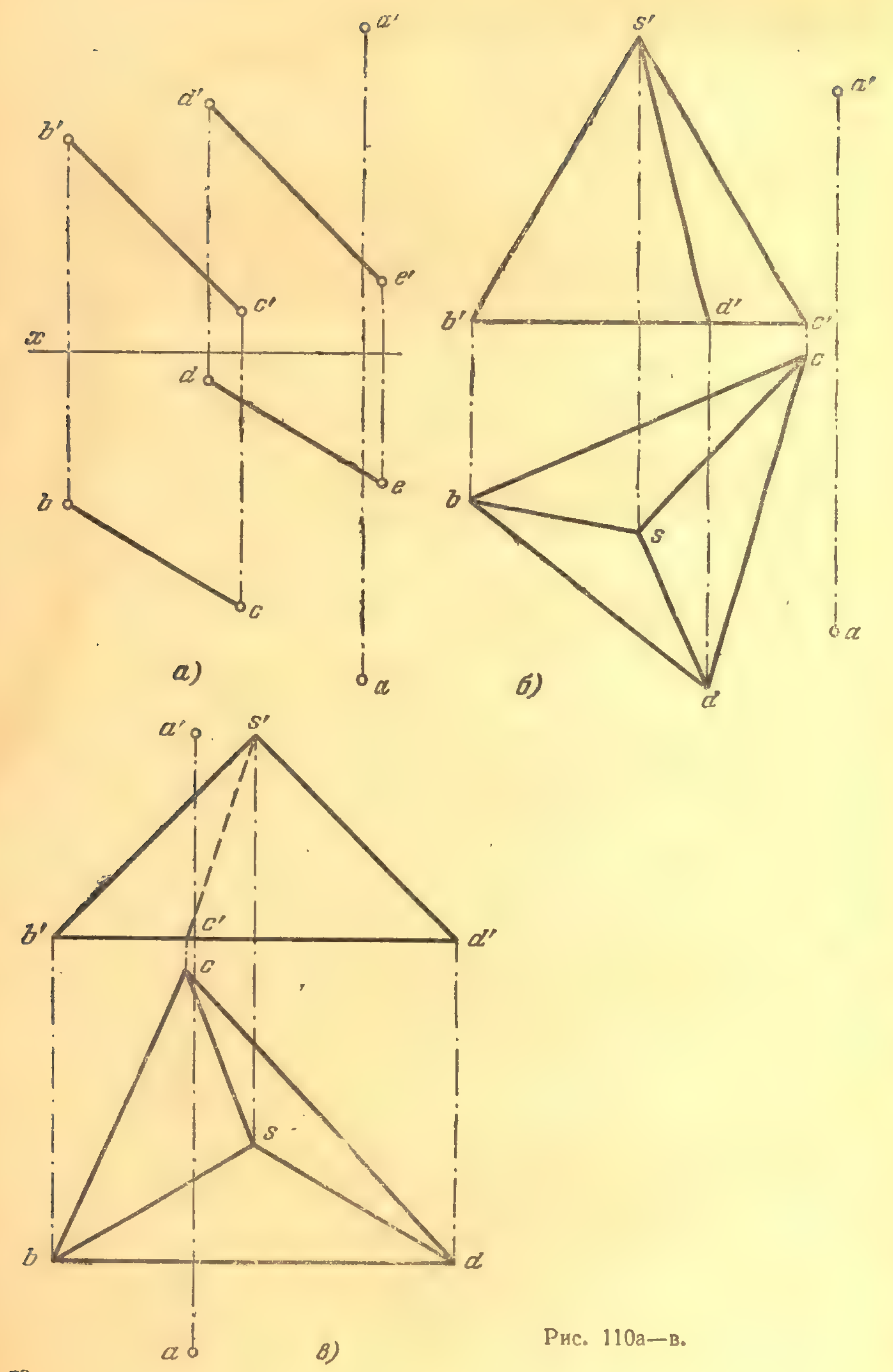
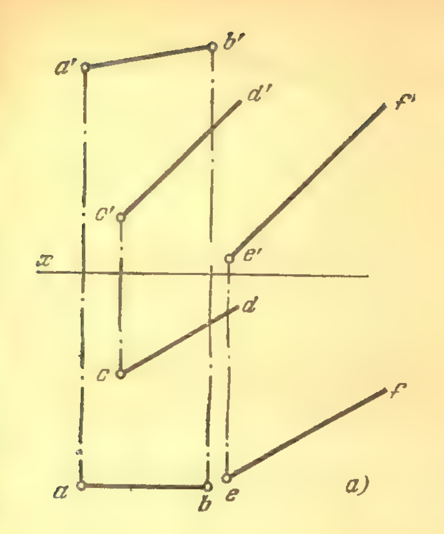
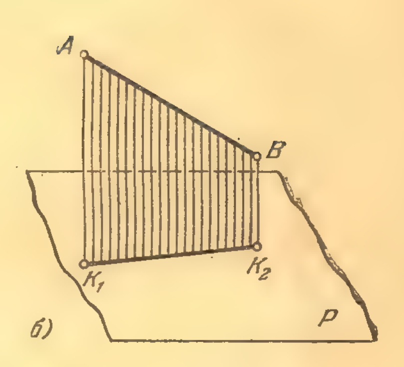


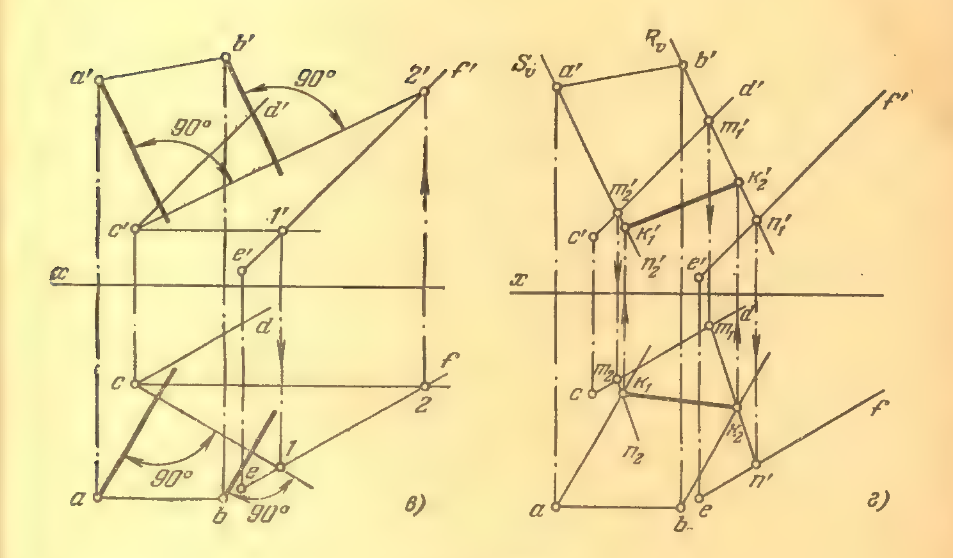
Рис. 110а—в.



a'
b'
d'
f'
c'
x
e'
d
c
f
a
b
e
a)



A
B
K1
K2
P
б)



b'
a'
90°
2'
f'
d'
90°
c'
1'
e'
x
d
c
f
2
1
90°
e
a
b
90°
в)
Rv
Sv
a'
b'
d'
m'1
f'
m'2
K'2
n'1
c'
K'1
n'2
e'
x
d
m1
m2
K1
c
K2
n2
f
n'
a
b
e
г)

Рис. 111а—г.

114. Построить на плоскости, заданной треугольником CDE, геометрическое место оснований перпендикуляров, проведенных из точек прямой AB к этой плоскости (рис. 112).

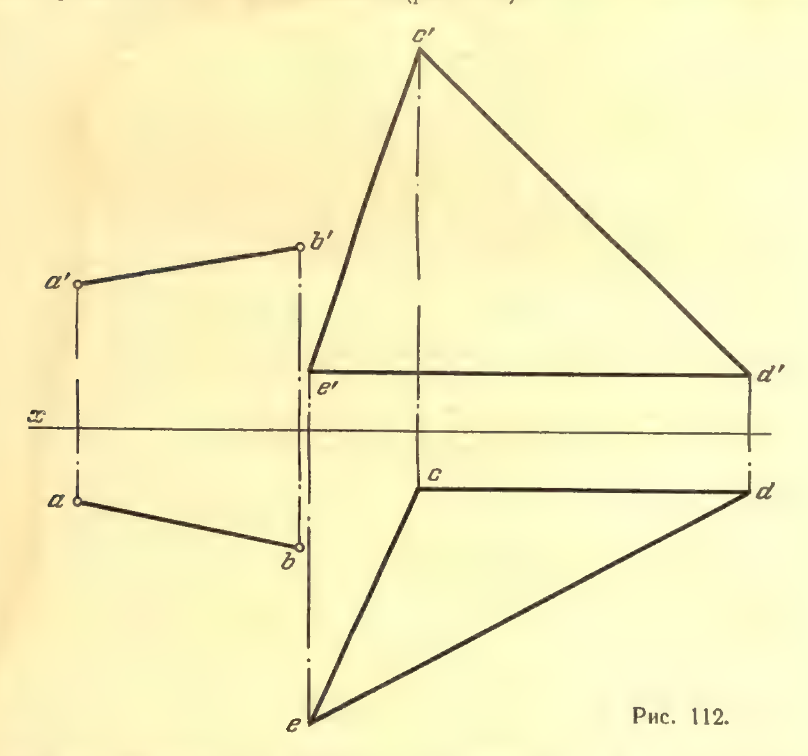


Рис. 112.

115*. Из вершины A провести перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (рис. 113, *а*) и отложить на нем отрезок длиной l.

Решение. Для построения перпендикуляра проводим (рис. 113, *б*) горизонталь A—1 и фронталь A—2 плоскости треугольника; фронт. проекция перпендикуляра перпендикулярна к $a'2'$, а горизонтальная — к a—1.

Дальнейшее построение (рис. 113, *в*) аналогично выполненному в задаче 20. Прямые $a'd'$ и ad являются проекциями искомого отрезка.

Эта задача имеет два решения. Во втором случае надо продолжить перпендикуляр в другую сторону от заданной плоскости.

116. Из точки D провести перпендикуляр к плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD, и отложить на нем отрезок длиной l (рис. 114).

117*. Построить геометрическое место точек, удаленных от некоторой плоскости на расстояние l. Дать решение для случаев, когда плоскость задана треугольником ABC (рис. 115, *а*) или следами (рис. 115, *б*).

Решение. Искомым геометрическим местом точек являются две плоскости, параллельные данной и расположенные по обе стороны от нее на расстоянии l.

На рис. 115, *в* показана одна из таких плоскостей. Для построения этой плоскости (рис. 115, *г*) проводим из любой точки данной плоскости (например, C) перпендикуляр

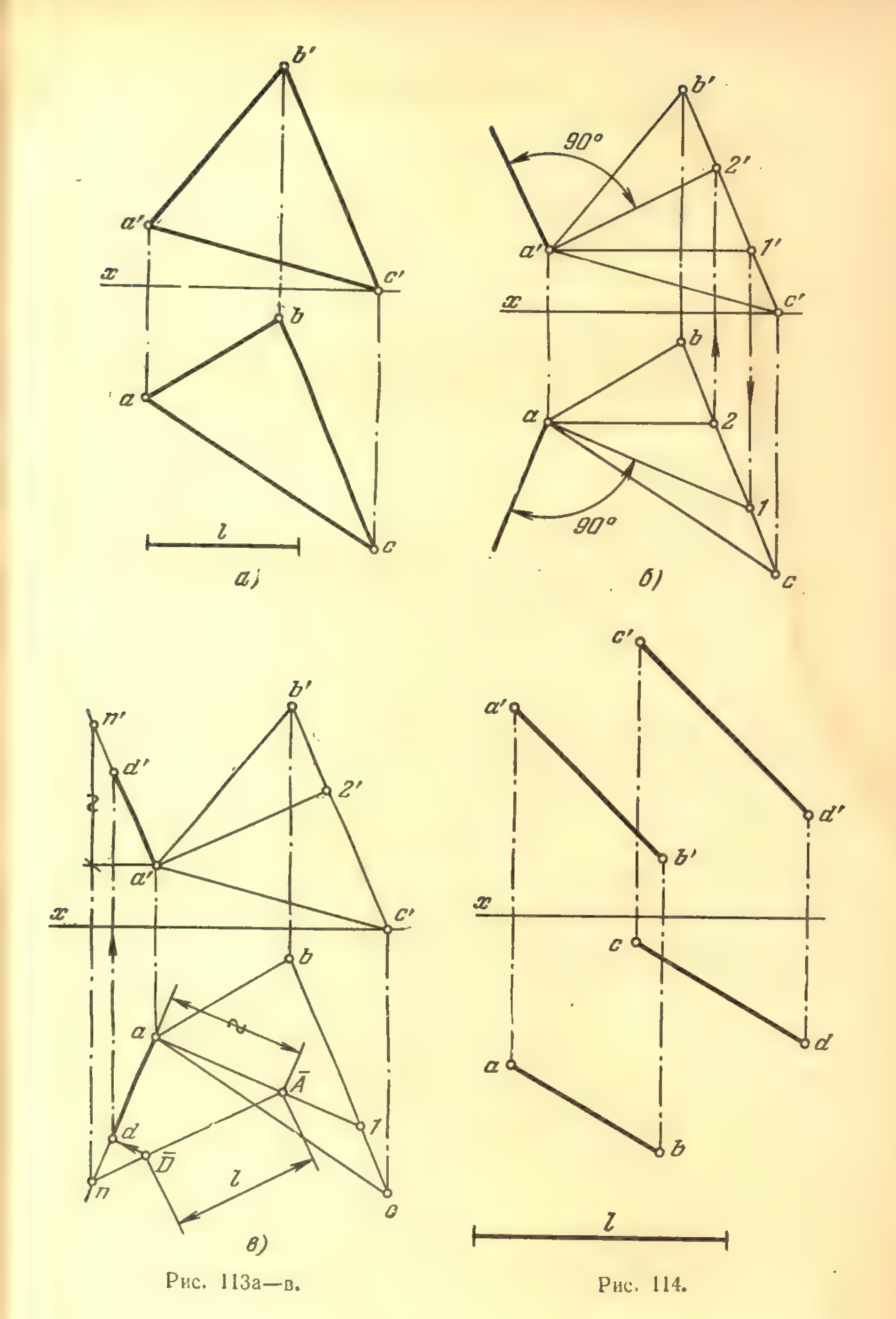
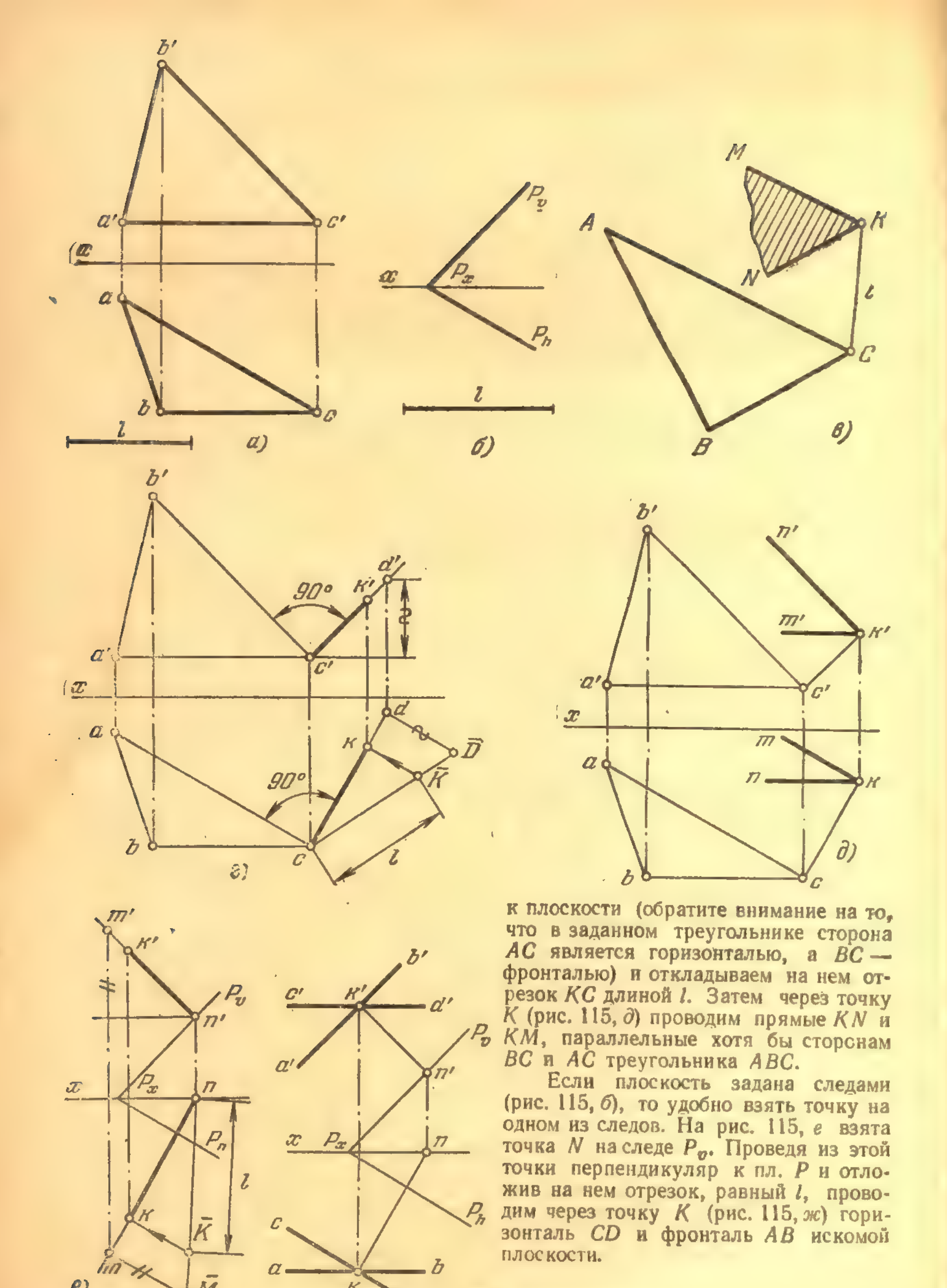


Рис. 113а—в.

Рис. 114.



к плоскости (обратите внимание на то, что в заданном треугольнике сторона AC является горизонталью, а BC — фронталью) и откладываем на нем отрезок KC длиной l. Затем через точку K (рис. 115, *д*) проводим прямые KN и KM, параллельные хотя бы сторонам BC и AC треугольника ABC.

Если плоскость задана следами (рис. 115, *б*), то удобно взять точку на одном из следов. На рис. 115, *е* взята точка N на следе P_v. Проведя из этой точки перпендикуляр к пл. P и отложив на нем отрезок, равный l, проводим через точку K (рис. 115, *ж*) горизонталь CD и фронталь AB искомой плоскости.

Рис. 115а—ж.

118. Построить геометрическое место точек, удаленных от пл. P (рис. 116) на расстояние l. Дать два решения.

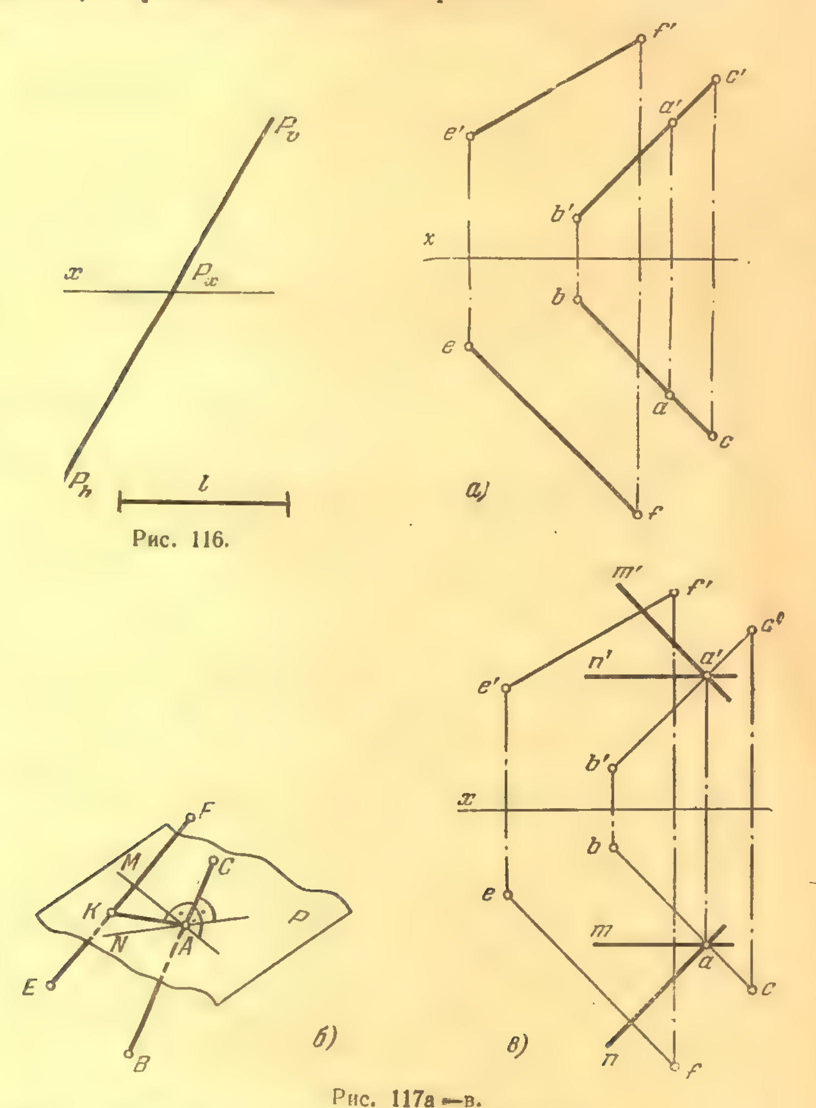


Рис. 116.

Рис. 117а—в.

119*. Провести перпендикуляр к прямой BC из ее точки A до пересечения его с прямой EF (рис. 117, a).

Решение. Геометрическим местом перпендикуляров к прямой BC, проведенных из точки A, является пл. P, проходящая через точку A перпендикулярно к прямой BC (рис. 117, $б$). Точка K пересечения этой плоскости с прямой EF является точкой пересечения искомого перпендикуляра с прямой EF.

На рис. 117, *в* задаем плоскость, перпендикулярную к BC, фронталью AM и горизонталью AN. Определяем точку K пересечения прямой EF с этой плоскостью (рис. 117, *г*), заключая EF во фронтально-проецирующую плоскость R (задаем ее следом R_v); $k'a'$ и ka — проекции искомого перпендикуляра.

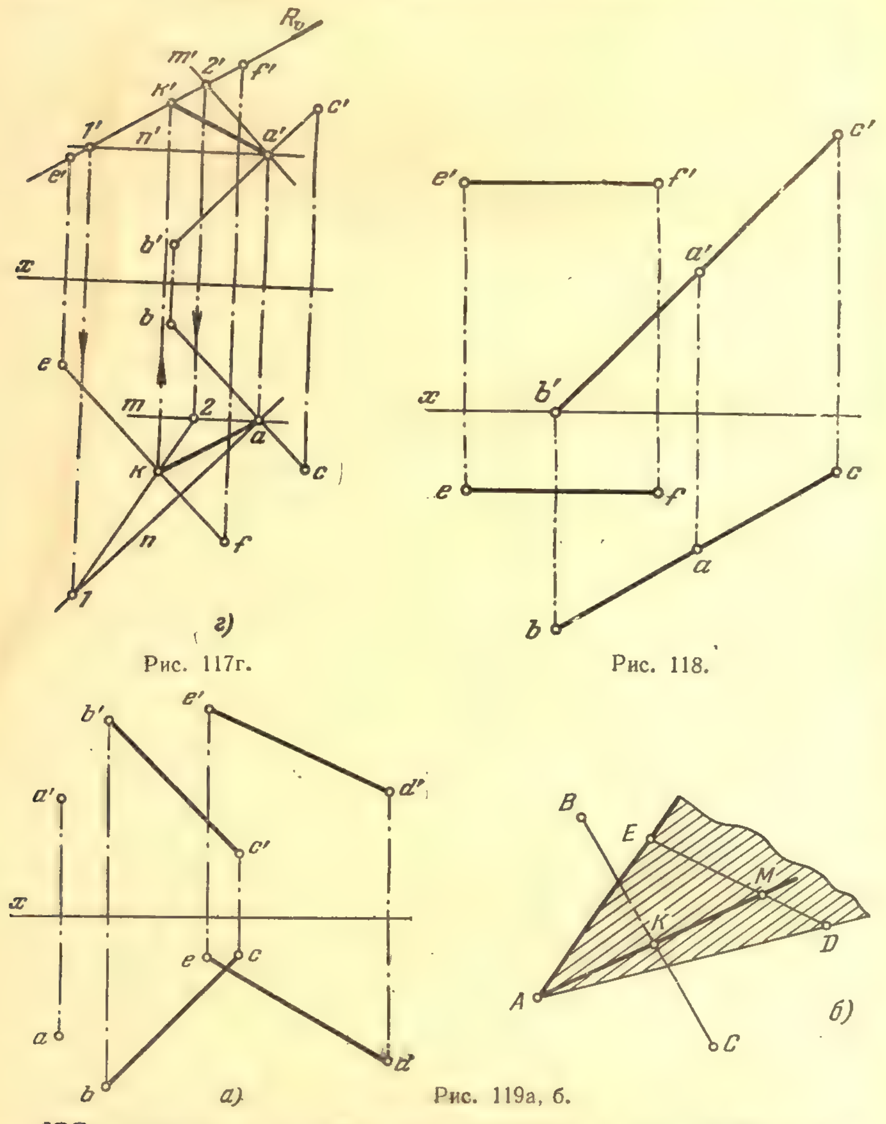


Рис. 117г.

Рис. 118.

Рис. 119а, б.

120. Из точки A провести перпендикуляр к прямой BC до пересечения его с прямой EF (рис. 118).

121*. Через точку A провести прямую, пересекающую прямые BC и ED (рис. 119, *а*).

Решение. Геометрическим местом прямых, проходящих через точку A и пересекающих прямую ED, является плоскость, задаваемая этими элементами (рис. 119, *б*). Если построить такую плоскость и найти точку K ее пересечения со второй прямой (BC), то искомая прямая пройдет через точки A и K. Такое построение выполнено на рис. 119, *в* и 119, *г*, где сначала плоскость, определяемая точкой A и прямой ED, выражена треугольником AED, а затем найдена точка K пересечения второй прямой (BC) с плоскостью этого треугольника.

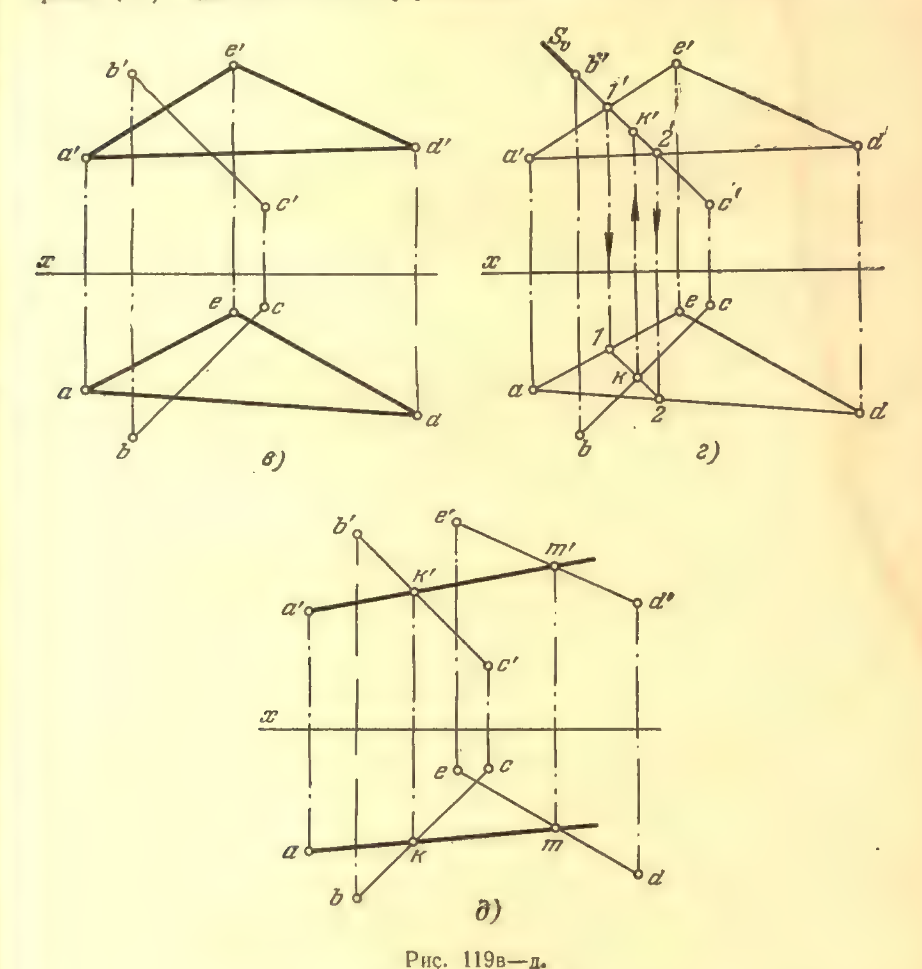


Рис. 119в—д.

Искомая прямая проходит через точки A и K и пересекает прямую ED в точке M (рис. 119, *д*). Конечно, при точном построении проекции m и m' должны оказаться на линии связи $m'm$, перпендикулярной к оси x.

Данную задачу можно решить и иначе: взять две плоскости — одну, определяемую точкой A и прямой ED (как это сделано на рис. 119, *в*), а другую — точкой A и прямой BC. Линия пересечения этих двух плоскостей и будет искомой прямой, проходящей через точку A и пересекающей BC и ED.

122. Через точку A провести прямую, пересекающую:
а) ребро SD и сторону BC основания пирамиды $SBCD$ (рис. 120, *а*),
б) ребро BG и сторону EF верхнего основания призмы (рис. 120, *б*).

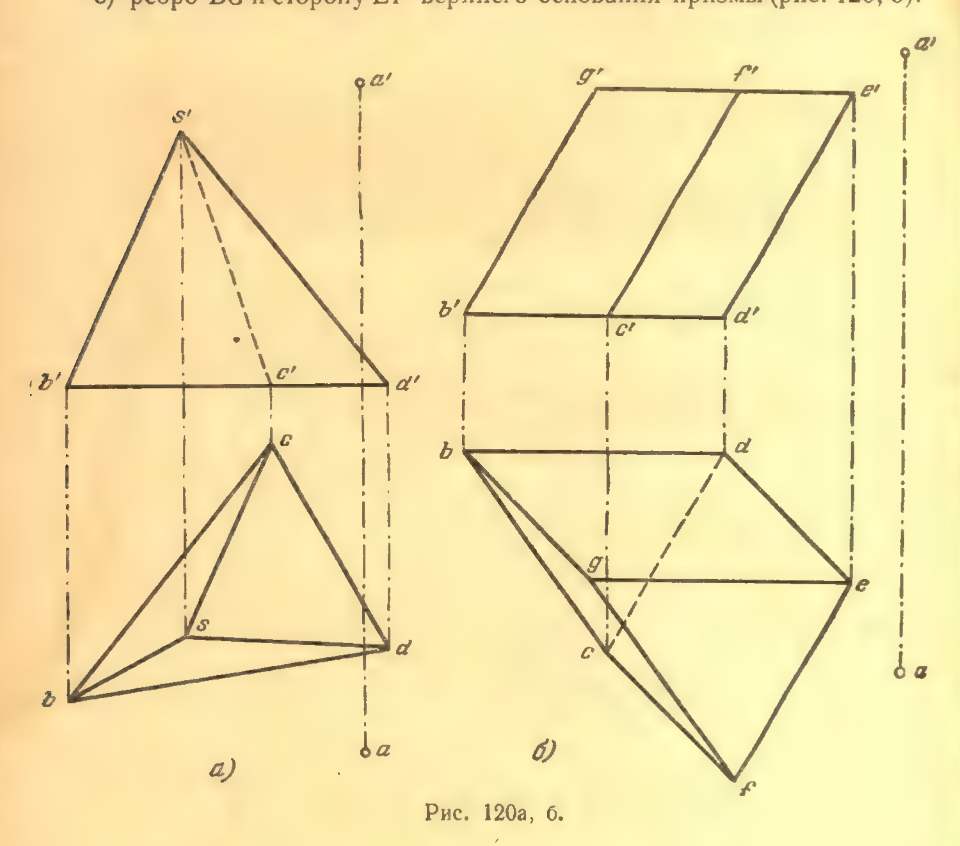


Рис. 120а, б.

123*. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B (рис. 121, *а*).

Решение. Искомым геометрическим местом является плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно к нему.

Делим проекции отрезка AB пополам (рис. 121, *б*). Через середину (точку C) проводим горизонталь $CD \perp AB$ и фронталь $CE \perp AB$ (рис. 121, *в*) искомой плоскости. Чтобы выразить эту плоскость следами, надо задаться осью проекций и построить хотя бы фронт. след горизонтали (точка N, рис. 121, *г*) и через него провести соответствующий след пл. P. След $P_v \perp a'b'$, а след $P_h \perp ab$ (или $\parallel nc$).

124. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B (рис. 122, *а* и *б*). В первом случае ответ дать без следов, а во втором — в следах.

125*. Построить недостающую проекцию точки K, равноудаленной от точек A и B (рис. 123, *а*).

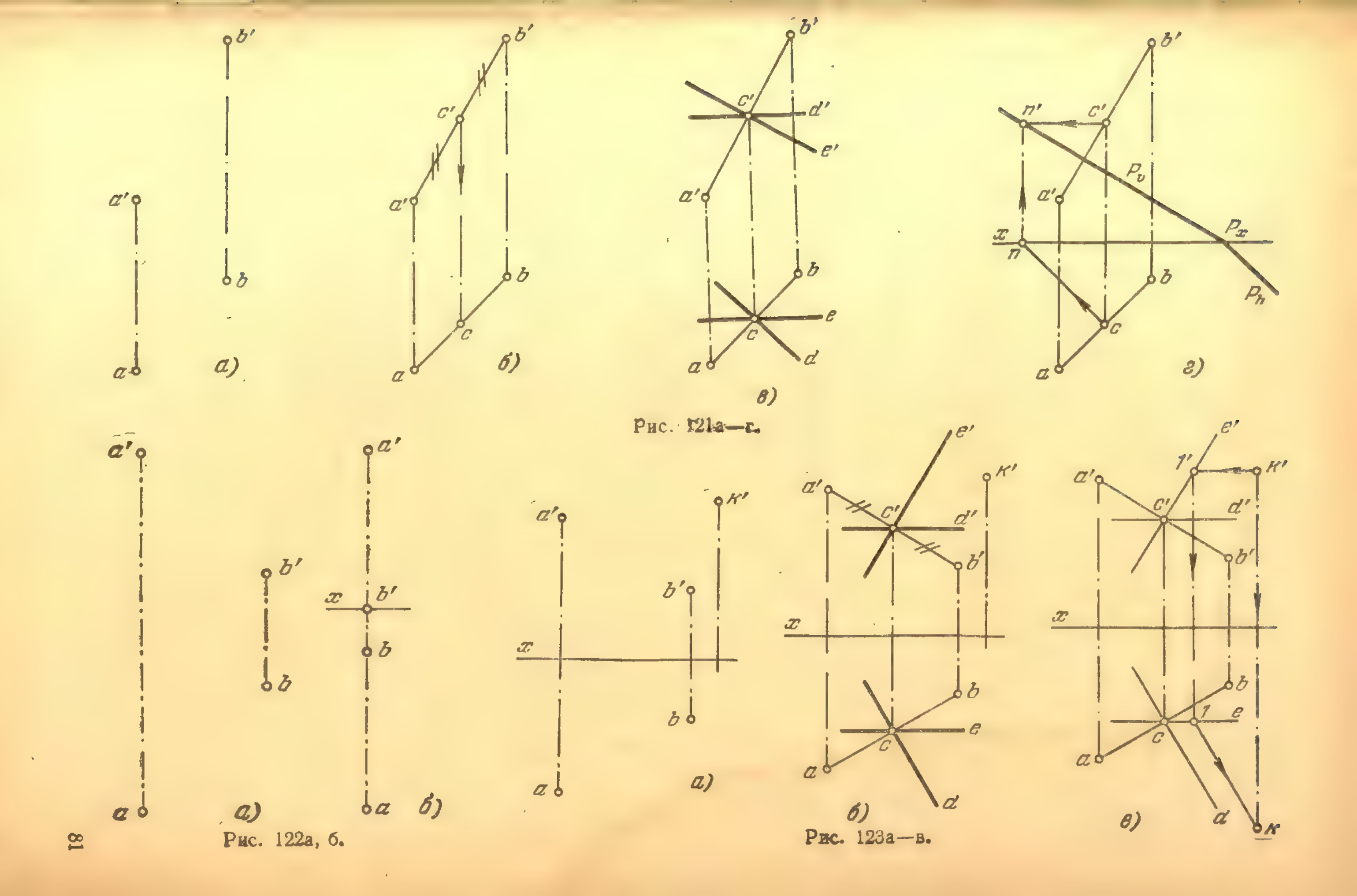


Рис. 121а—г.

Рис. 122а, б.

Рис. 123а—в.

Решение. Так как геометрическим местом всех точек пространства, равноудаленных от точек A и B, является плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно к нему, то точка K должна принадлежать этой плоскости.

На рис. 123, *б* такая плоскость определена фронталью CE и горизонталью CD, проходящими через середину отрезка AB.

Проводим (рис. 123, *в*) через k' фронт. проекцию $k'1'$ горизонтали плоскости и строим ее горизонт. проекцию, на которой отметим точку k — искомую проекцию точки K.

126. Построить недостающую проекцию отрезка CD, каждая точка которого равноудалена от точек A и B (рис. 124).

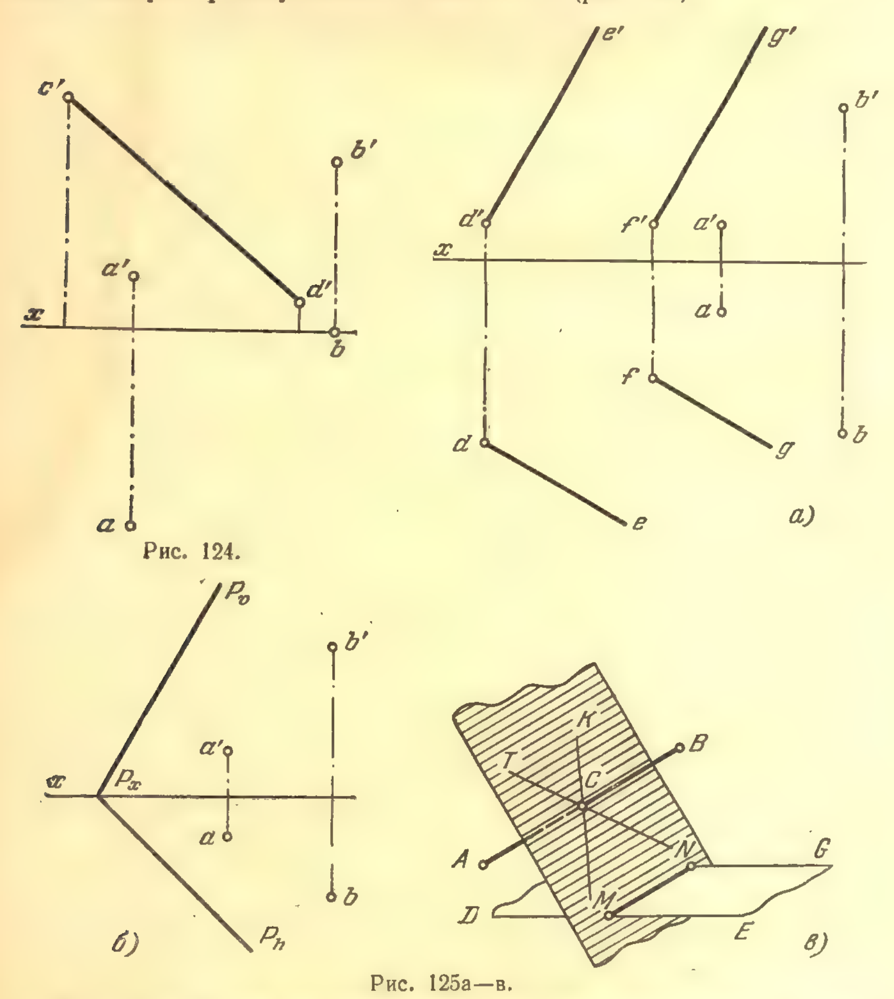


Рис. 124.

Рис. 125а—в.

127*. Построить на плоскости геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B: а) плоскость задана параллельными прямыми (рис. 125, *а*); б) плоскость задана следами (рис. 125, *б*).

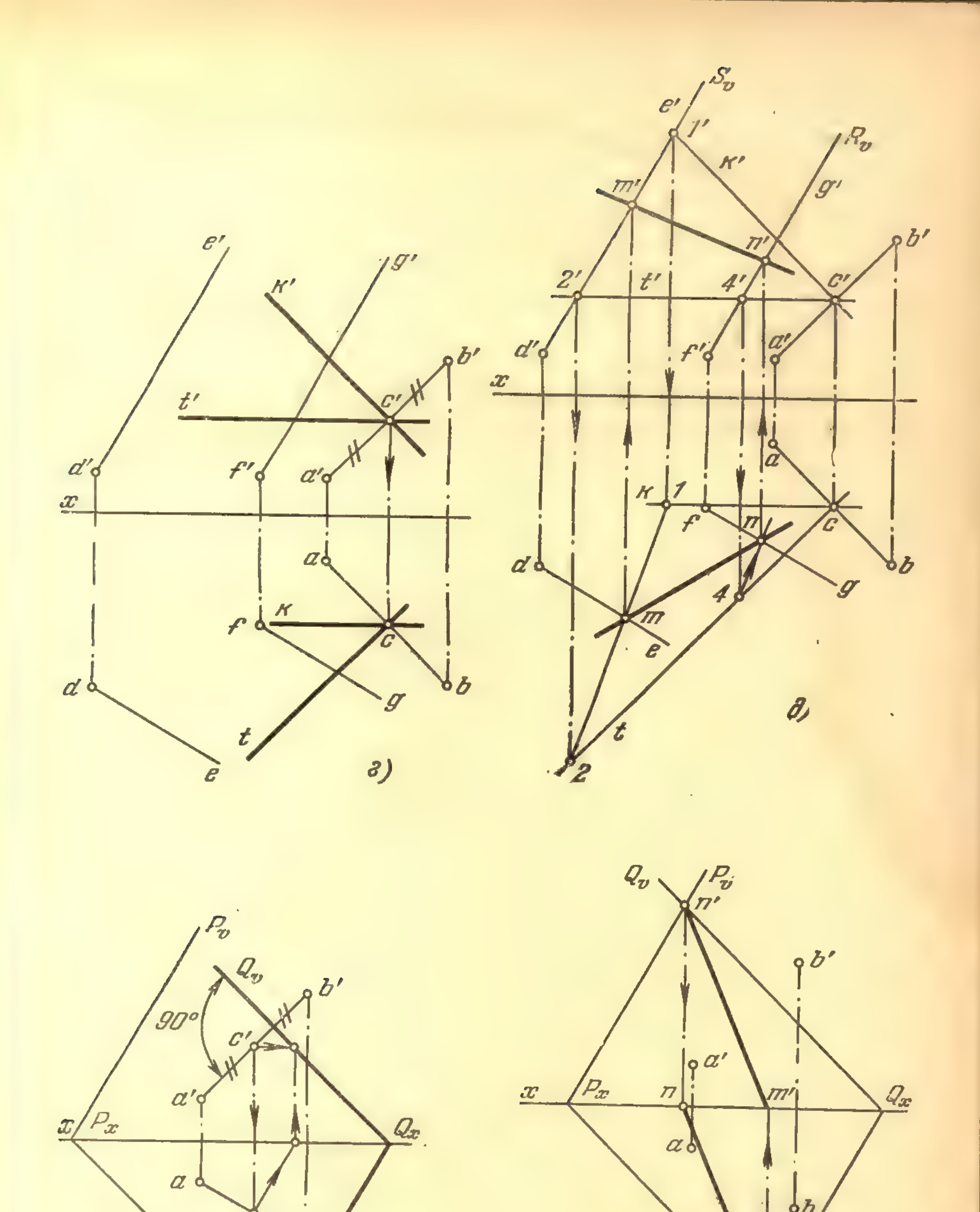


Рис. 125г—ж.

Р е ш е н и е. Так как геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A и B, является плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 125, *в*), то искомым геометрическим местом будет линия пересечения этой плоскости с заданной (прямая MN).

На рис. 125, *г* плоскость, перпендикулярная к отрезку AB в его середине, выражена фронталью KC и горизонталью TC.

Теперь надо найти линию пересечения двух плоскостей, что сделано путем нахождения точек пересечения прямых DE и FG (рис. 125, *д*), определяющих заданную плоскость, с плоскостью, выраженной горизонталью TC и фронталью KC (см. задачу 86).

На рис. 125, *е* плоскость Q, перпендикулярная к отрезку AB в его середине, выражена следами. Находим точки M и N пересечения одноименных следов плоскостей P и Q и проводим через них искомую прямую MN (рис. 125, *ж*).

128. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B:

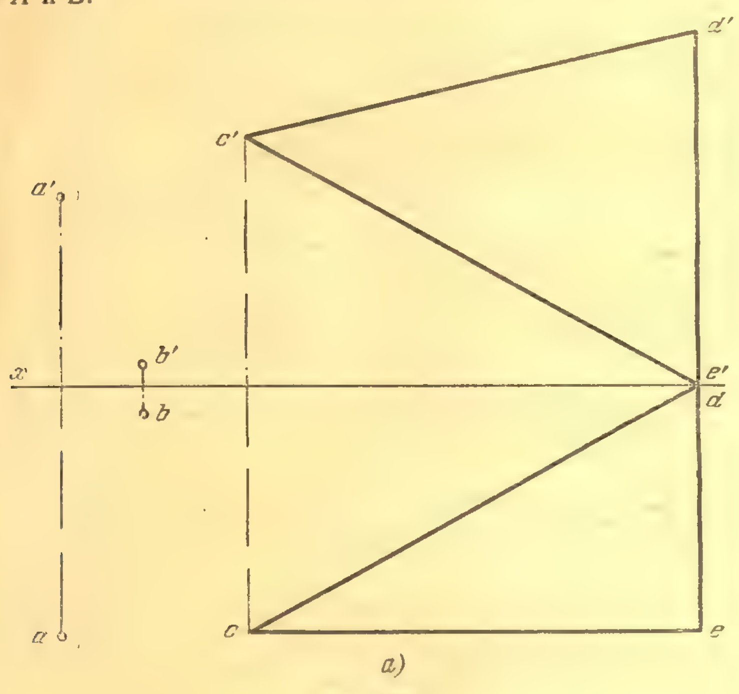


Рис. 126а.

а) на плоскости, заданной треугольником CDE (рис. 126, *а*);

б) на пл. P (рис. 126, *б*).

129*. Дана плоскость треугольника CDE и прямая AB (рис. 127, *а*). Провести в этой плоскости прямую, пересекающую AB под прямым углом.

Р е ш е н и е. Искомая прямая получится (рис. 127, *б*) как линия пересечения плоскости треугольника (P) с пл. Q, перпендикулярной к AB и проходящей через точку (K) пересечения AB с заданной плоскостью.

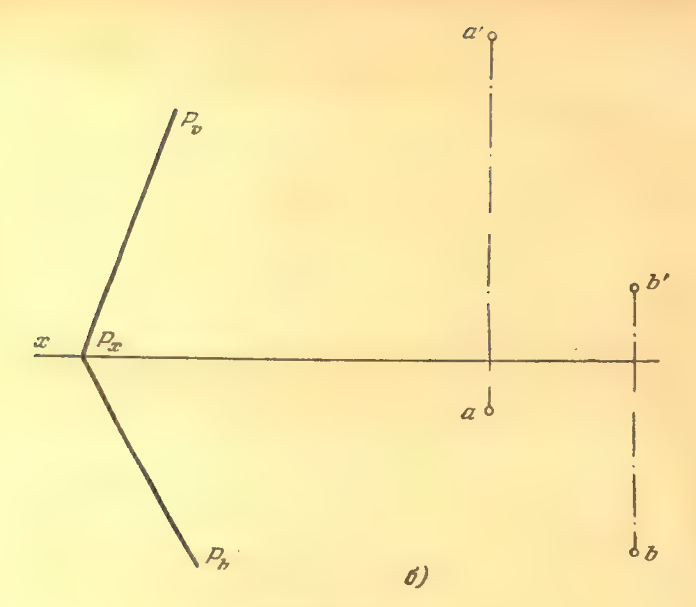


Рис. 126б.

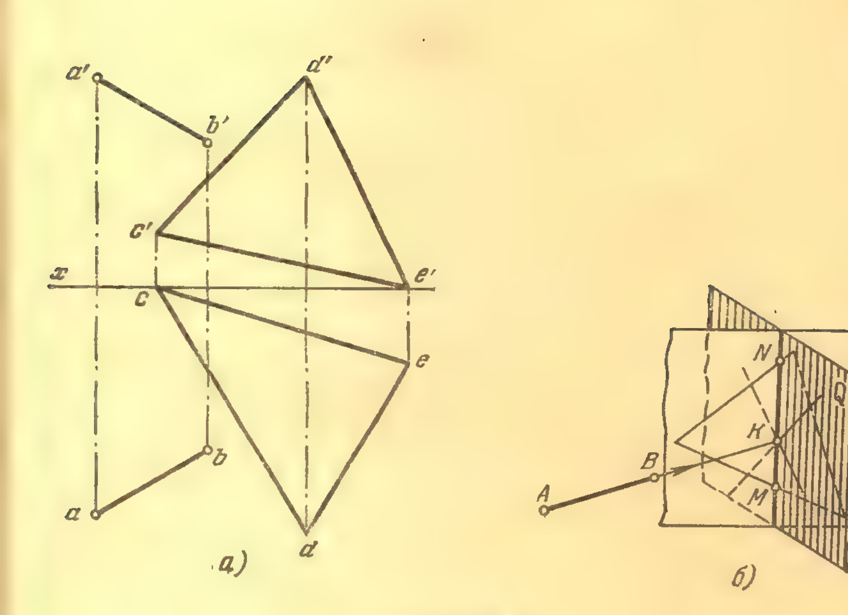
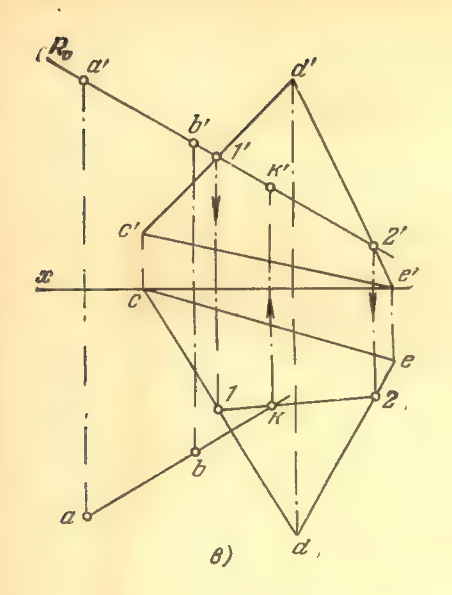
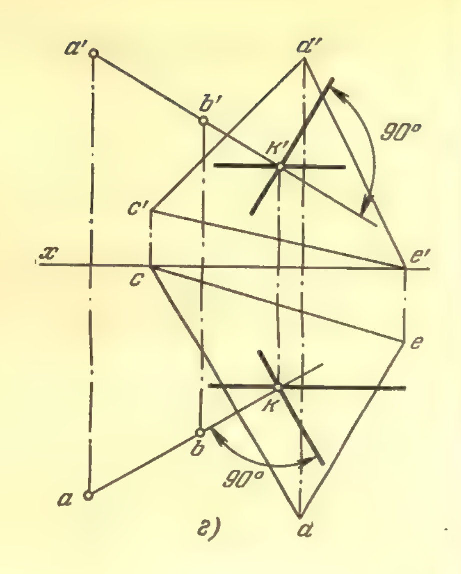


Рис. 127а, б.





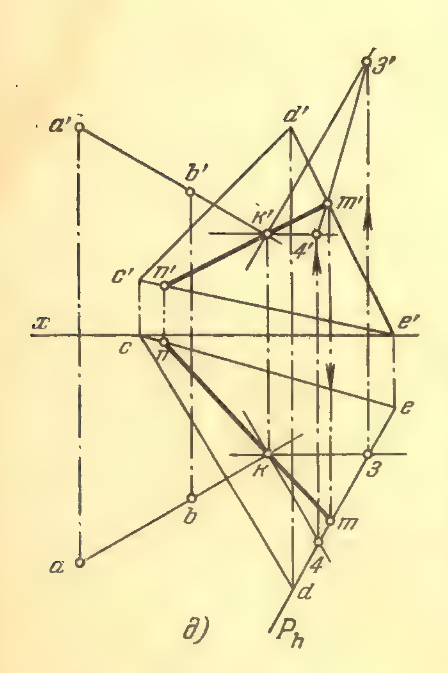


Рис. 127в—д.

Поэтому находим (рис. 127, *в*) точку *K* пересечения прямой *AB* с плоскостью треугольника *CDE*. В качестве вспомогательной плоскости взята фронтально-проецирующая плоскость *R*, проведенная через прямую *AB*. Найдя проекции *k* и *k'*, проводим через них проекции горизонтали и фронтали плоскости, перпендикулярной к *AB* (рис. 127, *г*). Для построения искомой линии пересечения плоскостей находим (рис. 127, *д*) точку (*m'*; *m*) пересечения стороны треугольника *ED* с проведенной через точку *K* плоскостью. Прямая *MK* (*m'k'*; *mk*) является искомой прямой.

130. Дана прямая AB и плоскость, заданная параллельными прямыми CD и EF. Провести в этой плоскости прямую, пересекающую прямую AB под прямым углом (рис. 128).

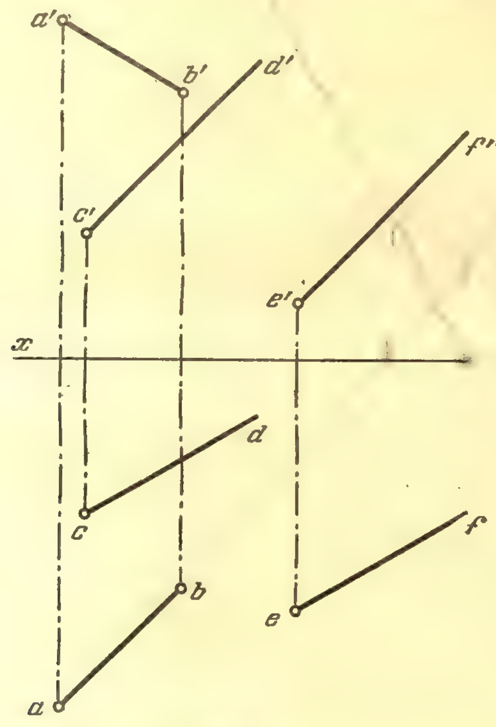


Рис. 128.

131. Дана прямая AB и пл. P. Провести в этой плоскости прямую, пересекающую прямую AB под прямым углом (рис. 129).

132*. Даны плоскость треугольника LMN и прямые AE и FG. Построить параллелограмм, у которого сторона AD лежит на прямой AE, сторона AB параллельна плоскости треугольника, вершина B принадлежит прямой FG, диагональ BD перпендикулярна к стороне AD (рис. 130, *а*).

Решение. Наметим план решения (рис. 130, *б* и *в*).

1. Через точку A провести плоскость (P), параллельную плоскости треугольника LMN.
2. Найти точку пересечения (B) прямой FG с пл. P.
3. Через точку B провести плоскость (Q), перпендикулярную к прямой AE.
4. Найти точку пересечения (D) прямой AE с пл. Q.
5. Провести отрезок AB и параллельно ему прямую через точку D, а через B — прямую, параллельную AD.

На рис. 130, *в* и *г* показано построение пл. P, параллельной плоскости треугольника LMN. Пл. P, проведенная через точку A, задана двумя пересекающимися прямыми $A—1$ и $A—2$, из которых $A—1$ параллельна LM, а $A—2$ параллельна LN.

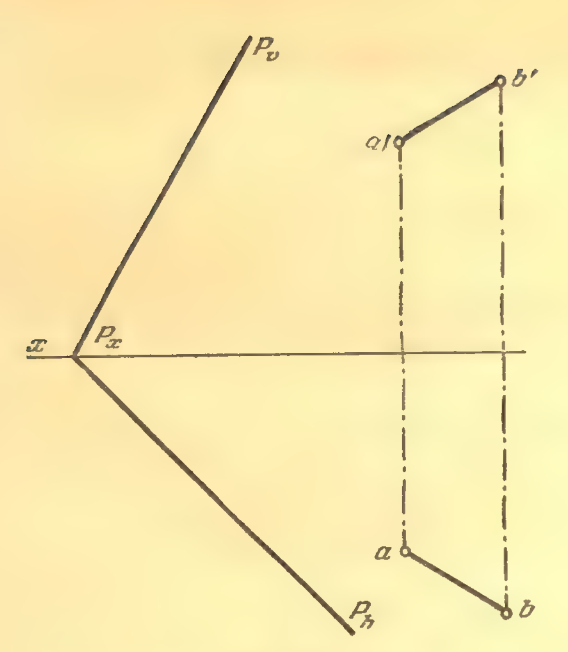
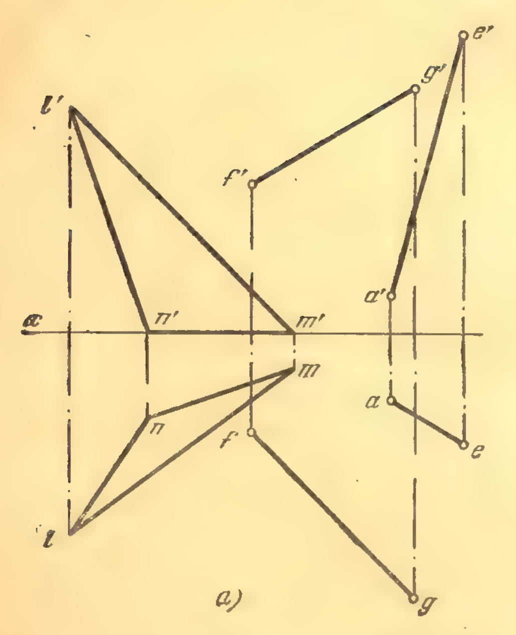


Рис. 129.



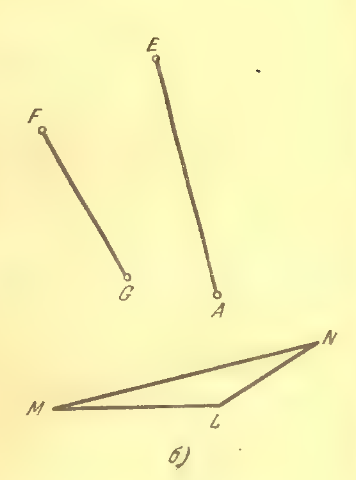


Рис. 130а, б.

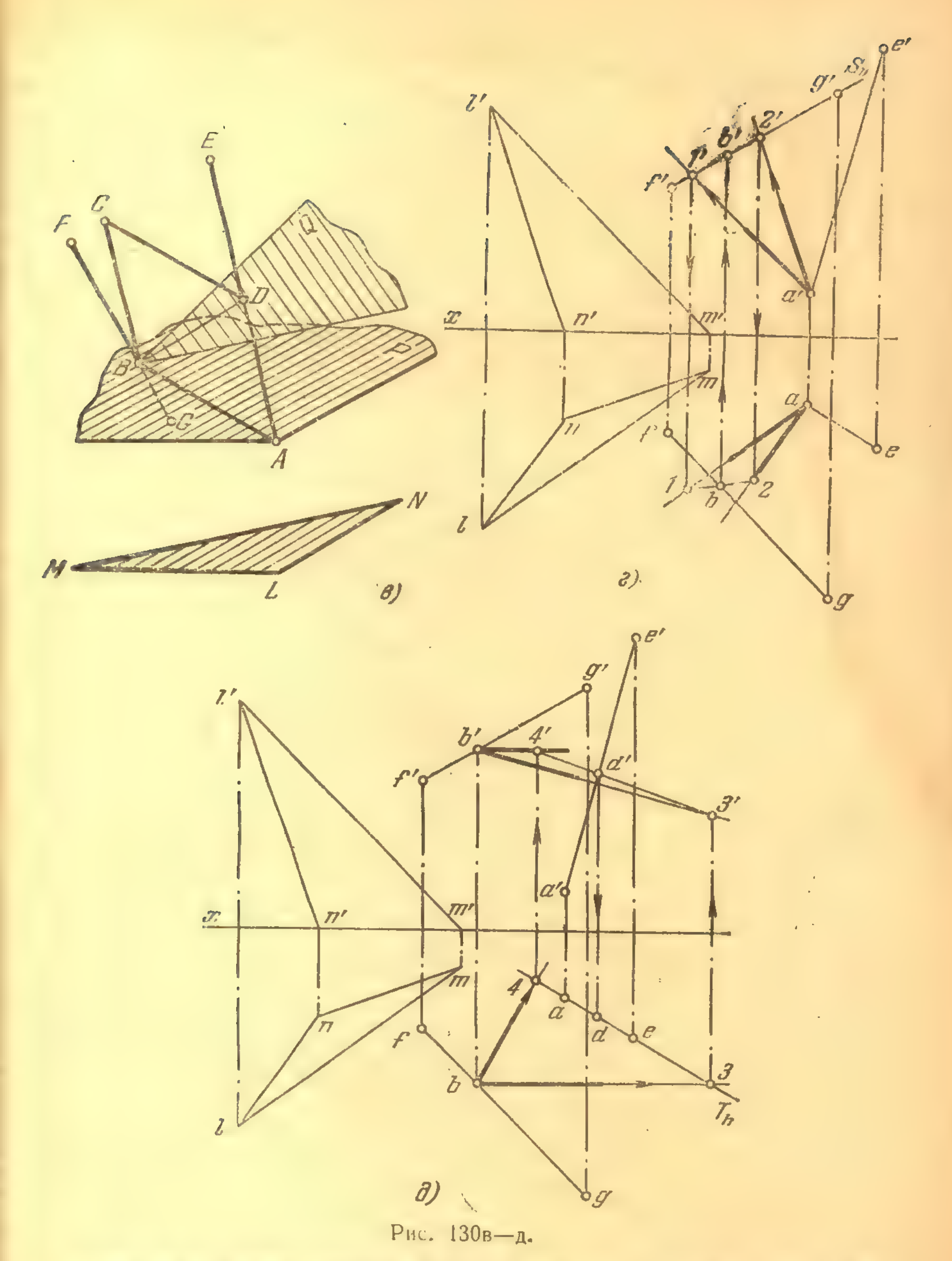


Рис. 130в—д.

На тех же рисунках показано нахождение точки *B* пересечения прямой *FG* с пл. *P*, для чего через *FG* проведена фронтально-проецирующая плоскость *S*, заданная следом S_v. Горизонт. проекция *1—2* линии пересечения плоскостей *P* и *S* пересекает горизонт. проекцию *fg* в точке *b*. По точке *b* находим проекцию *b'* на *f'g'*.

На рис. 130, *д* показано построение пл. *Q*, перпендикулярной к *AE*. Эта плоскость проведена через точку *B* и выражена горизонталью *B—4* и фронталью *B—3*, перпендикулярными к *AE*. На том же чертеже показано построение точки *D*, в которой прямая *AE* пересекает пл. *Q*, выраженную горизонталью *B—4* и фронталью *B—3*.

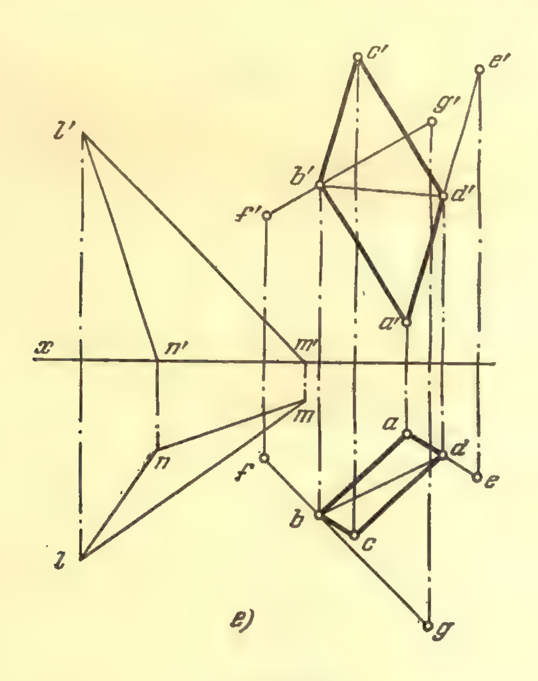


Рис. 130е.

Через *AE* проведена горизонтально-проецирующая плоскость *T*, выраженная ее следом T_h, построены проекции *3—4* и *3'4'* линии пересечения плоскостей *T* и *Q* и проекции *d'* и *d*.

На рис. 130, *е* показано построение искомого параллелограмма, для чего проведены проекции *a'b'* и *ab*, *a'd'* и *ad* двух сторон параллелограмма, а затем $b'c' \parallel a'd'$; $bc \parallel ad$; $d'c' \parallel a'b'$ и $dc \parallel ab$. Точки *c'* и *c* должны оказаться на линии связи *cc'*, перпендикулярной к оси *x*.

133. Даны треугольник *LMN* и прямые *AE* и *FG*. Построить параллелограмм, у которого сторона *AD* лежит на прямой *AE*, сторона *AB* параллельна плоскости треугольника, вершина *B* принадлежит прямой *FG*, диагональ *BD* перпендикулярна к стороне *AD* (рис. 131).

134*. Через точку *A* провести прямую, параллельную пл. *P* и плоскости треугольника *CDE* (рис. 132, *a*).

Рис. 131.

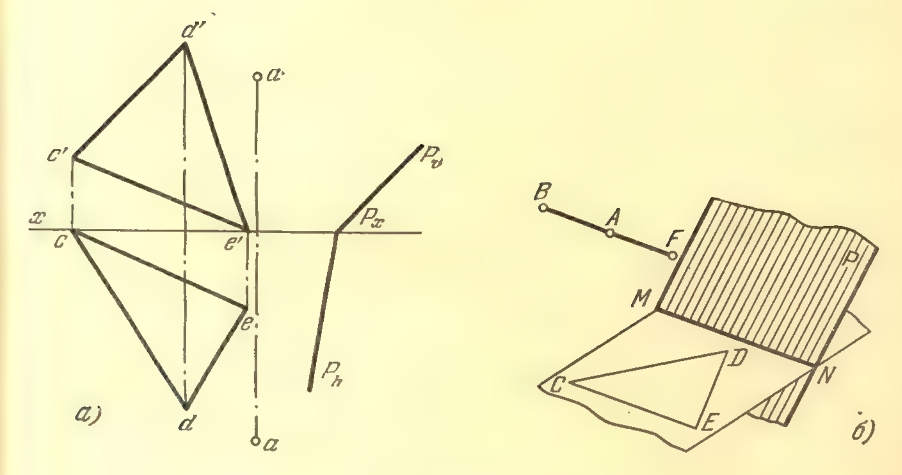


Рис. 132а, б.

Решение. Если искомая прямая должна быть одновременно параллельна двум плоскостям, то она должна быть параллельна линии пересечения этих плоскостей

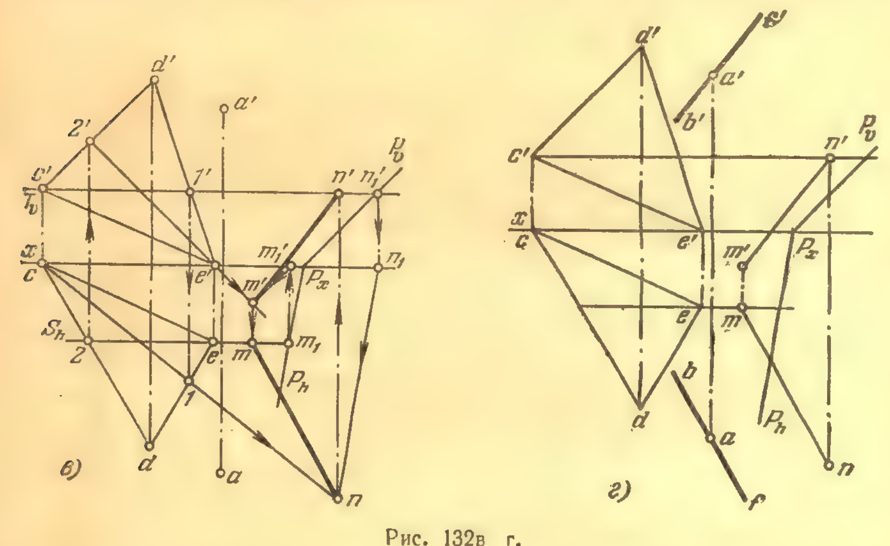


Рис. 132в г.

(рис. 132, *б*). Вводя две вспомогательные плоскости T и S, находим линию пересечения MN плоскостей (рис. 132, *в*). Проекции искомой прямой $b'f'$ и bf проходят через a' и a параллельно одноименным с ними проекциям прямой MN (рис. 132, *г*).

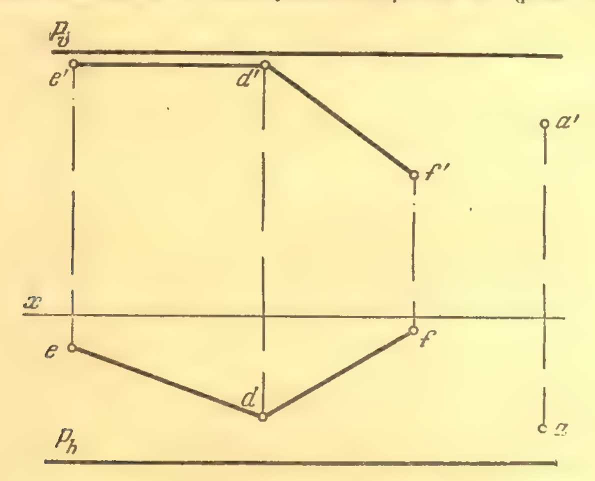


Рис. 133

135. Через точку A провести прямую, параллельную пл. P и плоскости, заданной пересекающимися прямыми DE и DF (рис. 133).

136. Через точку A провести прямую, параллельную пл. P и плоскости, заданной параллельными прямыми DE и FG (рис. 134).

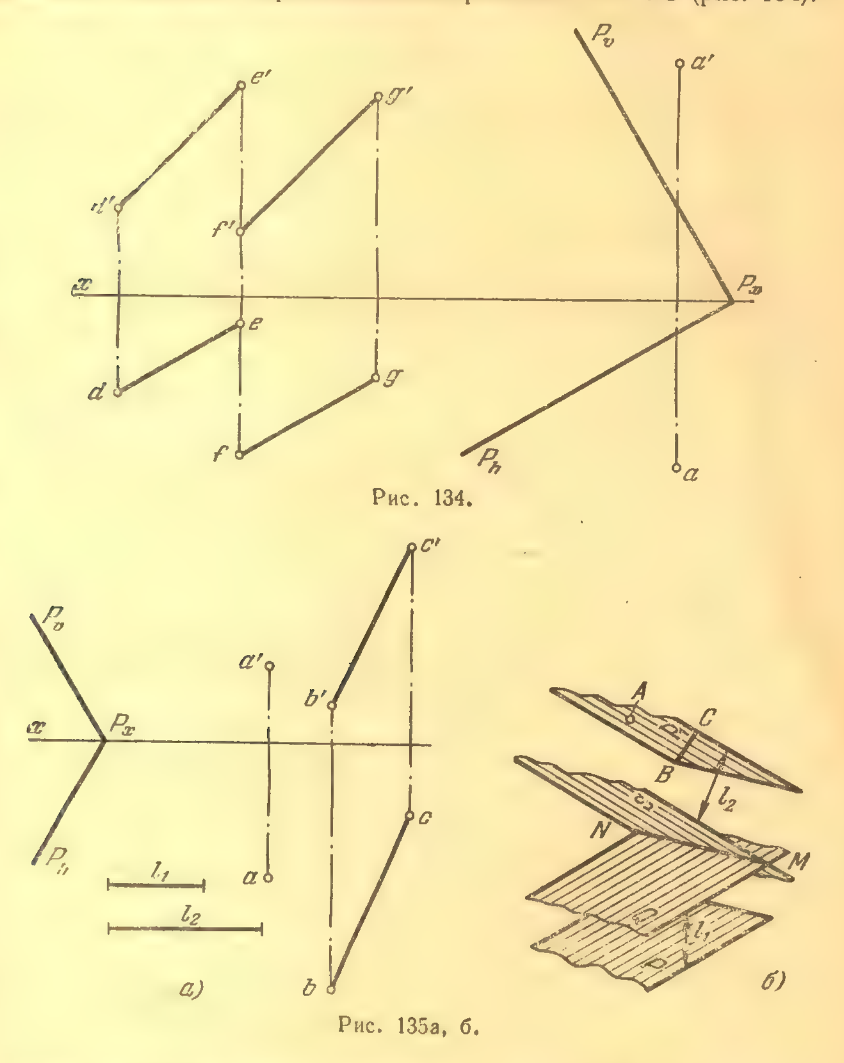


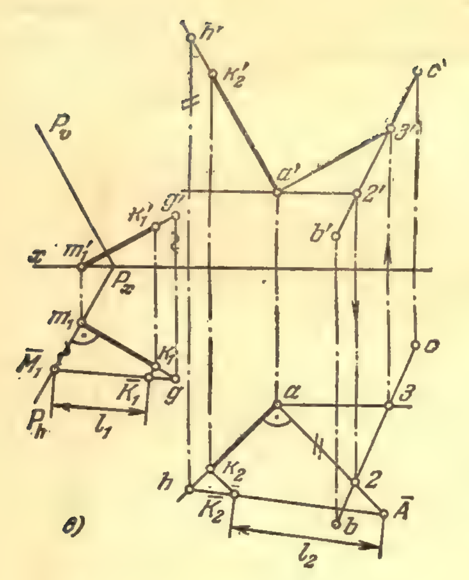
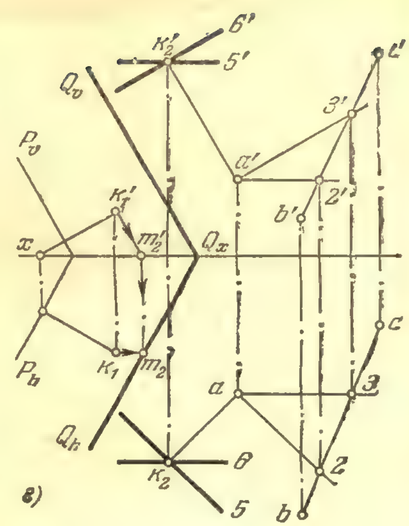
Рис. 134.

Рис. 135а, б.

137*. Провести прямые, каждая из которых отстоит от пл. P на расстояние l_1, а от плоскости, заданной прямой BC и точкой A, на расстояние l_2 (рис. 135, a).

Решение. В основе решения лежит представление о геометрическом месте прямых, отстоящих от данной плоскости на определенное расстояние, т. е. от плоскости параллельной данной.

Искомыми прямыми являются линии MN пересечения двух плоскостей Q, параллельных пл. P и расположенных по обе стороны от нее на расстоянии l_1, с двумя

плоскостями S, параллельными второй из заданных плоскостей и отстоящими от нее на расстояние l_2. Всего таких прямых может быть четыре. На рис. 135, *б* изображена одна из них.

На рис. 135, *в* показано: 1) проведение перпендикуляра к пл. P из взятой в ней точки M_1 и построение точки K_1 на этом перпендикуляре на расстоянии $M_1K_1 = l_1$; 2) проведение перпендикуляра к плоскости, заданной точкой A и прямой BC, из точки A (при помощи горизонтали $A—2$ и фронтали $A—3$) и построение точки K_2 на этом перпендикуляре на расстоянии $AK_2 = l_2$.

На рис. 135, *г* показано проведение через точку K_1 пл. Q параллельно пл. P и через точку K_2 плоскости S, выраженной горизонталью K_2**5** и фронталью K_2**6**, соответственно параллельными горизонтали $A—2$ и фронтали $A—3$, принадлежащими плоскости, заданной точкой A и прямой BC.

На рис. 135, *д* построена линия пересечения пл. Q и плоскости S, выраженной горизонталью K_2**5** и фронталью K_2**6**. Полученная прямая MN параллельна обеим заданным плоскостям.

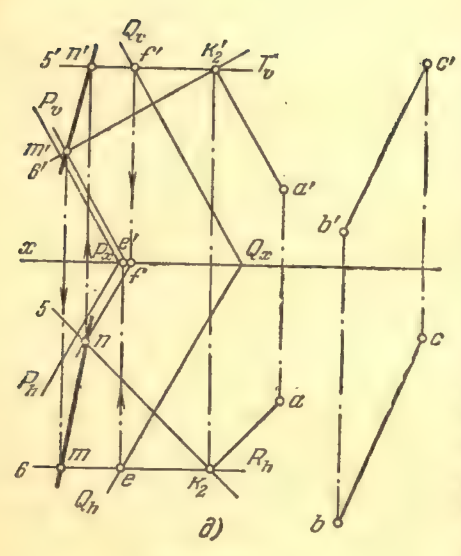


Рис. 135в—д.

138. Провести одну из прямых, отстоящих от пл. P на расстояние l_1 и от плоскости треугольника ABC на расстояние l_2 (рис. 136).

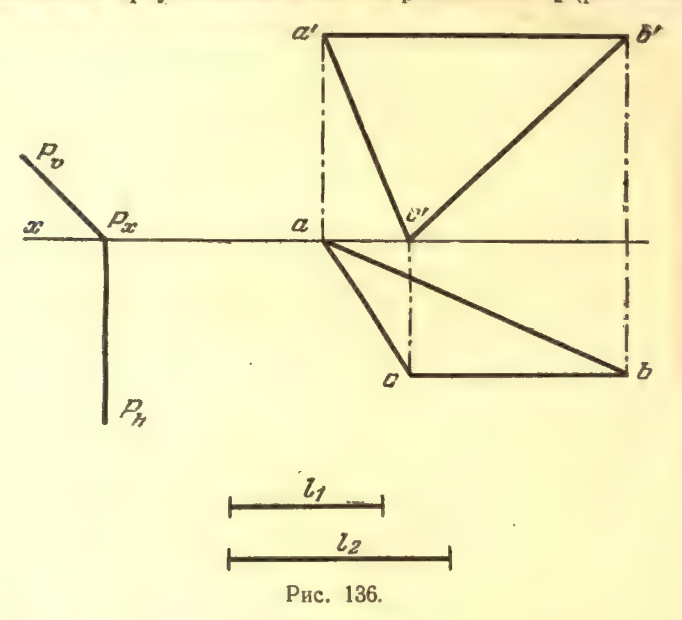


Рис. 136.

139*. Провести прямую, пересекающую заданные прямые AB и CD и параллельную прямой EF (рис. 137, *а*).

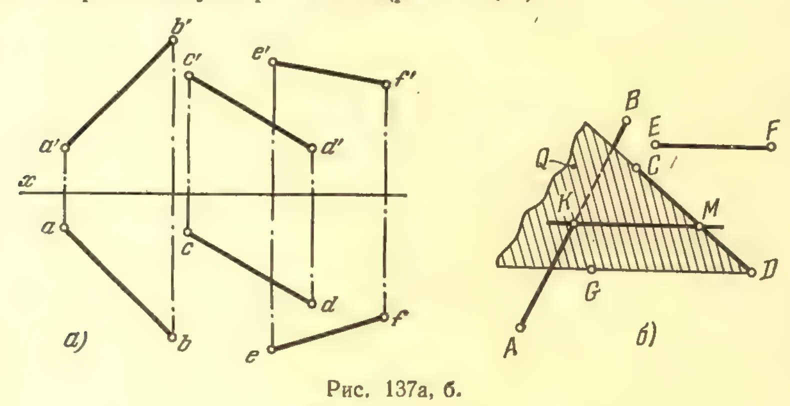


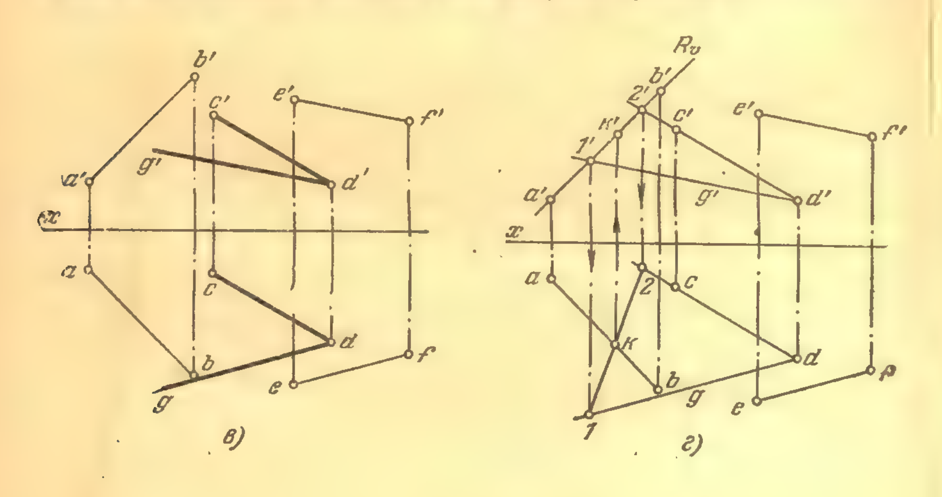
Рис. 137а, б.

Решение. Наметим план решения задачи (рис. 137, *б*).

1. Через прямую CD провести плоскость (Q), параллельную прямой EF.
2. Найти точку (K), в которой прямая AB пересечет пл. Q.
3. Через точку K провести прямую (KM), параллельную заданной прямой EF.

На рис. 137, *в* показано построение пл. Q, проходящей через прямую CD и параллельной прямой EF. Пл. Q выражена прямой CD и пересекающей ее прямой DG, проведенной через точку D параллельно EF.

На рис. 137, *г* показано построение точки K, в которой прямая AB пересекает пл. Q. Прямая AB заключена в фронтально-проецирующую плоскость R, выраженную ее следом R_v. Пл. R пересекает пл. Q по прямой *1—2*. В пересечении *1—2* и *ab* получается проекция k; по точке k находим фронт. проекцию k'.



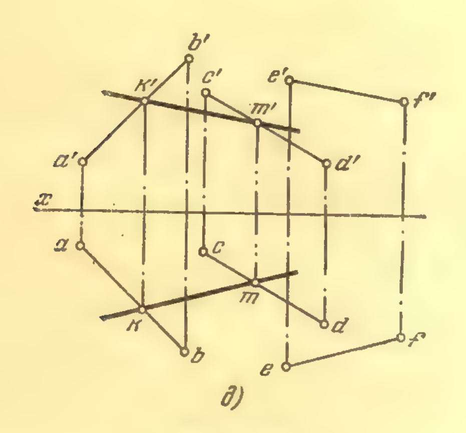


Рис. 137в—д.

Наконец, на рис. 137, *д* показаны проекции km и $k'm'$ искомой прямой: $k'm' \parallel e'f'$ и $km \parallel ef$. Конечно, проекции m' и m должны получиться на линии связи $m'm$, перпендикулярной к оси x.

140. Провести прямую, пересекающую заданные прямые AB и CD и параллельную прямой EF (рис. 138).

141. Провести прямую, пересекающую заданные прямые AB и CD, параллельно прямой EF (рис. 139).

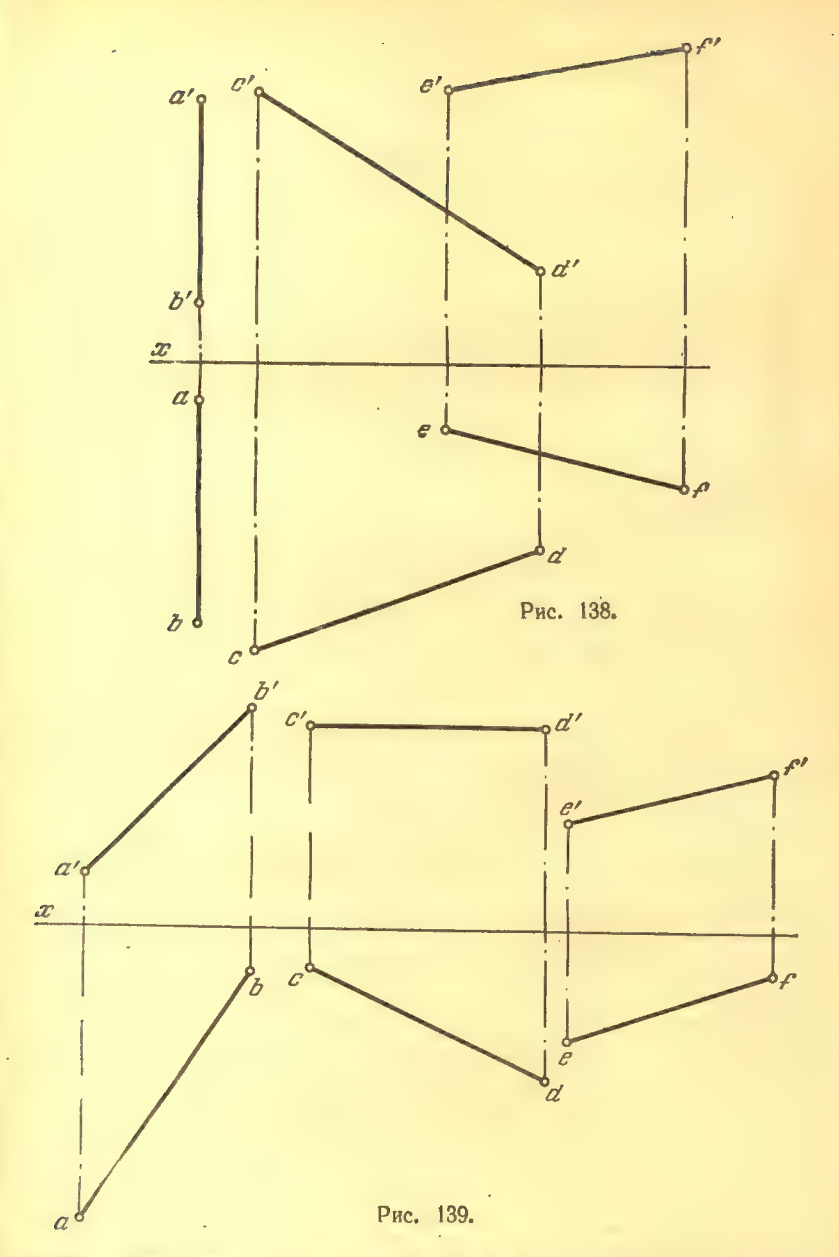


Рис. 138.

Рис. 139.

142*. Даны прямые EF, MN, KL и HI. Построить прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB параллельна прямой EF, вершина A лежит на прямой KL, вершина B — на прямой MN и вершина C — на прямой HI (рис. 140, *а*).

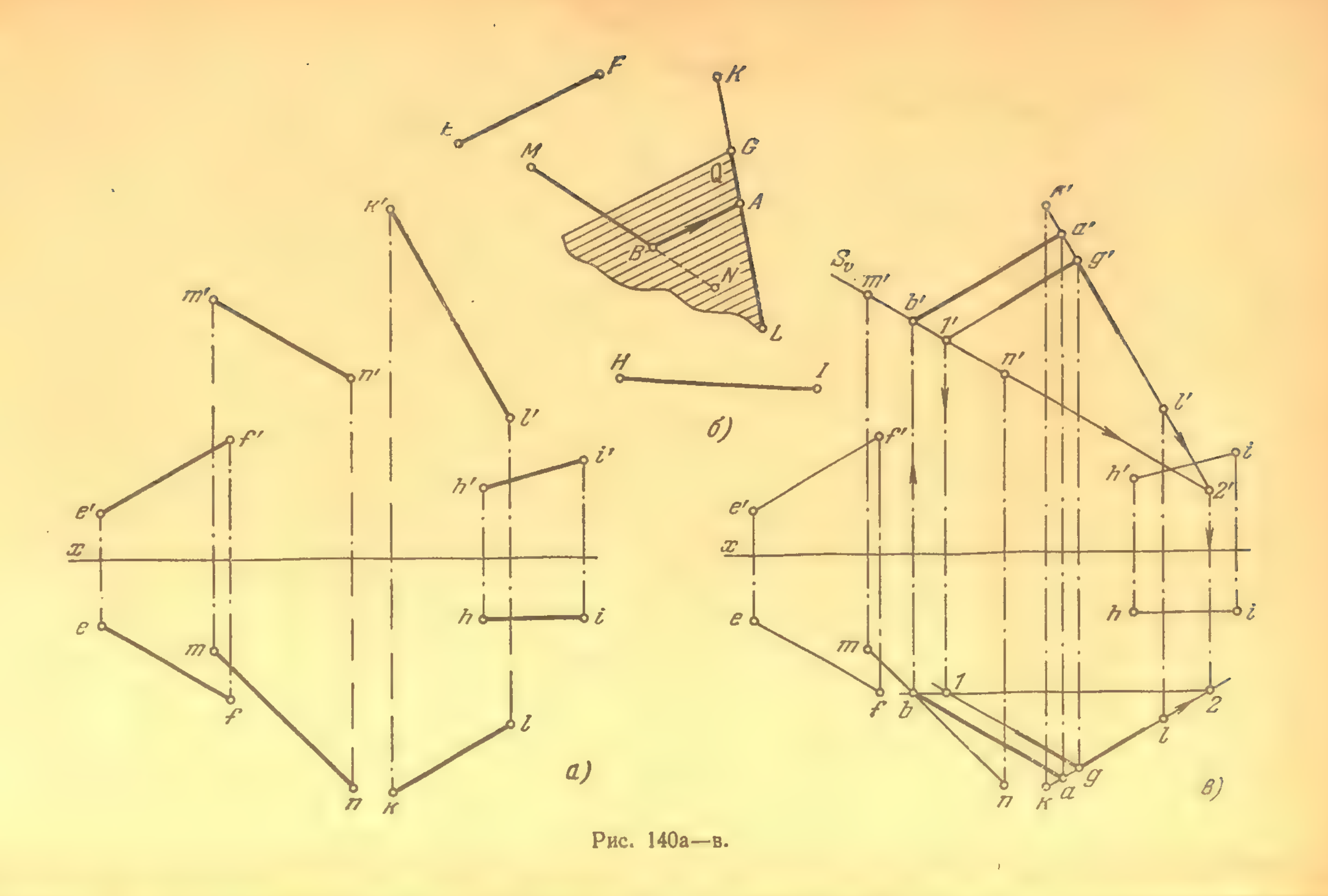


Рис. 140а—в.

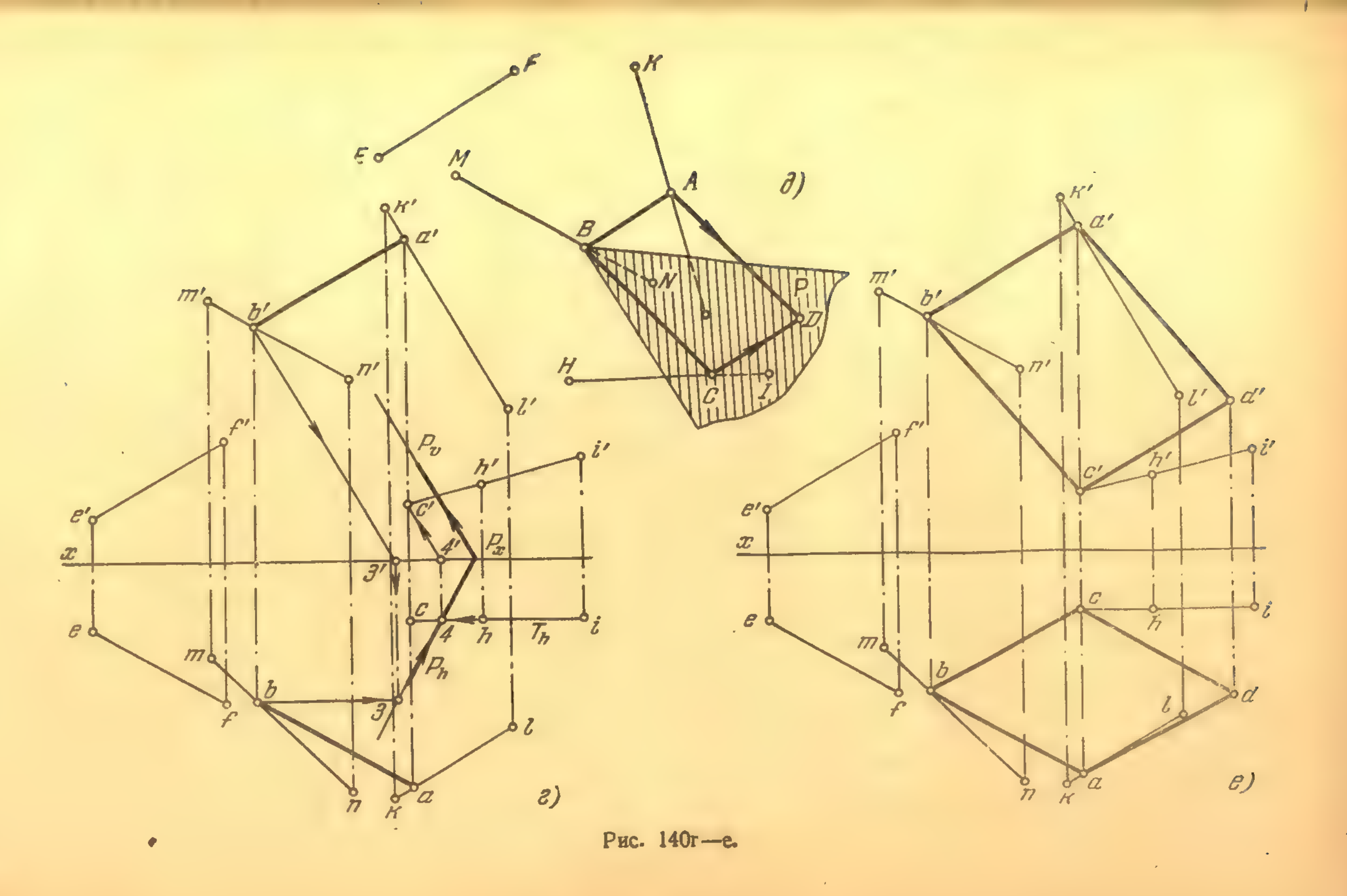

E F M K A B N P D H C I д)
k' a' m' b' n' l' f' h' i' P_v c' e' x 3' 4' P_x c e 4 h T_h i m P_h b 3 f l n k a г)
k' a' m' b' n' l' d' f' c' h' i' e' x c e h i m b d f l n k a е)

Рис. 140г—е.

Решение. Сторона AB должна пересечь KL и MN и быть параллельной EF (см. задачу 139).

Если (рис. 140, *б*) провести хотя бы через точку G, лежащую на KL, прямую, параллельную EF, то получим пл. Q, параллельную EF. Далее надо найти точку B пересечения этой плоскости с прямой MN и через точку B провести в пл. Q прямую, параллельную EF. Эта прямая AB пересекает прямые MN и KL и параллельна EF.

Построение показано на рис. 140, *в*. Так как стороны BC и AB должны быть взаимно перпендикулярны, то проводим (рис. 140, *г* и *д*) через точку B пл. P, перпендикулярную к стороне AB, и строим точку C пересечения ее с прямой HI.

Через точки A и C проводим прямые (рис. 140, *г* и *е*), параллельные прямым BC и AB, до пересечения их в точке D.

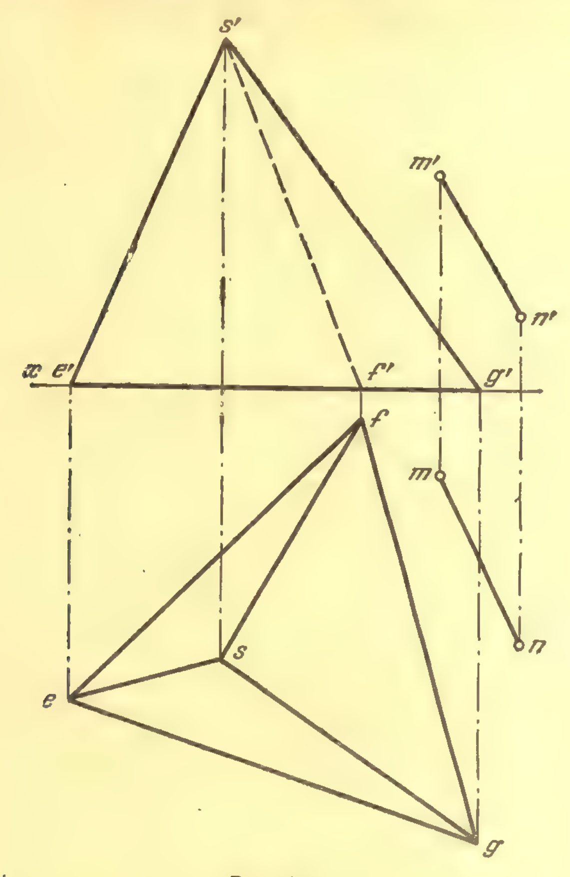


Рис. 141.

143. Даны пирамида $SEFG$ и прямая MN (рис. 141). Построить прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB параллельна прямой MN, вершина A лежит на ребре SF, вершина B — на стороне основания EG, вершина D — на ребре SE.

144. Даны пирамида $SEFG$ и прямая MN (рис. 142). Построить прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB параллельна прямой MN, вершина A лежит на ребре SG, вершина B — на стороне основания EF и вершина D — на ребре SF.

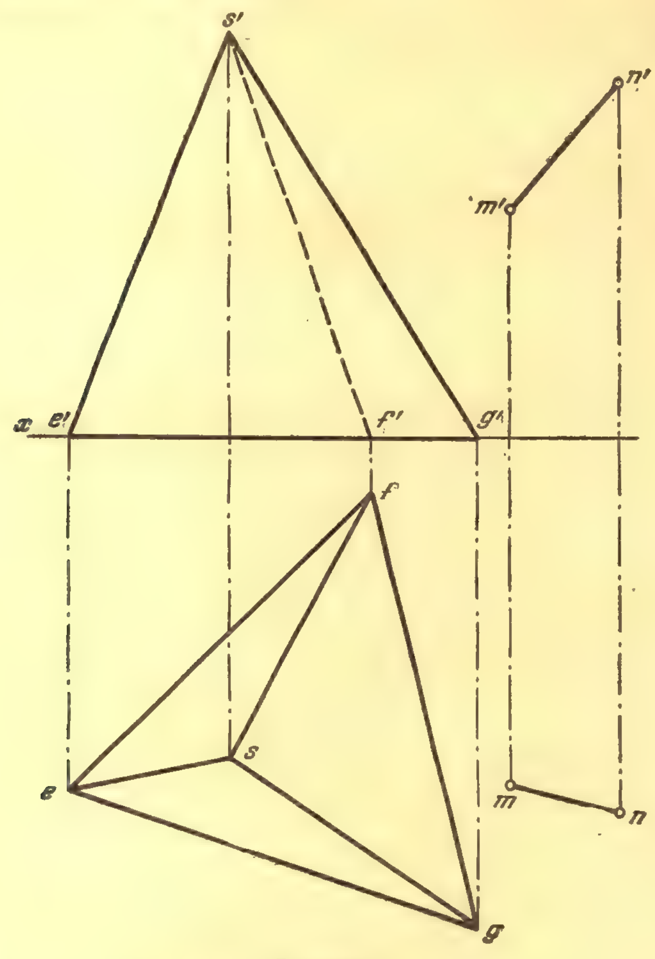


Рис. 142.

145*. Через точку A провести прямую, параллельную плоскости, заданной параллельными прямыми ED и FG, и пересекающую прямую BC (рис. 143, *а*).

Р е ш е н и е. Можно составить следующий план решения задачи (рис. 143, *б*):
1) через точку A провести плоскость (P), параллельную заданной плоскости;
2) найти точку (K) пересечения BC с пл. P;
3) провести искомую прямую AK.

На рис. 143, *в* пл. P, проведенная через точку A, выражена прямой $AM \parallel ED$ ($a'm' \parallel e'd'$, $am \parallel ed$) и горизонталью AN, для проведения горизонт. проекции которой

взята горизонталь $E—1$ в плоскости, заданной прямыми ED и FG ($an \parallel e1$). На рис. 143, г показано построение точки K, в которой заданная прямая BC пересекает пл. P: через BC проведена фронтально-проецирующая плоскость (она выражена

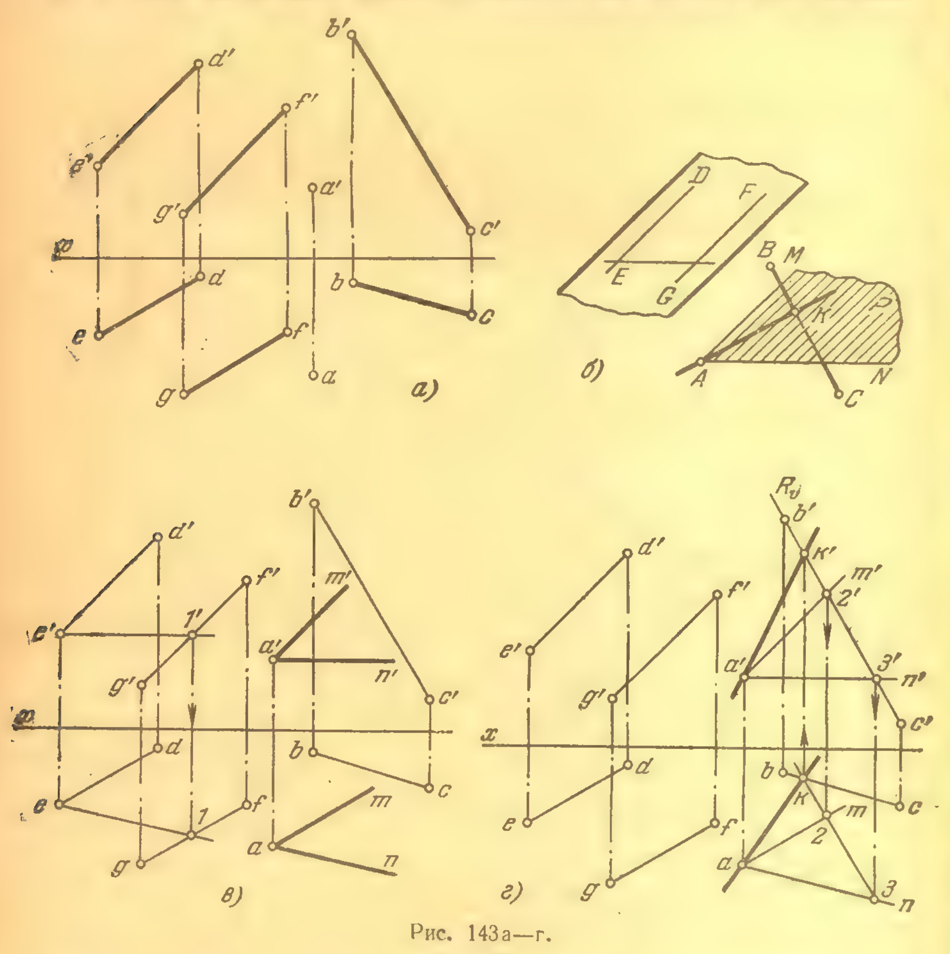


Рис. 143а—г.

следом R_v), построены проекции $2'3'$ и $2—3$ прямой пересечения плоскостей P и R, получена точка k в пересечении прямой $2—3$ и bc. По проекции k найдена проекция k'. Проекции искомой прямой $a'k'$ и ak.

146. Через точку A (рис. 144) провести прямую, параллельную пл. P и пересекающую прямую BC.

147. Через точку A (рис. 145) провести прямую, параллельную плоскости, заданной пересекающимися прямыми DE и DF, и пересекающую прямую BC.

148*. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от заданных точек A, B и C (рис. 146, a).

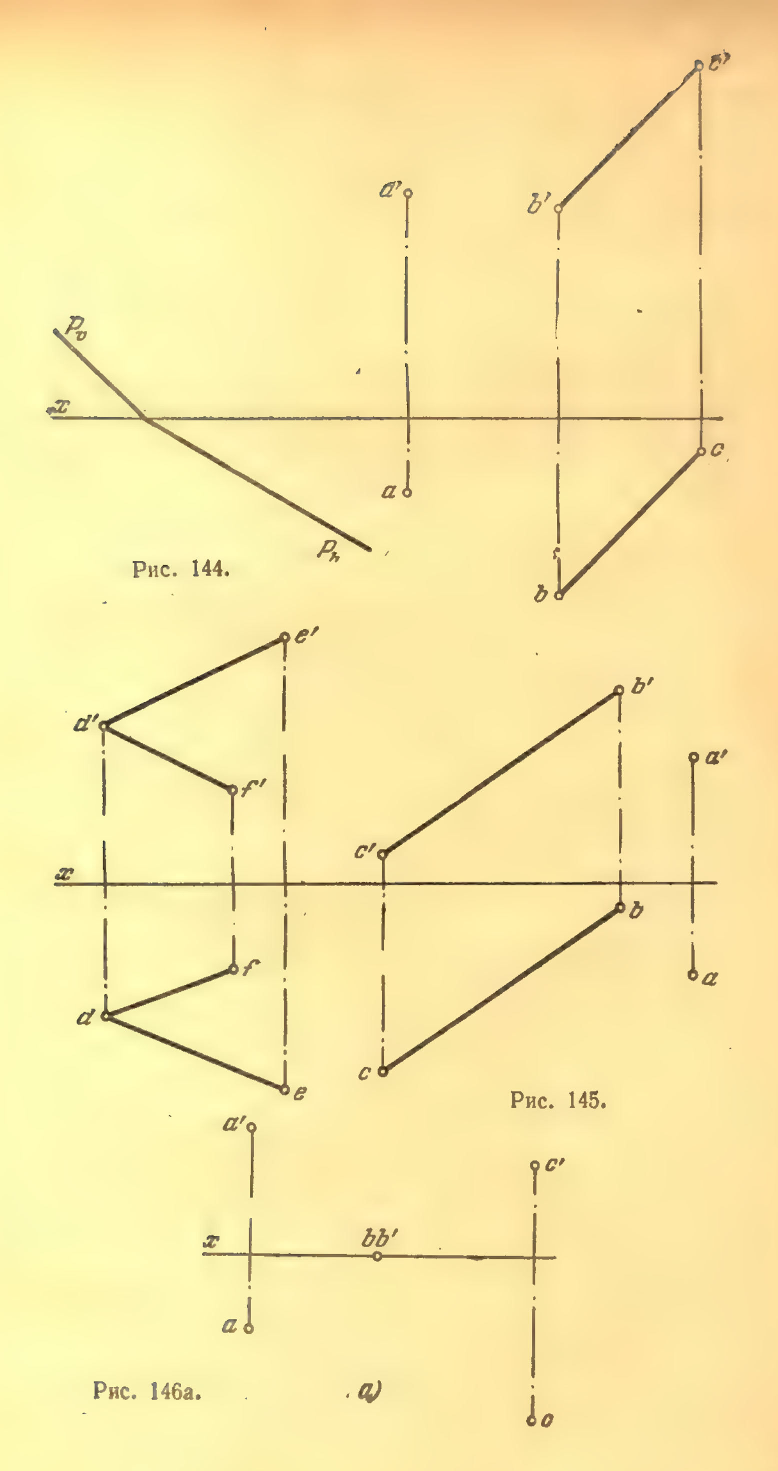


Рис. 144.

Рис. 145.

Рис. 146а.

Решение. Искомым геометрическим местом является линия пересечения MN (рис. 146, *б*) плоскостей P и Q, соответственно перпендикулярных к отрезкам AB и BC и проходящих через точки K_1 и K_2 в серединах этих отрезков. На рис. 146, *в* эти

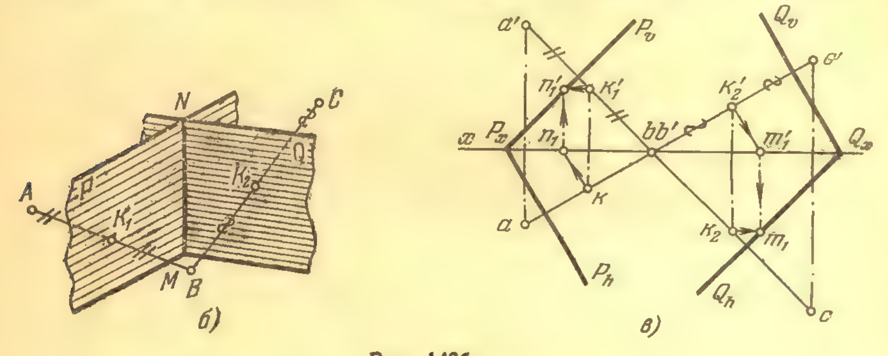


Рис. 146б, в.

плоскости выражены их следами. Используя (рис. 146, *г*) точки пересечения одноименных следов плоскостей, строим линию их пересечения MN.

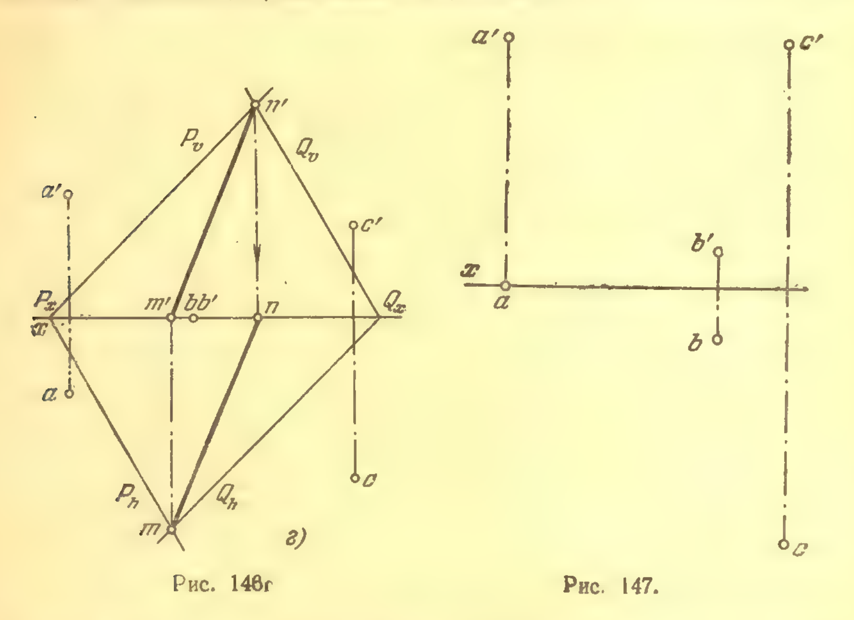


Рис. 146г

Рис. 147.

149. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от заданных точек A, B и C (рис. 147).

150*. Дан треугольник ABC (рис. 148, *а*). Построить пирамиду $SABC$, вершина S которой равноудалена от точек A, B и C. Расстояние от точки S до пл. V в 1,7 раза больше расстояния ее до пл. H.

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, B и C (см. задачу 148*), является линия пересечения MN плоскостей Q и P, проведенных через середины (K_1 и K_2) отрезков AB и BC перпендикулярно к ним (рис. 148, *б* и *в*). Вершина S должна лежать на этой прямой. Геометрическим местом точек, для которых ордината в 1,7 раза больше апликаты, является осевая плоскость T; ее профильный след T_w проходит (рис. 148, *в*) через точку O и точку, расстояние которой до

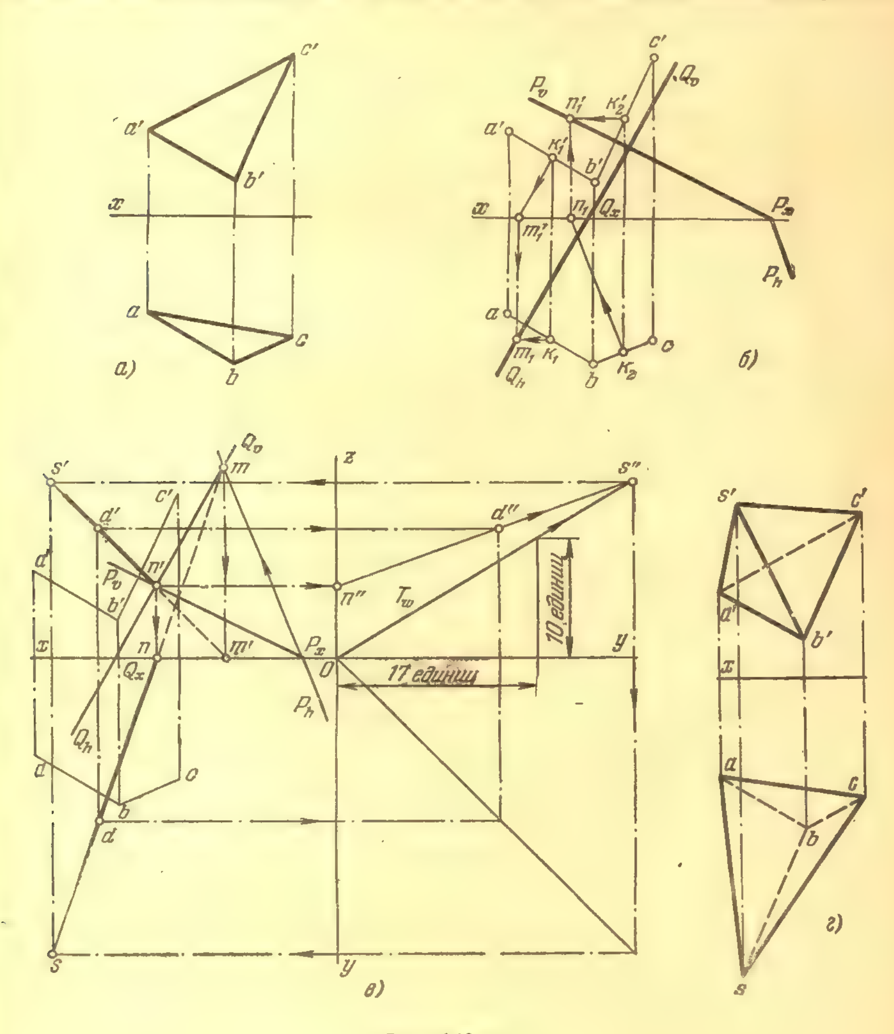


Рис. 148а—г.

оси y равно 10 единицам, а до оси z — 17 единицам. Точка S принадлежит этой плоскости. Профильная проекция s'' вершины пирамиды находится на пересечении $m''n''$ со следом T_w (на рисунке для упрощения чертежа построена профильная проекция точки D, лежащей на прямой MN). По s'' находим s' и s. На рис. 148, *г* показаны проекции искомой пирамиды.

151. Дан треугольник ABC (рис. 149). Построить проекции пирамиды $SABC$, вершина S которой равноудалена от вершин основания ABC и лежит в пл. V.

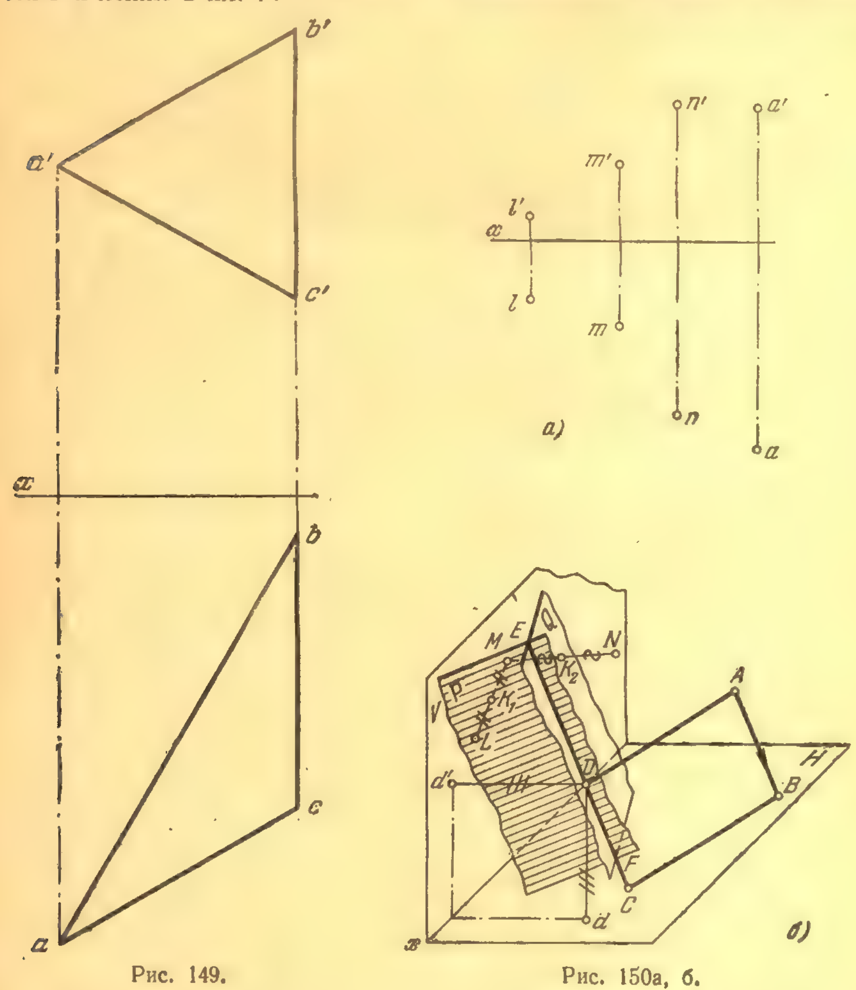


Рис. 149.

Рис. 150а, б.

152*. Даны точки A, L, M и N (рис. 150, a). Построить параллелограмм $ABCD$, у которого вершина B лежит на пл. H, сторона CD — на прямой, равноудаленной от точек L, M и N, вершина D равноудалена от плоскостей V и H.

Решение. Так как сторона CD искомого параллелограмма должна лежать на прямой, равноудаленной от трех точек, то начинаем с построения этой прямой. Подобное построение уже встречалось: прямая EF получается как линия пересечения двух плоскостей (рис. 150, *б* и *в*) P и Q, проведенных перпендикулярно к отрезкам LM и MN через их середины. Точку D на этой прямой находим из условия, что

она равноудалена от пл. V и пл. H (рис. 150, г): проведем через точку f' вспомогательную прямую $f'5$ под тем же углом к оси x, что и прямая $f'e'$, получаем на проекции ef точку d, а по ней d', причем $d'6=d-6$.

Итак, мы получили одну из вершин искомого параллелограмма (точку D) и направление стороны, проходящей через эту точку (прямая EF). Проведя через заданную

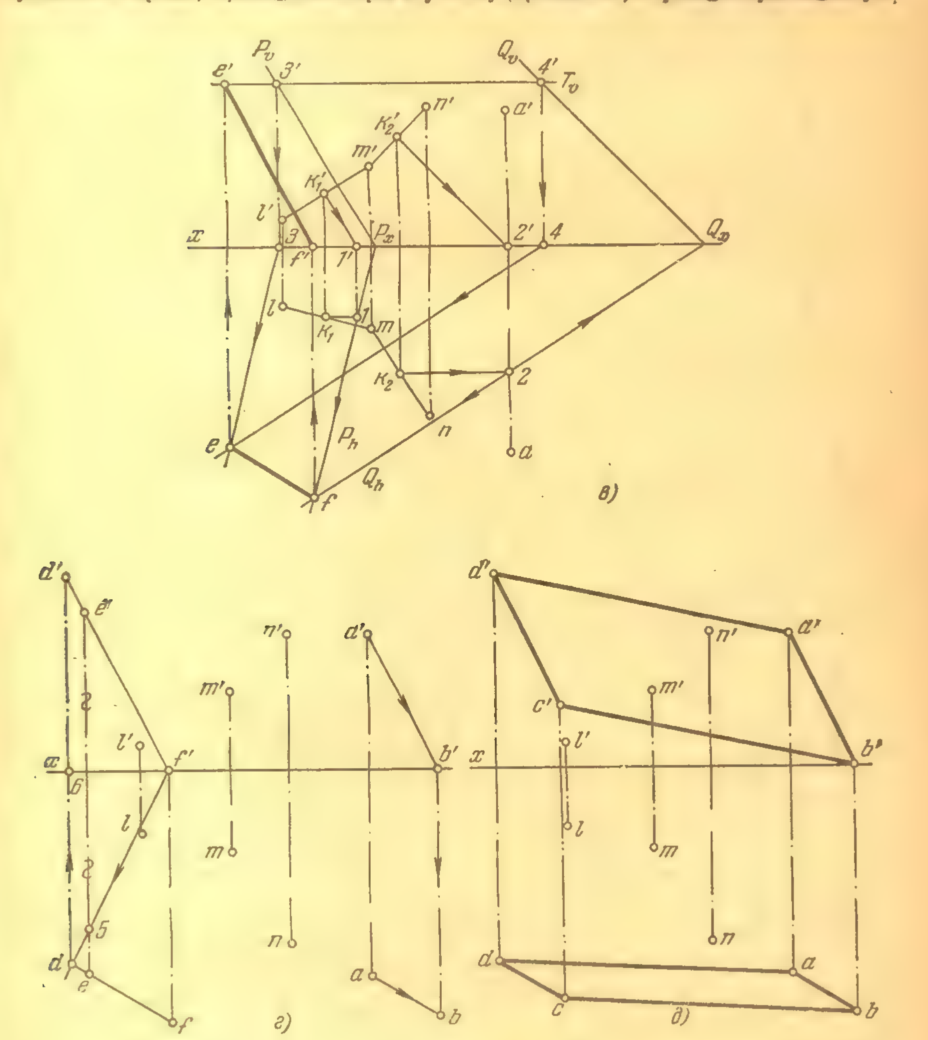


Рис. 150в—д.

точку A прямую, параллельную EF, получаем сторону AB, зная, что по условию точка B должна быть в пл. H.

Остается закончить построение проекций параллелограмма, проведя $a'b'$ и ab (рис. 150, д), $b'c' \parallel a'd'$ и $bc \parallel ad$. Точки c' и c должны оказаться на линии связи $c'c$, перпендикулярной к оси x.

153. Даны точки A, L, M и N (рис. 151). Построить параллелограмм $ABCD$, у которого вершина B лежит на пл. H, сторона CD лежит на прямой, равноудаленной от точек L, M и N, вершина D равноудалена от пл. V и пл. H.

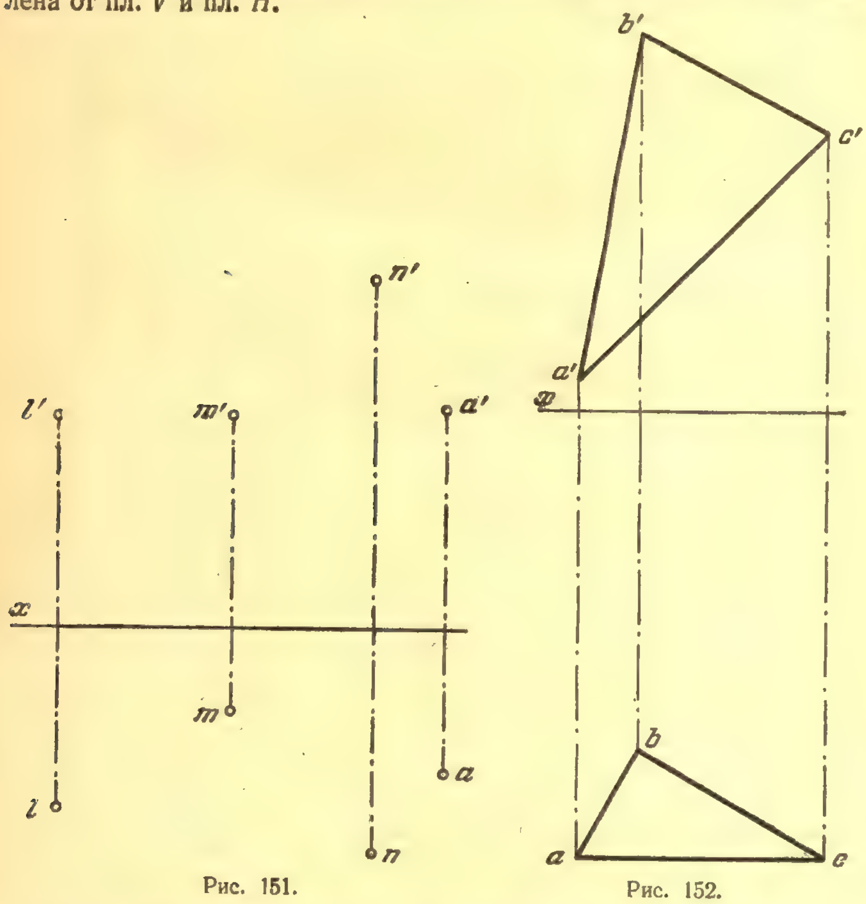


Рис. 151.

Рис. 152.

154. Дан треугольник ABC (рис. 152). Построить проекции пирамиды $SABC$, вершина S которой равноудалена от точек A, B и C и находится на равных расстояниях от пл. V и пл. H.

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

§ 18. Определение расстояний

155*. Определить натуральную величину отрезка AB прямой общего положения (рис. 153, *а*).

Решение. Как известно, проекция отрезка прямой на какой-либо плоскости равна самому отрезку (с учетом масштаба чертежа), если он параллелен этой плоскости

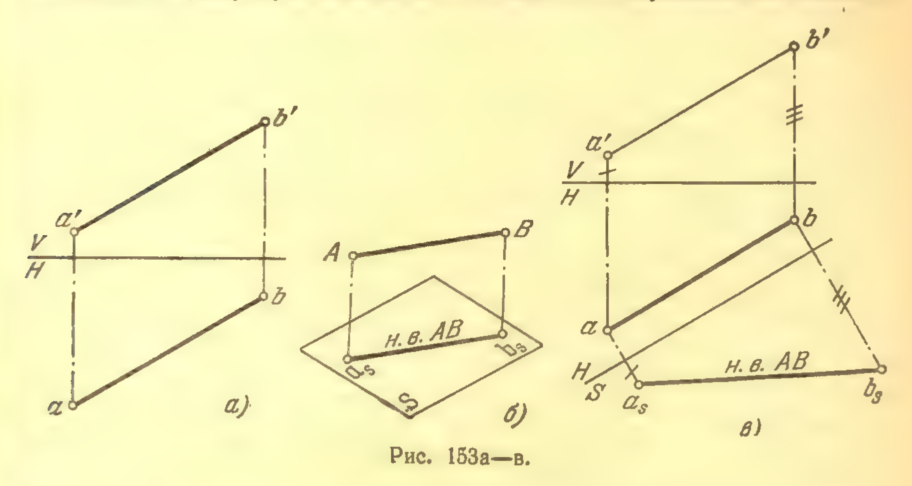


Рис. 153а—в.

(рис. 153, *б*). Из этого следует, что путем преобразования чертежа надо добиться параллельности данного отрезка пл. V или пл. H или же дополнить систему V, H еще одной плоскостью, перпендикулярной к пл. V или к пл. H и в то же время параллельной данному отрезку.

На рис. 153, *в* показано введение дополнительной плоскости S, перпендикулярной к пл. H и параллельной заданному отрезку AB.

Проекция $a_s b_s$ равна натуральной величине отрезка AB.

На рис. 153, *г* показан другой прием: отрезок AB повернут вокруг прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной к пл. H, до положения, параллельного

пл. V. При этом точка B остается на месте, а точка A занимает новое положение A_1. В новом положении горизонт. проекция a_1b ∥ оси x. Проекция a'_1b' равна натуральной величине отрезка AB.

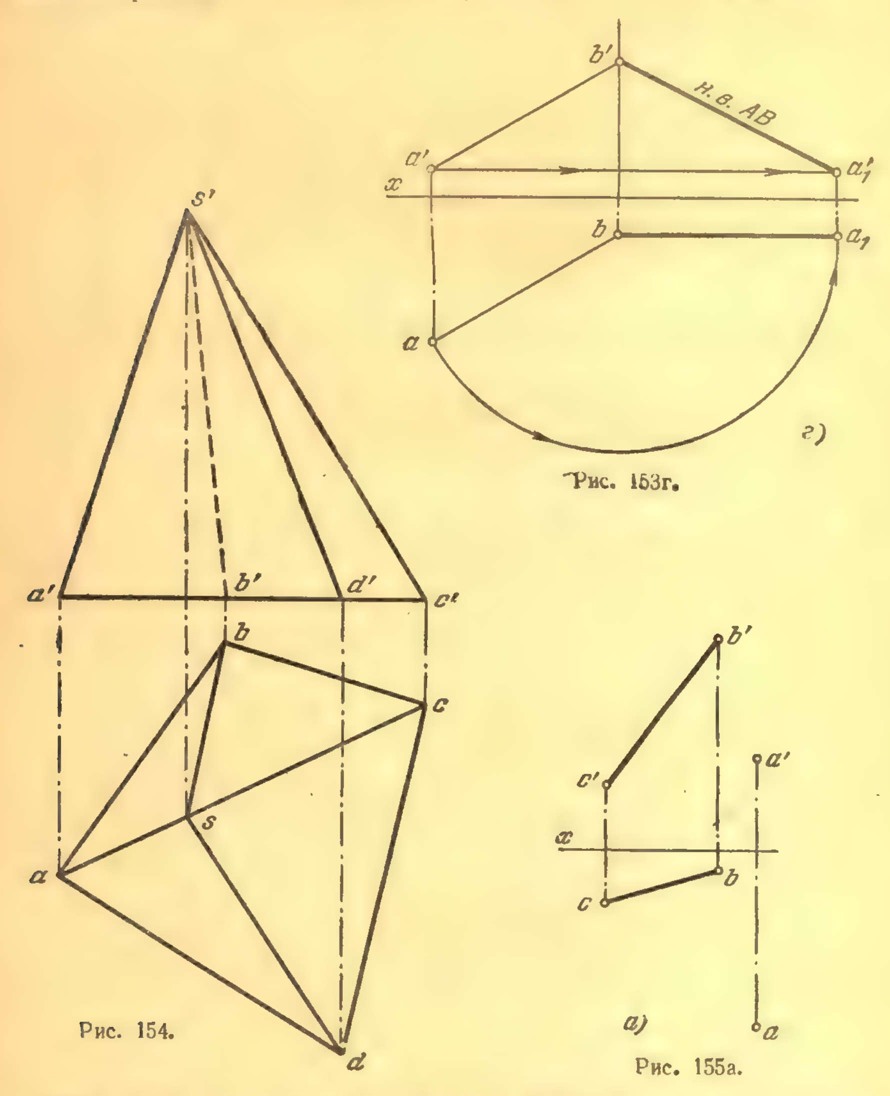


Рис. 153г.

Рис. 154.

Рис. 155а.

156. Дана пирамида $SABCD$ (рис. 154). Определить натуральную величину ребер пирамиды AS и CS, используя способ перемены плоскостей проекций, и ребер BS и DS, используя способ вращения, причем взять ось вращения перпендикулярно к пл. H.

157*. Определить расстояние от точки A до прямой BC (рис. 155, a).

Р е ш е н и е. Расстояние от точки до прямой измеряется отрезком перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Если прямая перпендикулярна к какой-либо плоскости (рис. 155, *б*), то расстояние от точки до прямой измеряется расстоянием между проекцией точки и точкой — проекцией прямой на этой плоскости. Если прямая занимает в системе V, H общее положение, то, чтобы определить расстояние от точки до прямой способом перемены плоскостей проекций, надо ввести в систему V, H еще две дополнительные плоскости.

Сначала (рис. 155, *в*) вводим пл. S, параллельную отрезку BC (новая ось S/H параллельна проекции bc), и строим проекции b_sc_s и a_s. Затем (рис. 155, *г*) вводим еще пл. T, перпендикулярную к прямой BC (новая ось T/S перпендикулярна к b_sc_s). Строим проекции прямой и точки — $c_t(b_t)$ и a_t. Расстояние между точками a_t и $c_t(b_t)$ равно расстоянию l от точки A до прямой BC.

На рис. 155, *д* эта же задача выполнена с помощью способа вращения в той его форме, которую называют способом параллельного перемещения. Сначала прямую BC и точку A, сохраняя неизменным их взаимное положение, поворачиваем вокруг некоторой (не обозначенной на чертеже) прямой, перпендикулярной к пл. H, так, чтобы прямая BC расположилась параллельно пл. V. Это равносильно перемещению точек A, B, C в плоскостях, параллельных пл. H. При этом горизонт. проекция заданной системы ($BC+A$) не изменяется ни по величине, ни по конфигурации, лишь изменяется ее положение относительно оси x. Располагаем горизонт. проекцию прямой BC параллельно оси x (положение b_1c_1) и определяем проекцию a_1, откладывая $c_1 1_1 = c$—1 и $a_1 1_1 = a$—1, причем $a_1 1_1 \perp c_1 1_1$. Проведя прямые $b'b'_1$, $a'a'_1$, $c'c'_1$ параллельно оси x, находим на них фронт. проекции b'_1, a'_1, c'_1. Далее, перемещаем точки B_1, C_1 и A_1 в плоскостях, параллельных пл. V (также не изменяя их взаимного расположения), так, чтобы получить $B_2C_2 \perp$ пл. H. При этом фронт. проекция прямой расположится перпендикулярно к оси x, $b'_2 c'_2 = b'_1 c'_1$, а для построения проекции a'_2 надо взять $b'_2 2'_2 = b'_1 2'_1$, провести $2'_2 a'_2 \perp b'_2 c'_2$ и отложить $a'_2 2'_2 = a'_1 2'_1$. Теперь, проведя c_1c_2 и $a_1a_2 \parallel x$, получим проекции b_2c_2 и a_2 и искомое расстояние l от точки A до прямой BC. Определить расстояние от A до BC можно, повернув плоскость, определяемую точкой A и прямой BC, вокруг горизонтали этой плоскости до положения $T \parallel$ пл. H (рис. 155, *е*).

В плоскости, задаваемой точкой A и прямой BC, проводим горизонталь A—I (рис. 155, *ж*) и поворачиваем вокруг нее точку B. Точка B перемещается в пл. R (заданной на чертеже следом R_h), перпендикулярной к A—I; в точке O находится центр вращения точки B. Определяем теперь натуральную величину радиуса вращения BO (рис.155, *в*). В требуемом положении, т. е. когда пл. T, определяемая точкой A и прямой BC, станет $\parallel$ пл. H, точка B получится на R_h на расстоянии Ob_1 от точки O (может быть и другое положение на том же следе R_h, но по другую сторону от O). Точка b_1 — это горизонт. проекция точки B после перемещения ее в положение B_1 в пространстве, когда плоскость, определяемая точкой A и прямой BC, заняла положение T.

Проведя (рис. 155, *и*) прямую $b_1 1$, получаем горизонт. проекцию прямой BC, уже расположенной $\parallel$ пл. H в одной плоскости с A. В этом положении расстояние от a до $b_1 1$ равно искомому расстоянию l. Плоскость P, в которой лежат заданные элементы, можно совместить с пл. H (рис. 155, *к*), повернув пл. P вокруг ее горизонт. следа. Перейдя от задания плоскости точкой A и прямой BC к заданию прямыми BC и A—I (рис. 155, *л*), находим следы этих прямых и проводим через них следы P_v и P_h. Строим (рис. 155, *м*) совмещенное с пл. H положение фронт. следа — P_{v0}.

Через точку a проводим горизонт. проекцию фронтали; совмещенная фронталь проходит через точку 2 на следе P_h параллельно P_{v0}. Точка A_0 — совмещенное с пл. H положение точки A. Аналогично находим точку B_0. Прямая BC в совмещенном с пл. H положении проходит через точку B_0 и точку m (горизонт. след прямой).

Расстояние от точки A_0 до прямой B_0C_0 равно искомому расстоянию l.

Можно выполнить указанное построение, найдя только один след P_h (рис. 155, *н* и *о*). Все построение аналогично повороту вокруг горизонтали (см. рис. 155, *ж*, *в*, *и*): след P_h — это одна из горизонталей пл. P.

Из приведенных для решения данной задачи способов преобразования чертежа предпочтительным является способ вращения вокруг горизонтали или фронтали.

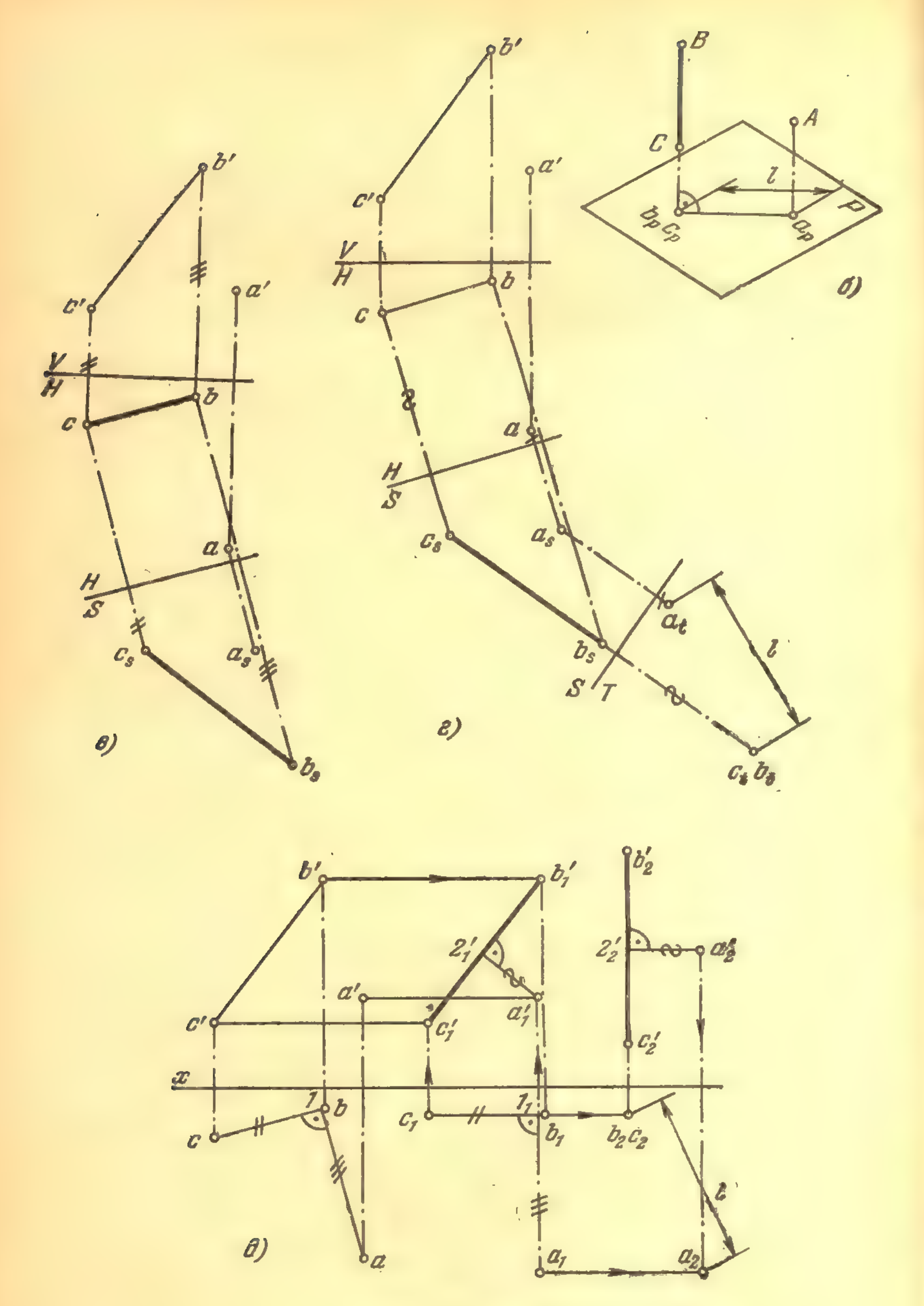


Рис. 155б—д.

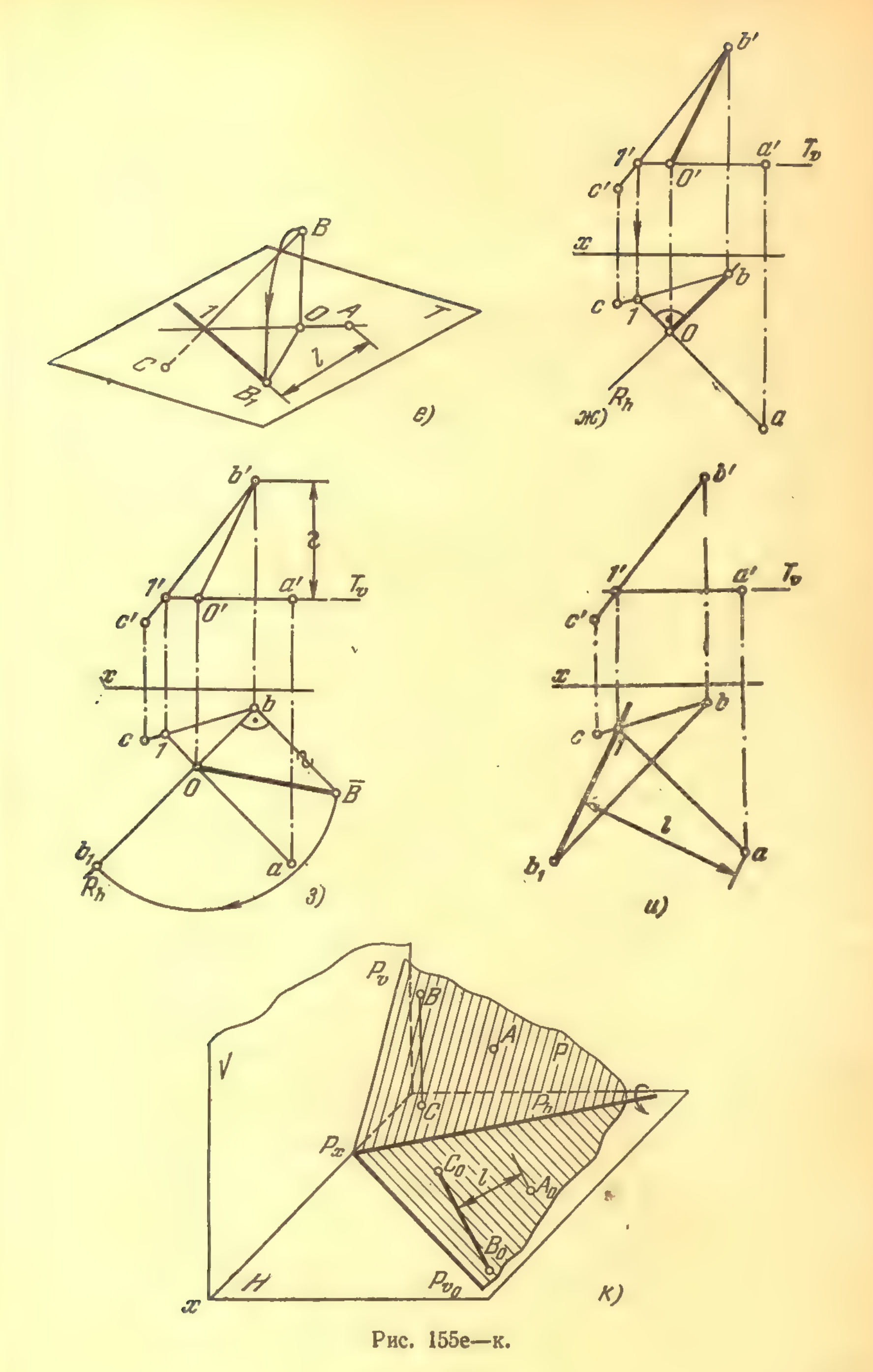

B
1
O
A
T
C
l
B1
е)
b'
1'
O'
a'
Tv
c'
x
b
c
1
O
Rh
a
ж)
b'
z
1'
O'
a'
Tv
c'
x
b
c
1
O
B
b1
Rh
a
з)
b'
1'
a'
Tv
c'
x
b
c
1
l
b1
a
и)
Pv
B
A
P
V
C
Ph
Px
C0
l
A0
B0
H
Pv0
x
к)

Рис. 155е—к.

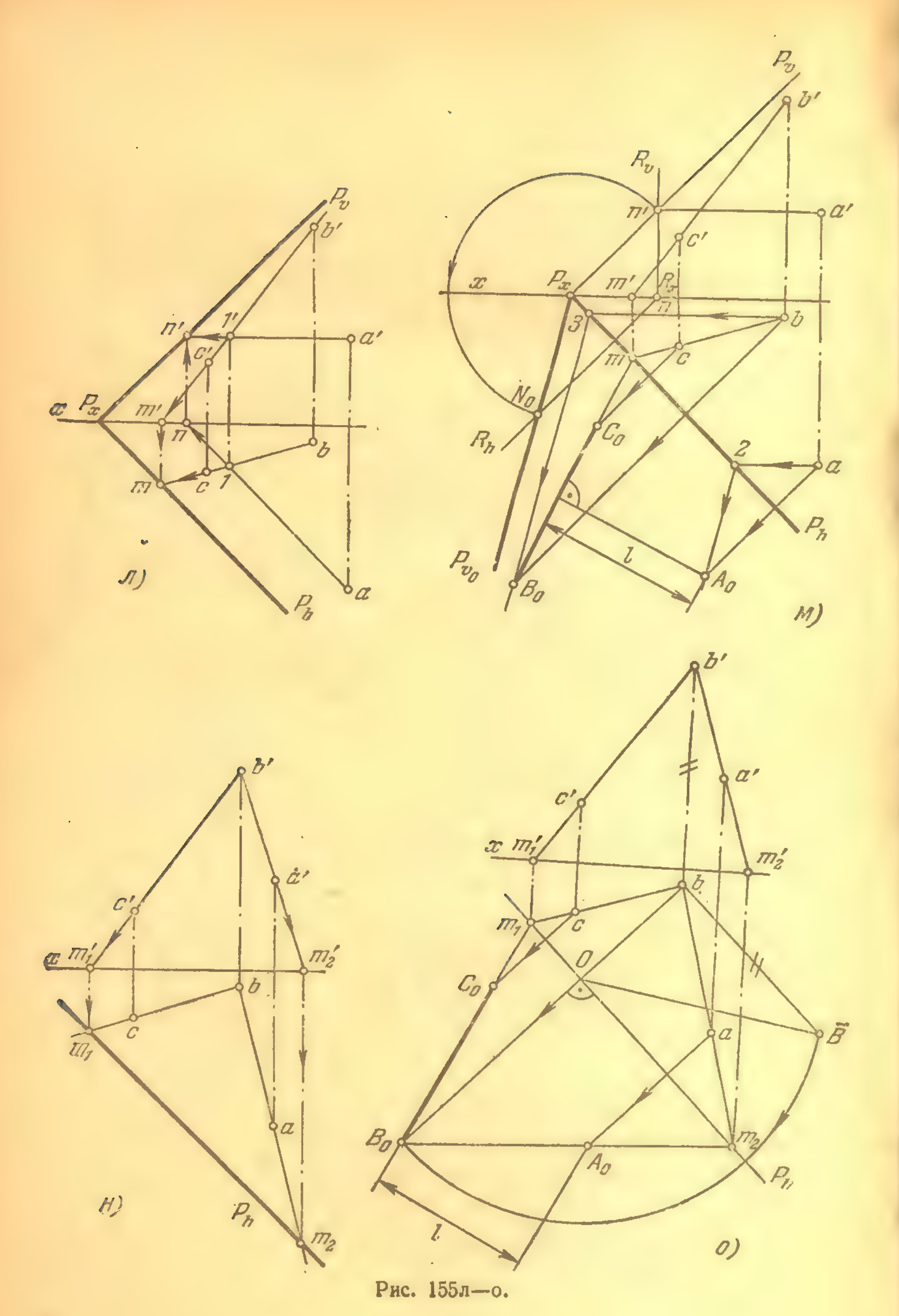


Рис. 155л—о.

158. Дана пирамида $SABC$ (рис. 156). Определить расстояния:

а) от вершины B основания до его стороны AC способом параллельного перемещения;

б) от вершины S пирамиды до сторон BC и AB основания способом вращения вокруг горизонтали;

в) от вершины S до стороны AC основания способом перемены плоскостей проекций.

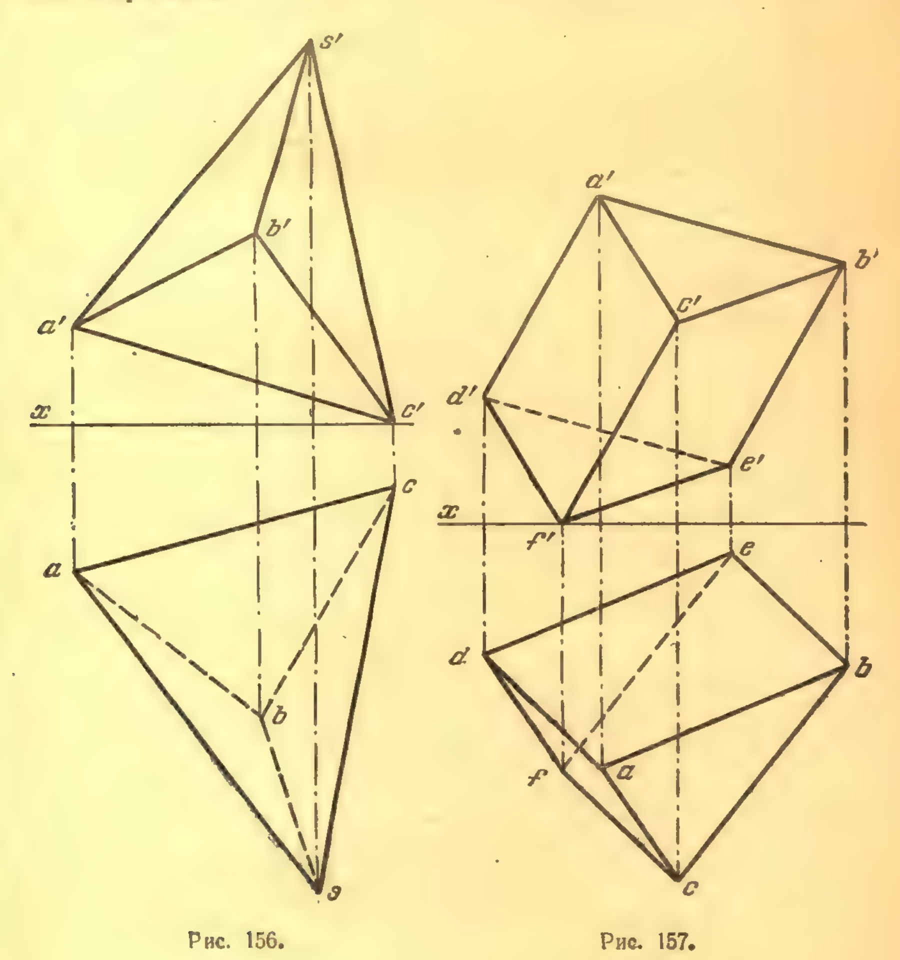


Рис. 156.

Рис. 157.

159. Дана призма (рис. 157). Определить расстояния:

а) между ребрами AD и CF способом перемены плоскостей проекций;

б) между ребрами BE и CF вращением вокруг фронтали;

в) между ребрами AD и BE способом параллельного перемещения.

160. Определить натуральную величину четырехугольника $ABCD$ (рис. 158) совмещением с пл. H. Пользоваться только горизонтальным следом плоскости.

161*. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 159, *а*) и построить проекции общего к ним перпендикуляра.

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется отрезком (MN) перпендикуляра к обеим прямым (рис. 159, *б*). Очевидно, если одну из прямых расположить перпендикулярно к какой-либо пл. T, то

Рис. 158.

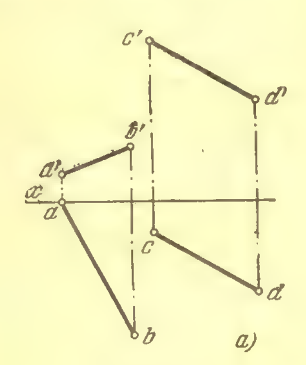


Рис. 159а.

отрезок MN перпендикуляра к обеим прямым окажется параллельным пл. T и его проекция на этой плоскости отобразит искомое расстояние. Проекция прямого угла между MN и AB на пл. T оказывается также прямым углом между $m_t n_t$ и $a_t b_t$, так как одна из сторон прямого угла AMN, а именно MN, параллельна пл. T.

На рис. 159, *в* и *г* искомое расстояние l определено способом перемены плоскостей проекций. Сначала вводим дополнительную пл. проекций S, перпендикулярную к пл. H и параллельную прямой CD (рис. 159, *в*). Затем вводим еще одну дополнительную пл. T, перпендикулярную к пл. S и перпендикулярную к той же прямой CD (рис. 159, *г*). Теперь можно построить проекцию общего перпендикуляра $m_t n_t$, проведя $m_t n_t$ из точки $c_t(d_t)$ перпендикулярно к проекции $a_t b_t$. Точки m_t и n_t — проекции точек пересечения этого перпендикуляра с прямыми AB и CD. По точке m_t (рис. 159, *д*) находим m_s на $a_s b_s$: проекция $m_s n_s$ должна быть параллельна оси T/S. Далее, по m_s и n_s находим m и n на ab и cd, а по ним m' и n' на $a'b'$ и $c'd'$.

На рис. 159, *е* показано решение этой задачи по способу параллельного перемещения. Сначала ставим прямую CD параллельно пл. V: проекция $c_1 d_1 \parallel x$. Далее перемещаем прямые CD и AB из положений C_1D_1 и A_1B_1 в положения C_2D_2 и A_2B_2 так, чтобы C_2D_2 расположилась перпендикулярно H: проекция $c'_2 d'_2 \perp x$. Отрезок искомого перпендикуляра располагается $\parallel$ пл. H, и, следовательно, $m_2 n_2$ выражает искомое расстояние l между AB и CD. Находим положение проекций m'_2 и n'_2 на $a'_2 b'_2$ и $c'_2 d'_2$, затем проекций m_1 и m'_1, n_1 и n'_1 и, наконец, проекций m' и n', m и n.

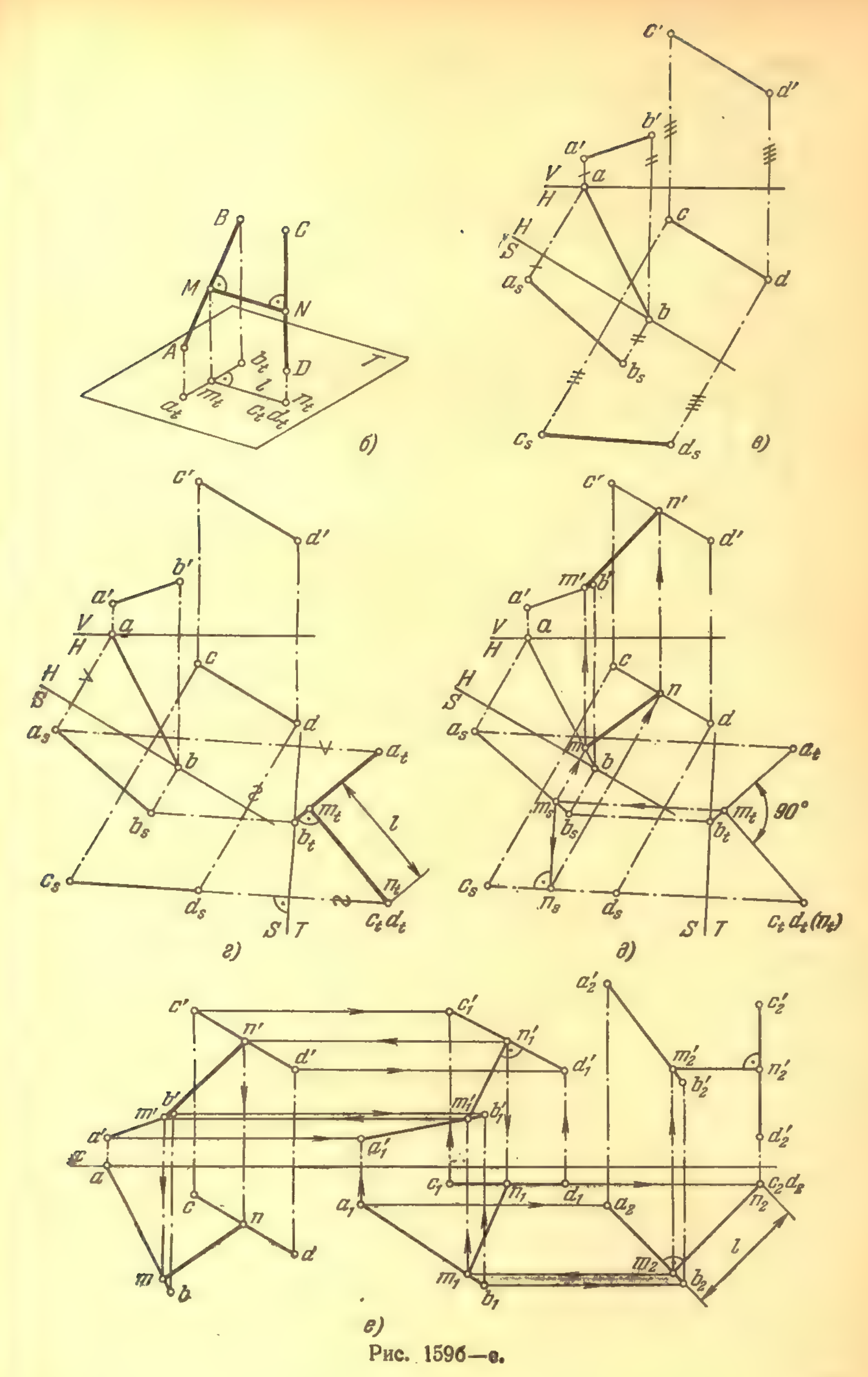


Рис. 159б—е.

162. Дана пирамида $SABC$ (рис. 160). Определить расстояние между ребром SB и стороной AC основания пирамиды и построить проекции общего перпендикуляра к SB и AC, применив способ перемены плоскостей проекций.

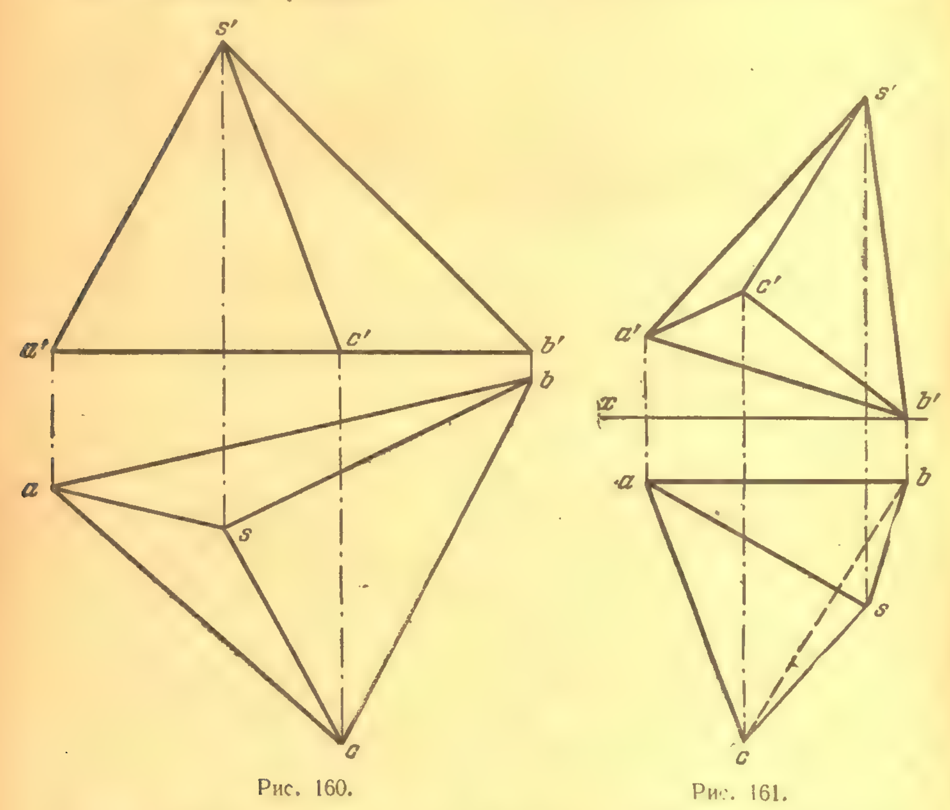
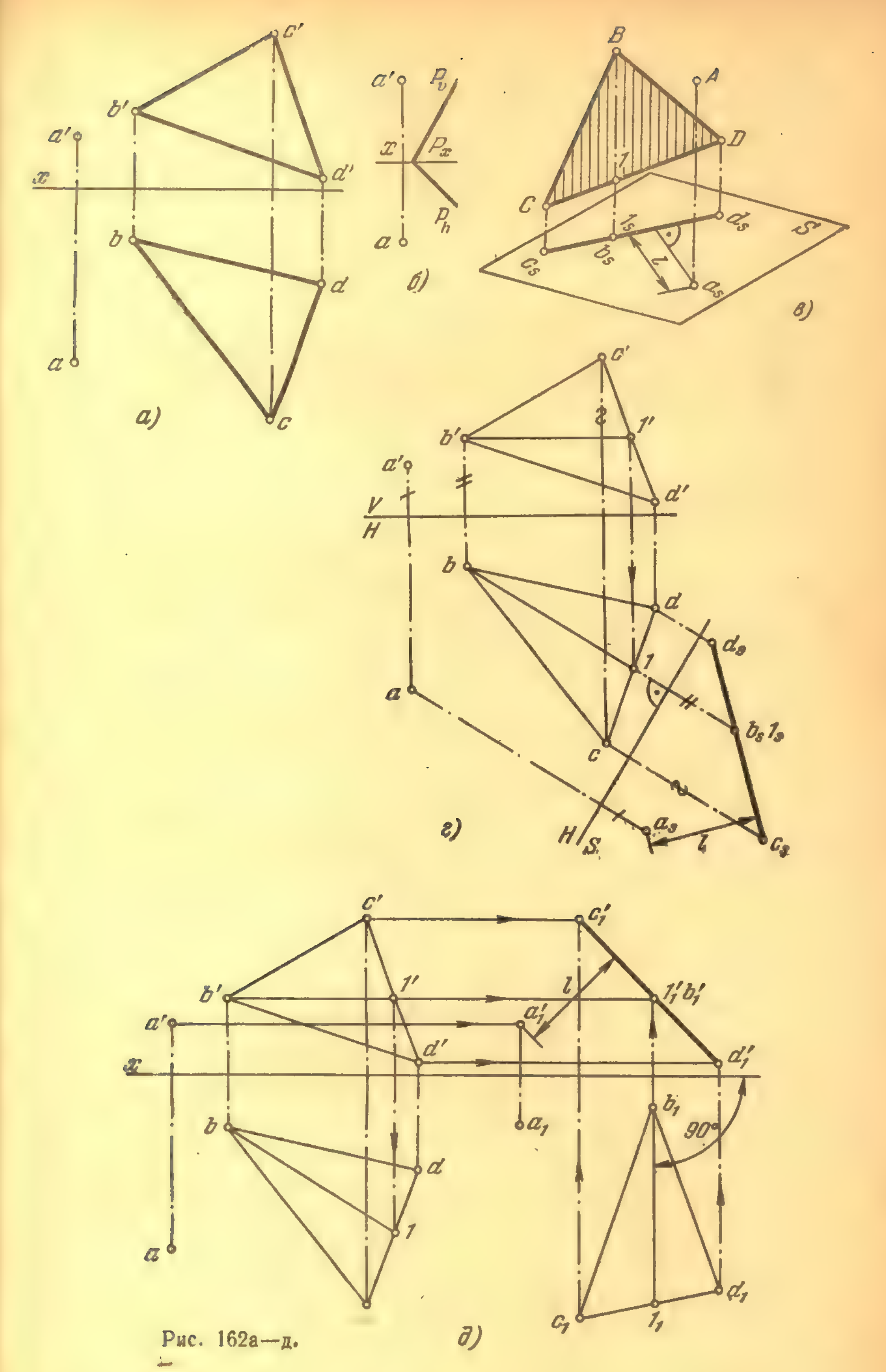


Рис. 160. Рис. 161.

163. Дана пирамида $SABC$ (рис. 161). Определить расстояние между ребром SA и стороной BC основания пирамиды и построить проекции общего перпендикуляра к SA и BC, применив способ параллельного перемещения.

164*. Определить расстояние от точки A до плоскости в случаях, когда плоскость задана: а) треугольником BCD (рис. 162, *а*); б) следами (рис. 162, *б*).

Решение. Как известно, расстояние от точки до плоскости измеряется величиной перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость. Это расстояние проецируется на какую-либо пл. проекций в натуральную величину, если данная плоскость перпендикулярна к пл. проекций (рис. 162, *в*). Добиться такого положения можно, преобразуя чертеж, например, способом перемены пл. проекций. Введем пл. S (рис. 162, *г*), перпендикулярную к пл. треугольника BCD. Для этого проводим в пл. треугольника горизонталь $B—1$ и располагаем ось проекций S перпендикулярно к проекции $b—1$ горизонтали. Строим проекции точки и плоскости — a_s и отрезок c_sd_s. Расстояние от a_s до c_sd_s равно искомому расстоянию l точки до плоскости.



a'
b'
c'
d'
x
a
b
c
d
a)
a'
P_v
x
P_x
P_h
a
б)
B
A
D
C
1
1_s
d_s
S
c_s
b_s
l
a_s
в)
c'
1'
b'
a'
d'
V
H
b
d
d_s
1
a
$b_s 1_s$
c
H
S
a_s
l
c_s
г)
c'
c_1'
b'
1'
l
$1_1' b_1'$
a'
a_1'
d'
d_1'
x
b
a_1
b_1
90°
d
1
a
d_1
c_1
1_1
д)

Рис. 162а—д.

На рис. 162, *д* применен способ параллельного перемещения. Перемещаем всю систему до тех пор, пока горизонталь $B—1$ плоскости не станет перпендикулярна к плоскости V: проекция $b_1 l_1$ должна быть перпендикулярна к оси x. В этом положении плоскость треугольника станет фронтально-проецирующей, и расстояние l от точки A до нее получится на пл. V без искажения.

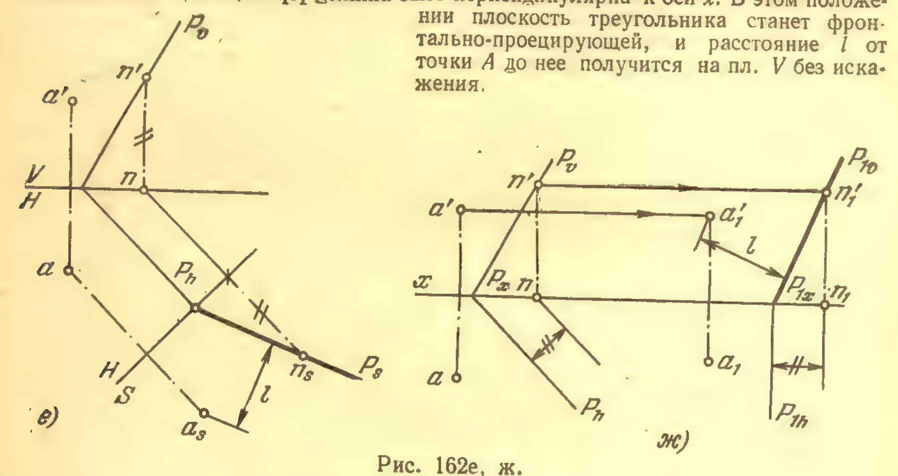


Рис. 162е, ж.

На рис. 162, *б* плоскость задана следами. Вводим (рис. 162, *е*) дополнительную пл. S, перпендикулярную к пл. P: ось S/H перпендикулярна к P_h. Дальнейшее ясно из чертежа. На рис. 162, *ж* задача решена при помощи одного перемещения: пл. P переходит в положение P_1, т. е. становится фронтально-проецирующей. След P_{1h} перпендикулярен к оси x. Строим в этом положении плоскости фронт. след горизонтали — точку n'_1, n_1. След P_{1v} пройдет через P_{1x} и n'_1. Расстояние от a'_1 до P_{1v} равно искомому расстоянию l.

165. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 160). Определить расстояние от точки A до грани SBC пирамиды, применив способ параллельного перемещения.

166. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 161). Определить высоту пирамиды, применив способ параллельного перемещения.

167*. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD (см. рис. 159, *а*) как расстояние между параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

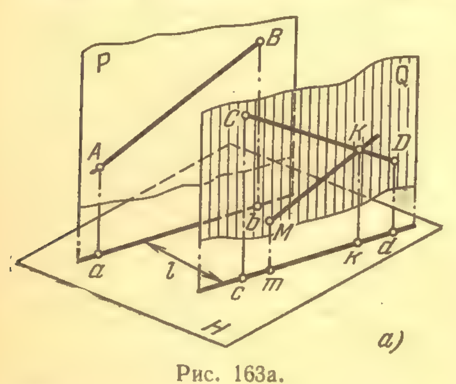


Рис. 163а.

Решение. На рис. 163, *а* показаны параллельные между собой плоскости P и Q, из которых пл. Q проведена через CD параллельно AB, а пл. P — через AB параллельно пл. Q. Расстояние между такими плоскостями и считается расстоянием между скрещивающимися прямыми AB и CD. Однако можно ограничиться построением только одной плоскости, например Q, параллельно AB, а затем определить расстояние хотя бы от точки A до этой плоскости.

На рис. 163, б показана плоскость Q, проведенная через CD параллельно AB; в проекциях проведено $d'e' \parallel a'b'$ и $ce \parallel ab$. Применяя способ перемены пл. проекций (рис. 163, в), введем дополнительную пл. S, перпендикулярную к пл. V и в то же время

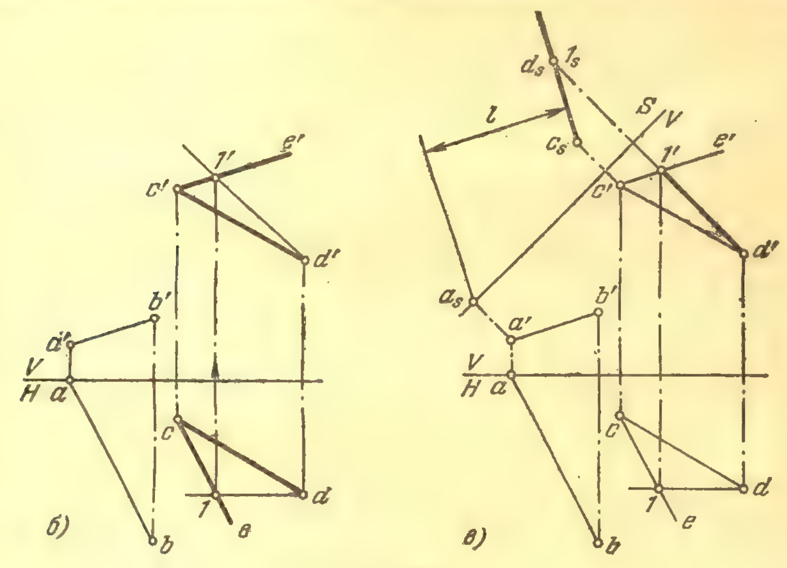


Рис. 163б, в.

перпендикулярную к пл. Q. Чтобы провести ось S/V, берем в этой плоскости фронталь $D—1$. Теперь проводим S/V перпендикулярно к $d'1'$ (рис. 163, в). Пл. Q изобразится на пл. S. в виде прямой $c_s d_s$. Остальное ясно из чертежа.

168. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 160). Определить расстояние между ребрами SC и AB. Применить: 1) способ перемены пл. проекций, 2) способ параллельного перемещения.

169*. Определить расстояние между параллельными плоскостями, из которых одна задана прямыми AB и AC, а другая — прямыми DE и DF (рис. 164, а). Выполнить также построение для случая, когда плоскости заданы следами (рис. 164, б).

Решение. Расстояние (рис. 164, в) между параллельными плоскостями можно определить, проведя перпендикуляр из любой точки одной плоскости на другую плоскость. На рис. 164, г введена дополнительная пл. S перпендикулярно к пл. H и к обеим данным плоскостям. Ось S/H перпендикулярна к горизонт. проекции горизонтали, проведенной в одной из плоскостей. Строим проекцию этой плоскости и точки D другой плоскости на пл. S. Расстояние точки d_s до прямой $1_s a_s$ равно искомому расстоянию между параллельными плоскостями.

На рис. 164, д дано другое построение (по способу параллельного перемещения). Для того чтобы плоскость, выраженная пересекающимися прямыми AB и AC, оказалась перпендикулярна к пл. V, горизонт. проекцию горизонтали этой плоскости ставим перпендикулярно к оси x: $1_1 2_1 \perp x$. Расстояние между фронт. проекцией d_1' точки D и прямой $a_1' 2_1'$ (фронт. проекцией плоскости) равно искомому расстоянию между плоскостями.

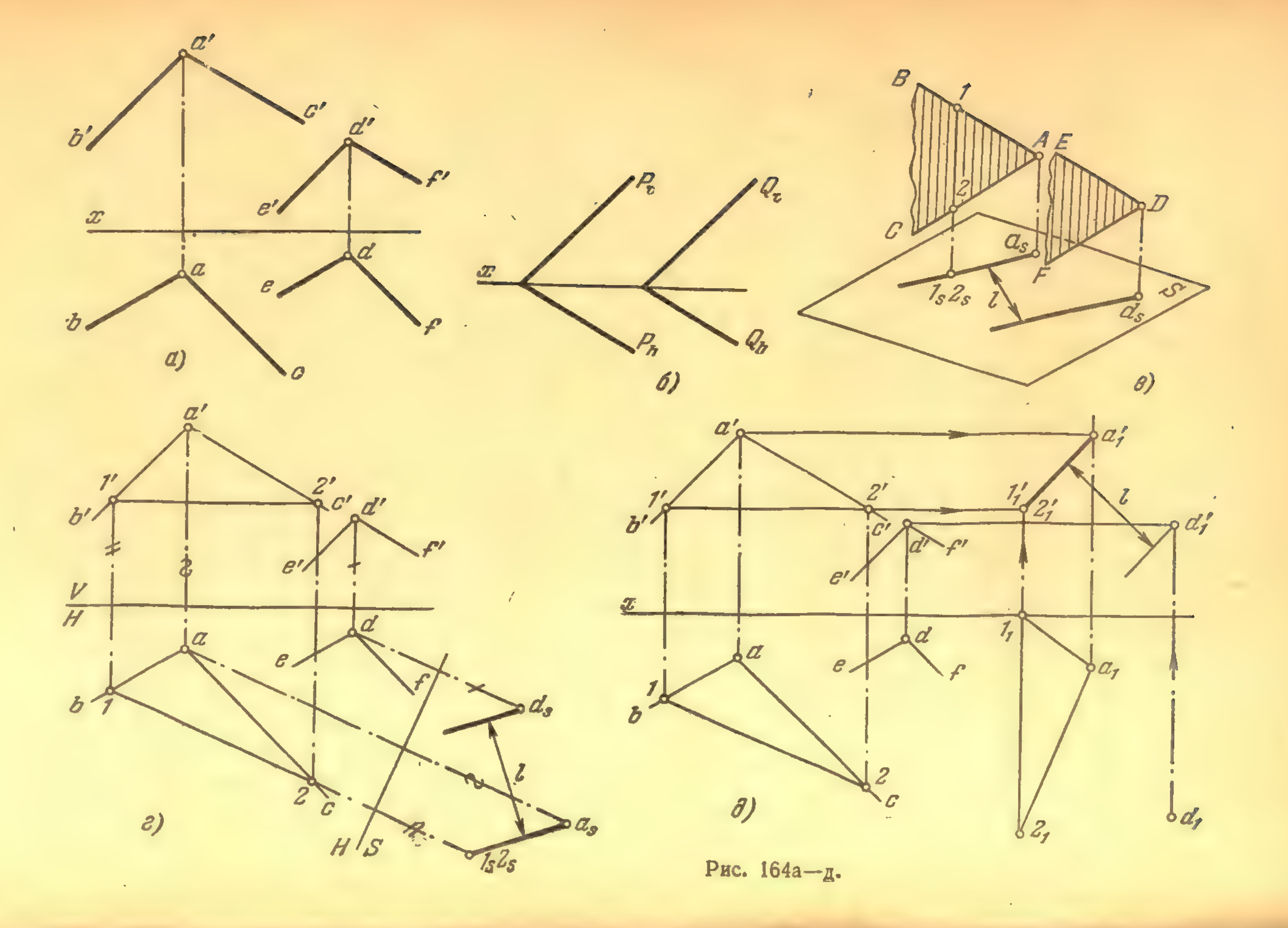

a'
b'
c'
d'
e'
f'
x
a
b
c
d
e
f
а)
x
P_v
Q_v
P_h
Q_h
б)
B
1
A
E
2
C
D
a_s
F
1_s2_s
l
d_s
S
в)
1'
2'
c'
V
H
2
H
S
l
d_s
a_s
1_s2_s
г)
a'_1
$1'_1$
$2'_1$
d'_1
1_1
a_1
2_1
d_1
д)

Рис. 164а—д.

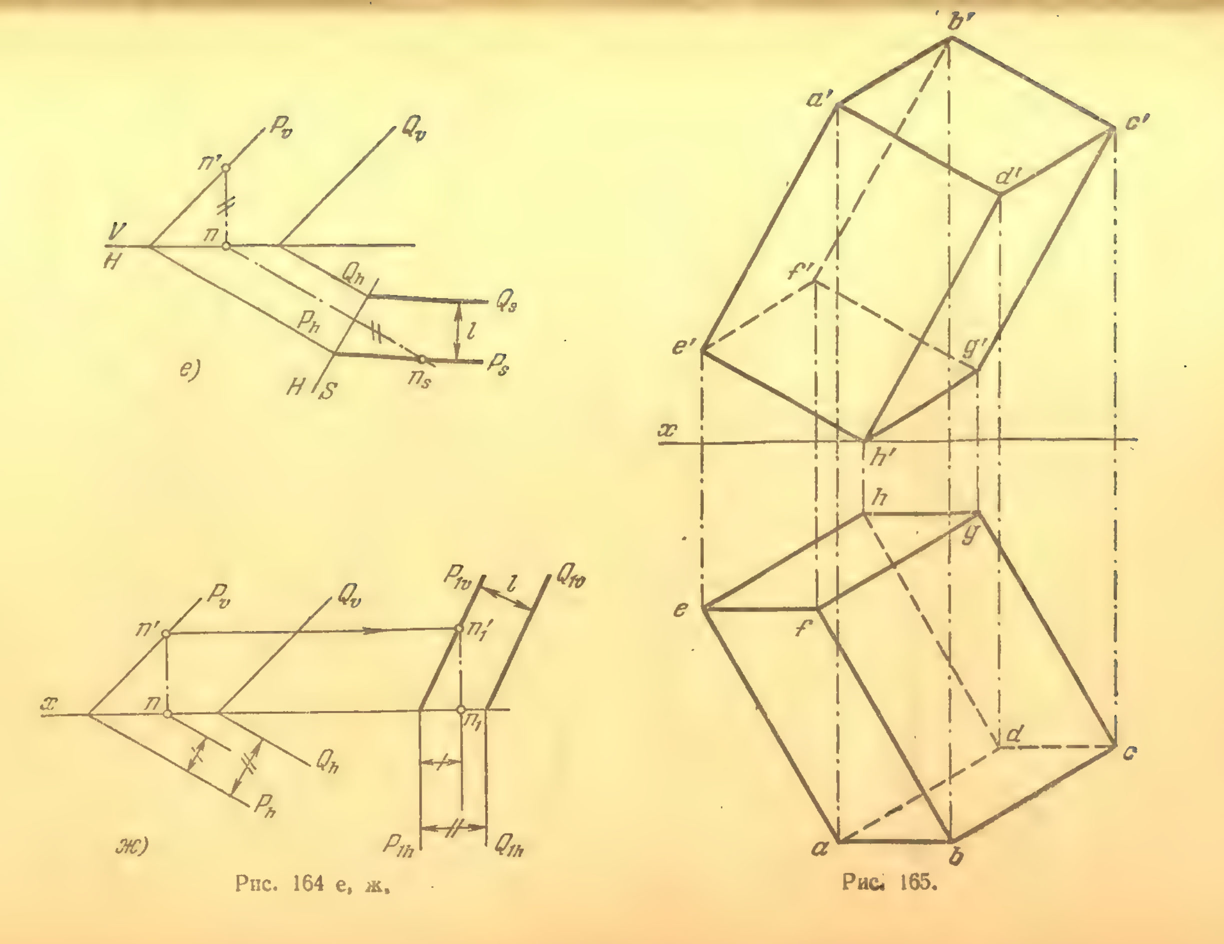


Рис. 164 е, ж.

Рис. 165.

На рис. 164, *е* показано введение дополнительной пл. S, перпендикулярной к пл. H и к данным плоскостям P и Q (ось S/H перпендикулярна к следам P_h и Q_h). Строим следы P_s и Q_s. Расстояние между ними (см. рис. 164, *в*) равно искомому расстоянию l между плоскостями P и Q.

На рис. 164, *ж* показано перемещение плоскостей P и Q в положение P_1 и Q_1, когда горизонт. следы оказываются перпендикулярными к оси x. Расстояние между новыми фронт. следами P_{1v} и Q_{1v} равно искомому расстоянию l.

170. Дан параллелепипед *ABCDEFGH* (рис. 165). Определить расстояния: а) между основаниями параллелепипеда — l_1; б) между гранями *ABFE* и *DCGH* — l_2; в) между гранями *ADHE* и *BCGF* — l_3.

§ 19. Определение величины углов

171*. Определить углы наклона прямой *AB* к пл. *V* и пл. *H* (рис. 166, *а*).

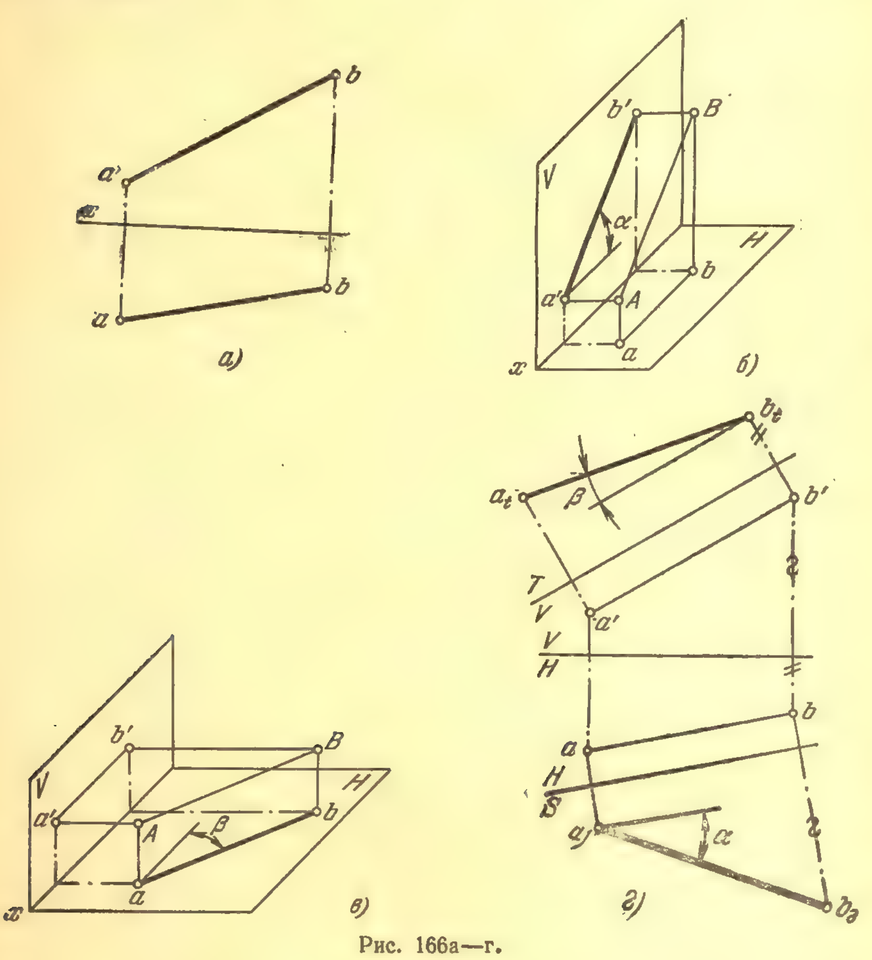


Рис. 166а—г.

Р е ш е н и е. Если прямая параллельна пл. V (рис. 166, *б*), то угол между этой прямой и пл. H (угол α) изображается без искажения на фронт. проекции. Если же прямая параллельна пл. H (рис. 166, *в*), то образуемый этой прямой угол с пл. V (угол β) изображается без искажения на горизонт. проекции. Поэтому, поставив заданную прямую общего положения сначала параллельно пл. V, а затем параллельно пл. H, можно определить соответственно углы α и β.

На рис. 166, *г* показано применение способа перемены пл. проекций для определения углов α и β. Так, для определения угла α введена дополнительная пл. S, перпендикулярная к пл. H и параллельная AB, а для определения угла β — дополнительная плоскость $T \perp V$ и в то же время $\parallel AB$.

На рис. 166, *д* прямая как бы повернута: а) вокруг оси, проходящей через точку B и перпендикулярной к пл. H, до параллельности пл. V (положение $a_1'b'$, a_1b) —

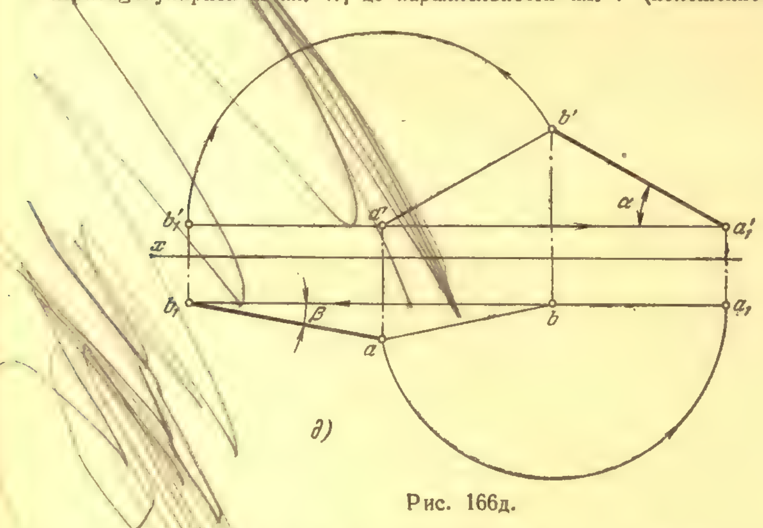


Рис. 166д.

определен угол α; б) вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно к пл. V, до параллельности пл. H (положение $a'b'_1$, ab_1) — определен угол β.

Конечно, можно изобразить эти оси на чертеже; но, как видно, построение возможно и без этого.

172. Дана пирамида $SABCD$ (см. рис. 154). Определить углы наклона ребер пирамиды к пл. V и пл. H.

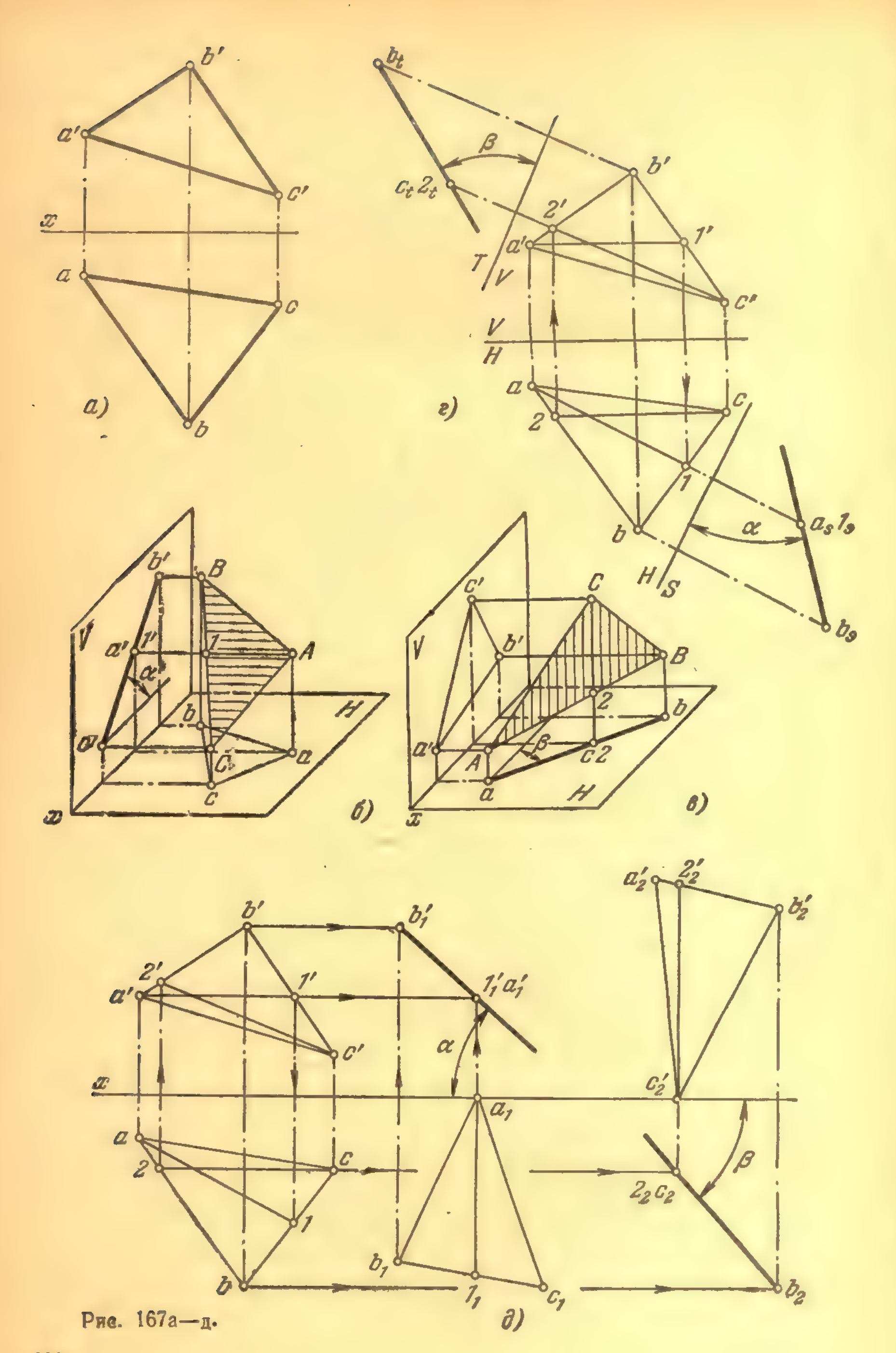
173*. Определить углы наклона плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 167, *а*), к пл. H и пл. V.

Р е ш е н и е. Как известно, угол наклона (α) плоскости к пл. H проецируется без искажения на пл. V, если плоскость перпендикулярна к пл. V (рис. 167, *б*), а угол наклона (β) плоскости к пл. V проецируется без искажения на пл. H, если плоскость перпендикулярна к пл. H (рис. 167, *в*).

На рис. 167, *г* для определения угла α переходим к системе S, H, где пл. S перпендикулярна к пл. H и к заданной плоскости (ось S/H перпендикулярна к горизонт. проекции a—1 горизонтали).

Определение угла β произведено путем перехода от системы V, H к системе T, V, где пл. T перпендикулярна к пл. V и к данной плоскости треугольника (ось T/V перпендикулярна к фронт. проекции $c'2'$ фронтали).

На рис. 167, *д* та же задача решена способом параллельного перемещения. Сначала все вершины заданного треугольника ABC перемещены в плоскостях, параллельных H, так, чтобы плоскость треугольника оказалась перпендикулярной к пл. V. Это



b'
a'
c'
x
a
c
a)
b
b_t
β
$c_t 2_t$
b'
2'
1'
a'
T
V
c'
V
H
a
c
г)
2
1
b
α
$a_s 1_s$
H
S
b_s
b'
B
V
a'
1'
1
A
α
H
b
a
c
x
б)
c'
C
b'
B
V
2
b
a'
A
β
c 2
a
H
x
в)
a'_2
$2'_2$
b'
b'_1
b'_2
2'
1'
$1'_1 a'_1$
a'
c'
α
x
c'_2
a_1
a
c
2
β
$2_2 c_2$
1
b_1
b
1_1
c_1
b_2
д)

Рис. 167а—д.

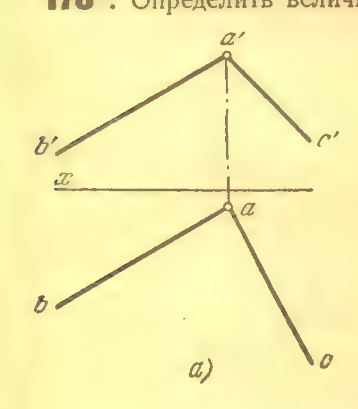
достигнуто с помощью горизонтали $A—1$, перемещенной так, что она расположилась перпендикулярно к пл. V (горизонт. проекция $a_1 1_1$ перпендикулярна к оси x). Получаем угол α наклона плоскости треугольника к пл. H без искажения.

Для определения величины угла β наклона плоскости треугольника ABC к пл. V треугольник повернут так, чтобы он расположился перпендикулярно к пл. H. Это сделано при помощи фронтали $C—2$: она поставлена перпендикулярно к пл. H (положение $C_2 2_2$, фронт. проекция $c'_2 2'_2 \perp x$), и, следовательно, проходящая через эту фронталь плоскость также перпендикулярна к пл. H.

174. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 161). Определить углы наклона граней SAB, SAC и ABC к пл. H и пл. V.

175. Дан параллелепипед (см. рис. 165). Определить углы наклона основания $ABCD$ и грани $CDHG$ к пл. V и грани $ADEH$ к пл. H.

176*. Определить величину угла BAC (рис. 168, *а*).



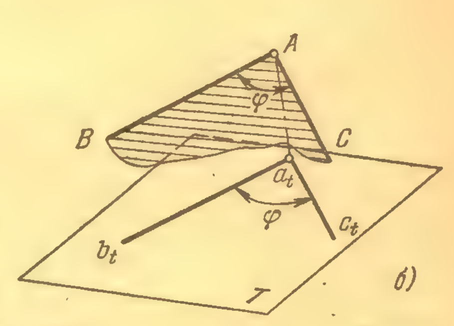


Рис. 168а, б.

Решение. Если плоскость угла параллельна какой-либо пл. проекций, то данный угол проецируется на нее без искажения (рис. 168, *б*).

На рис. 168, *в* задача решена при помощи способа перемены пл. проекций. Так как плоскость угла BAC является плоскостью общего положения (ее горизонталь не перпендикулярна ни к одной из плоскостей V, H, W), то приходится сначала дополнить систему V, H пл. S, взяв ее перпендикулярно к пл. H и к плоскости угла BAC. В результате этого преобразования проекция угла на плоскости S получится в виде отрезка $a_s 1_s$. Теперь можно ввести еще одну дополнительную пл. проекций (T), проведя ее перпендикулярно к пл. S и в то же время параллельно плоскости угла BAC. Угол $1_t a_t 2_t$ представит собою натуральную величину угла BAC.

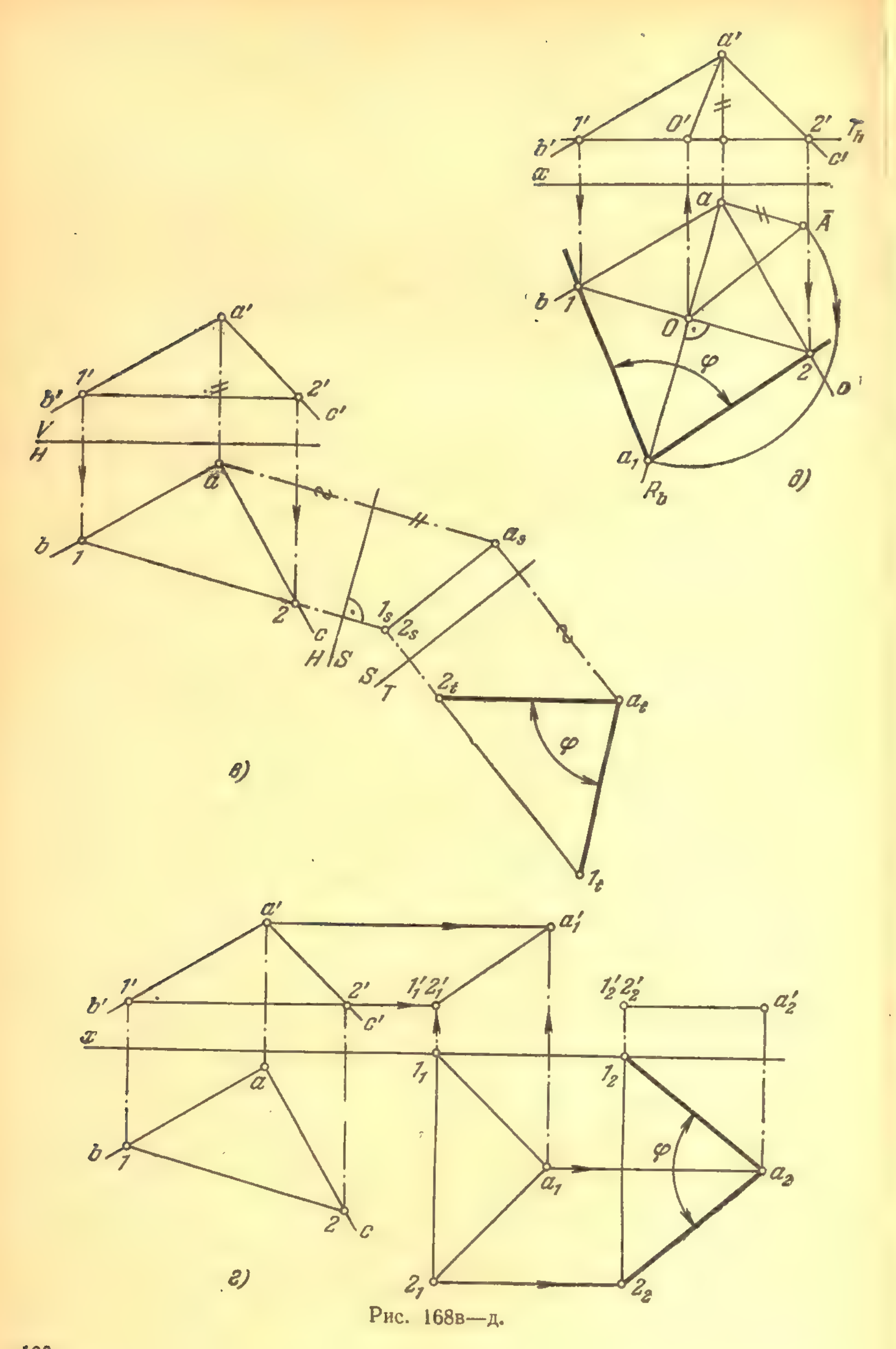
На рис. 168, *г* искомый угол φ определен способом параллельного перемещения. Сначала плоскость угла перемещена так, чтобы она стала перпендикулярной к пл. V (для этого располагаем горизонт. проекцию горизонтали перпендикулярно к оси x). Затем располагаем плоскость угла параллельно пл. H, для чего перемещаем проекцию $1'_1 a'_1$ в положение $1_2' a_2'$ (т. е. $\parallel$ оси x). Еще одно построение показано на рис. 168, *д*. Здесь для определения величины угла применен поворот вокруг горизонтали: плоскость угла расположится параллельно пл. H (положение T).

Построения выполнены в следующем порядке:

1. Проведена плоскость вращения точки A — горизонтально-проецирующая пл. R, перпендикулярная к горизонтали (т. е. к оси вращения).

2. Отмечен центр вращения точки A в пересечении горизонтали с пл. R (точка O, O') и указаны проекции радиуса вращения (Oa и $O'a'$).

3. Определена натуральная величина радиуса вращения (ее выражает гипотенуза $O\bar{A}$ треугольника $Oa\bar{A}$).



a'
1'
O'
2'
T_h
b'
c'
x
a
A
b
1
O
2
φ
a_1
R_b
д)
a'
1'
2'
b'
c'
V
H
a
b
1
2
c
a_s
1_s 2_s
H/S
S/T
2_t
a_t
φ
1_t
в)
a'
a'_1
1' 2'
1'_1 2'_1
1'_2 2'_2
a'_2
b'
c'
x
a
1_1
1_2
b
1
a_1
a_2
φ
2
c
2_1
2_2
г)

Рис. 168в—д.

4. Проведена дуга окружности радиуса $\overline{OA}$ и на R_h найдена точка a_1 — горизонт. проекция вершины угла после его поворота вокруг горизонтали до совмещения с пл. T — и построен угол $1a_12$, равный искомому.

Для решения задач типа 176 наиболее рациональным является применение вращения вокруг горизонтали (или фронтали), как это показано на рис. 168, *д*.

177. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 156). Вращением вокруг горизонтали определить угол между ребрами SA и SB, SB и SC, SC и SA.

178. Дан параллелепипед (см. рис. 165). Определить углы между ребрами DH и CD, CG и CD, AB и BC.

179*. Определить величину угла между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 169, *а*).

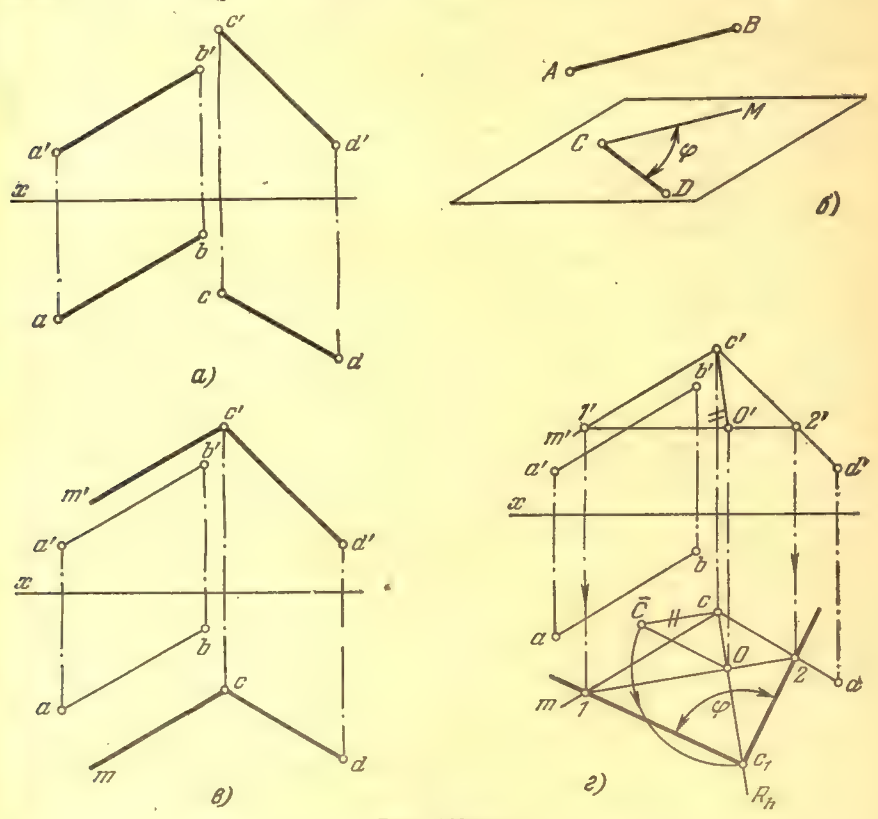


Рис. 169а—г.

Решение. Угол между двумя скрещивающимися прямыми определяется углом, составленным пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся. Для определения величины угла надо начать с его изображения на чертеже. Это сделано на рис. 169, *б*, причем использована одна из заданных прямых — CD, через точку C которой проведена прямая CM, параллельная другой заданной прямой—AB. Величина угла MCD (рис. 169, *в*) выражает угол между прямыми AB и CD. Это сделано при помощи поворота вокруг горизонтали *1—2* (рис. 169, *г*), взятой в пл. угла MCD.

180. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 160). Определить величину угла между ее ребрами: а) SB и AC, б) SA и BC.

181*. Определить величину угла φ наклона прямой AB к плоскости, заданной треугольником CDE (рис. 170, *а*).

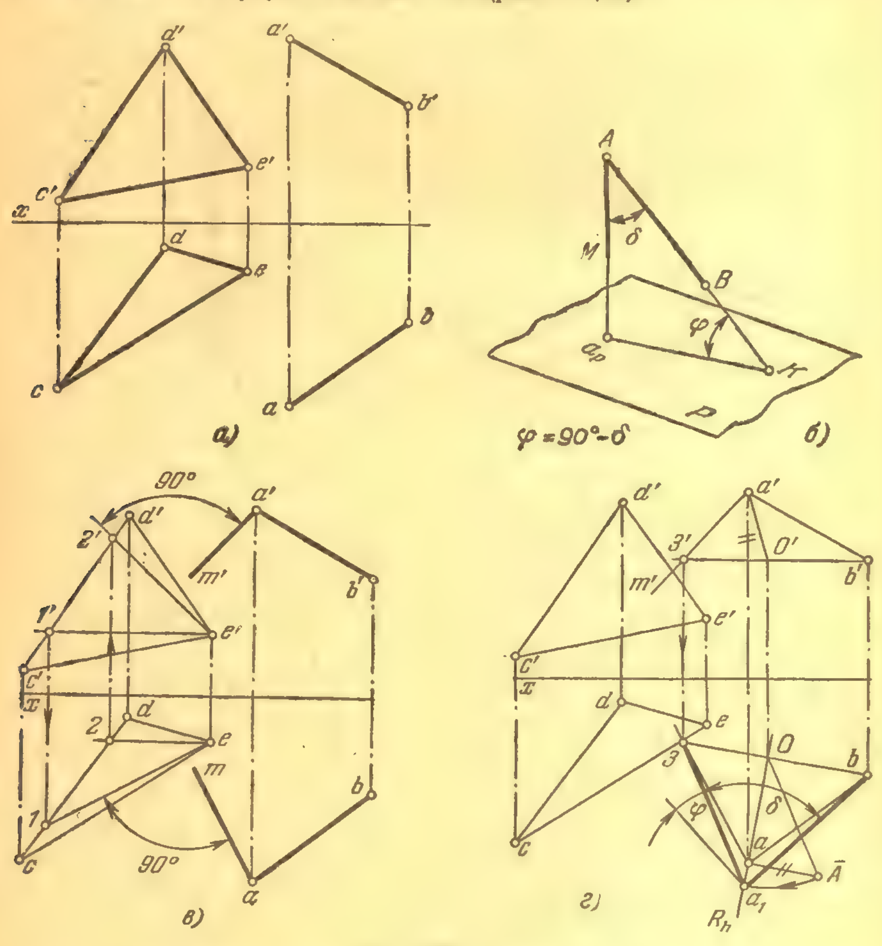


Рис. 170а—г.

Решение. Как известно, углом между прямой (AB) и плоскостью (P) называется острый угол (φ) между прямой и ее проекцией (a_pK) на этой плоскости. Для построения (рис. 170, *б*) этого угла надо найти точки пересечения с пл. P прямой AB и перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой AB на пл. P. Но если, как в данной задаче, требуется лишь определить величину угла наклона прямой к плоскости, то проще определить величину угла δ, дополнительного к углу φ: найдя угол δ, можно определить величину угла φ из соотношения $\varphi = 90° - \delta$. На рис. 170, *в* показано построение проекций am и $a'm'$ перпендикуляра к плоскости треугольника CDE, для чего взяты горизонталь и фронталь этой плоскости: $am \perp e{-}1$, $a'm' \perp e'2'$.

Теперь можно определить (рис. 170, *г*) натуральную величину угла δ с вершиной A, что сделано поворотом вокруг горизонтали $b'3'$, $b{-}3$. Искомый угол $\varphi = 90° - \delta$.

182. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 161). Определить углы наклона ребер SA, SB и SC к грани ABC.

183*. Определить угол между гранями ABC и ABD (рис. 171, *а*).

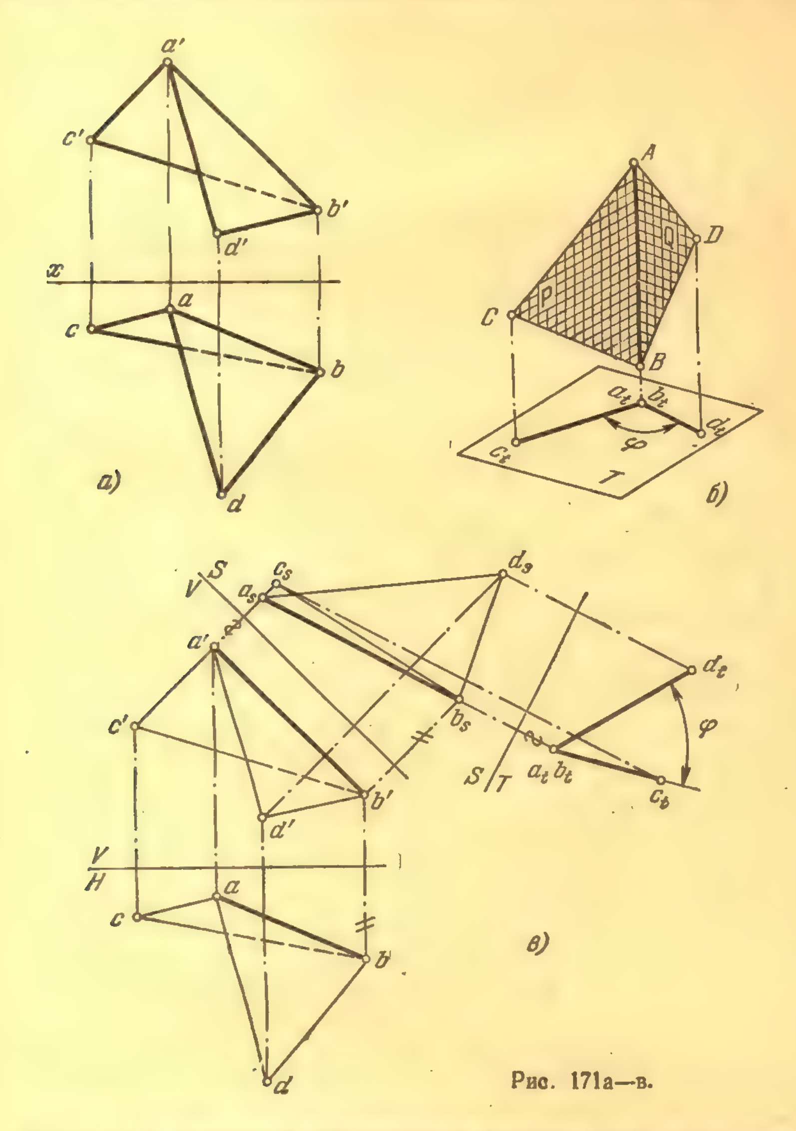


Рис. 171а—в.

Решение. Двугранный угол измеряется линейным углом, полученным в пересечении граней двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к обеим граням двугранного, а следовательно, и к линии их пересечения, т. е. ребру двугранного угла. Если это ребро AB окажется перпендикулярным к какой-либо пл. T (рис. 171, *б*), то полученная на пл. T проекция двугранного угла выражает его линейный угол.

Для решения задачи (рис. 171, *в*) применен способ перемены пл. проекций. От системы V, H совершен переход к системе S, V, где $S \perp V$ и $S \parallel AB$, а затем от этой системы S, V переход к системе T, S, где $T \perp S$ и $T \perp AB$.

Треугольники проецируются на пл. T в виде отрезков $a_t c_t$ и $a_t d_t$. Угол между ними равен искомому углу φ.

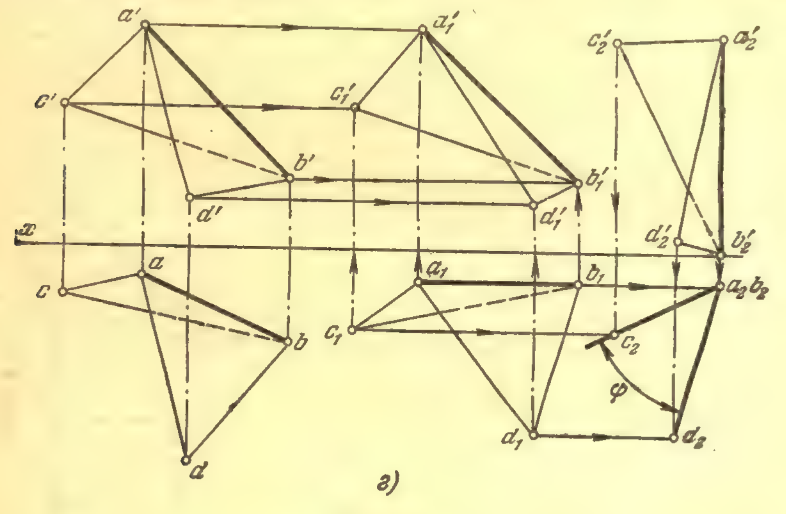


Рис. 171г.

На рис. 171, *г* показано решение той же задачи при помощи способа параллельного перемещения: ребро AB поставлено перпендикулярно к пл. H.

84*. Определить величину угла, образованного плоскостью P и плоскостью треугольника ABC (рис. 172, *а*).

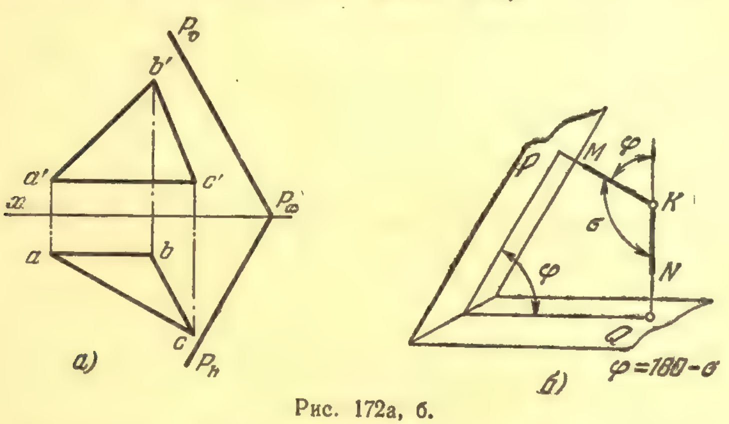


Рис. 172а, б.

Решение. Если, решая данную задачу, придерживаться схемы решения предыдущей, то необходимо построить прямую пересечения заданных плоскостей. Но можно поступить и иначе, без построения этой прямой, т. е. не определяя ребра искомого двугранного угла. Можно поступить следующим образом: определить не непос-

редственно угол φ, а угол σ (рис. 172, *б*) между перпендикулярами KM и KN, проведенными из какой-либо точки K на заданные плоскости. Найдя угол σ, получаем $\varphi = 180° - \sigma$.

Такое решение отличается в своей сущности от решений по рис. 171, *в* и 171, *г*. Взяв некоторую точку K (рис. 172, *в*), проведем из нее перпендикуляры KN и KM соответственно к плоскости треугольника ABC и к пл. P: из точки k' проводим $k'n' \perp a'b'$ и $k'm' \perp P_v$, а из точки k — $kn \perp ac$ и $km \perp P_h$. Таким образом получается угол с проекциями mkn и $m'k'n'$ (угол σ). Натуральная величина этого угла получена поворотом вокруг фронтали $1—2$ (рис. 172, *г*). Так как получен острый угол, то можно

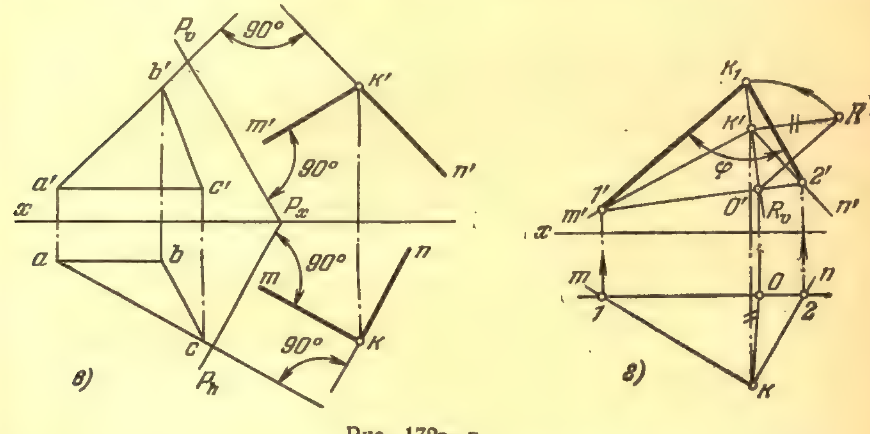


Рис. 172в, г.

считать, что он определяет искомый угол между заданными плоскостями, так как из смежных углов, полученных при взаимном пересечении двух плоскостей, углом между плоскостями считается острый.

185. Дана пирамида $SABCD$ (см. рис. 154). Определить способом перемены плоскостей проекций углы между гранями SAB и SBC, SBC и SCD, SAD и SAB.

186. Дан параллелепипед (рис. 165). Определить углы между гранями $CDHG$ и $EFGH$, $BCGF$ и $CDHG$.

§ 20. Смешанные задачи с применением способов преобразования чертежа

187*. Поворотом вокруг прямой MN ввести точку A в пл. H (рис. 173,*а*).

Решение. Ось вращения — прямая MN — в данном случае параллельна пл. H. Поэтому плоскость вращения точки A является горизонтально-проецирующей. Ее след S_h (рис. 173, *б*) проходит через проекцию a. Точка A при повороте ее вокруг MN описывает в пл. S окружность, горизонт. проекция которой совпадает с S_h; центр этой окружности находится в точке O пересечения оси вращения MN с пл. S. Так как пл. S составляет с пл. V острый угол, то проекция окружности, расположенной в пл. S, получится на пл. V в виде эллипса. Чтобы избежать построения этого эллипса, совместим пл. S и лежащие в ней точки O и A с пл. H. Это даст возможность изобразить дугу окружности, по которой перемещается точка A, без искажения. По условию

задачи точка A, находясь в пл. S, должна оказаться в пл. H; следовательно, точка A должна получиться после поворота на следе S_h и совпасть со своей горизонт. проекци-

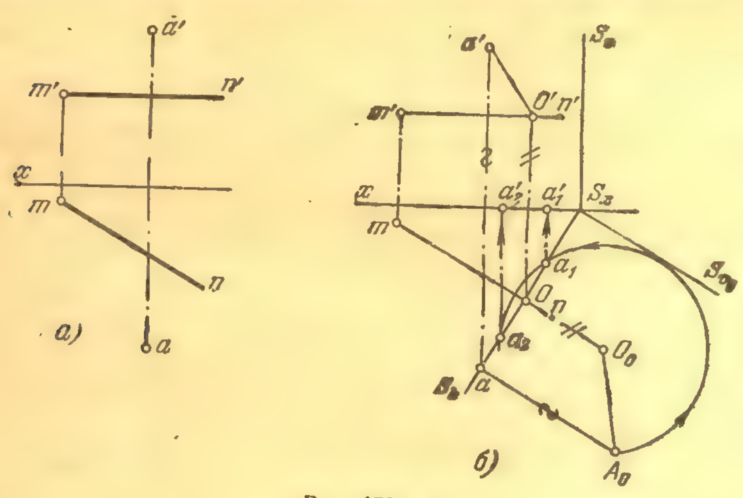


Рис. 173а, б.

ей. Поэтому, проведя дугу радиусом O_0A_0, получим точки a_1 и a_2— горизонт. проекции точки A, приведенной в пл. H. По точкам a_1 и a_2 строим на оси x проекции a_1' и a_2'.

188. Поворотом вокруг прямой MN ввести точку A в пл. V (рис. 174).

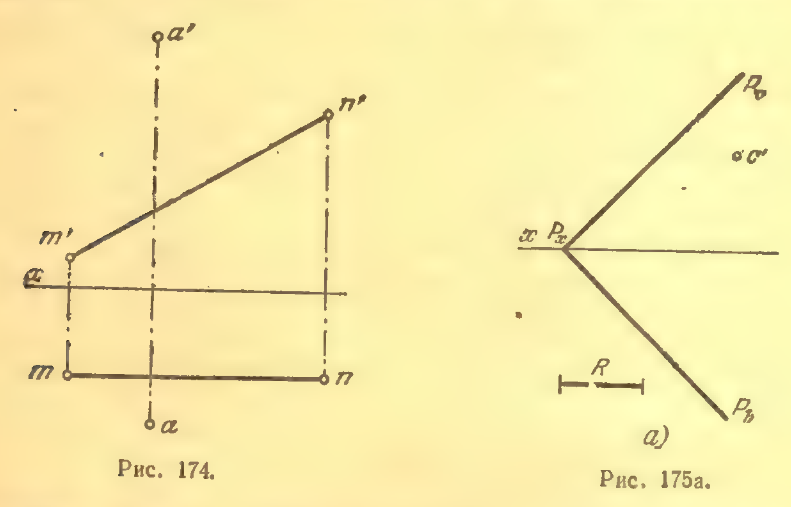
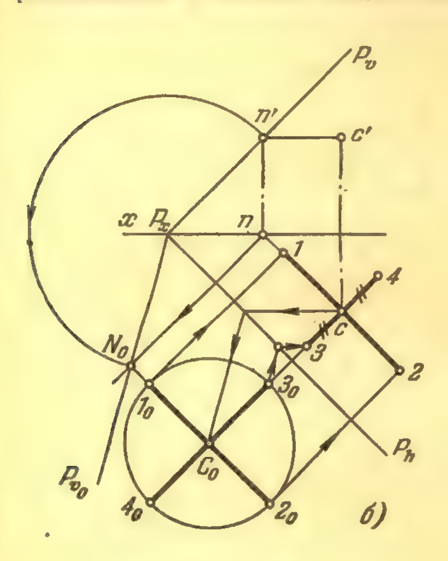


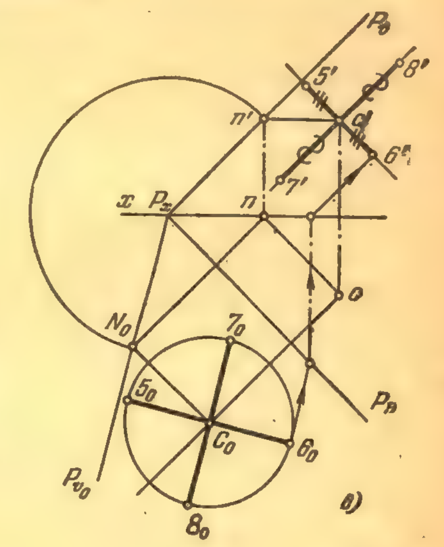
Рис. 174.

Рис. 175а.

189*. Построить проекции окружности, расположенной в пл. P (рис. 175, a). Известна величина радиуса этой окружности (R) и положение фронт. проекции (c') ее центра.

Р е ш е н и е. Прежде всего находим проекцию c центра окружности (при помощи горизонтали CN). Точки c' и c будут центрами эллипсов — проекций окружности, расположенной в плоскости общего положения P.





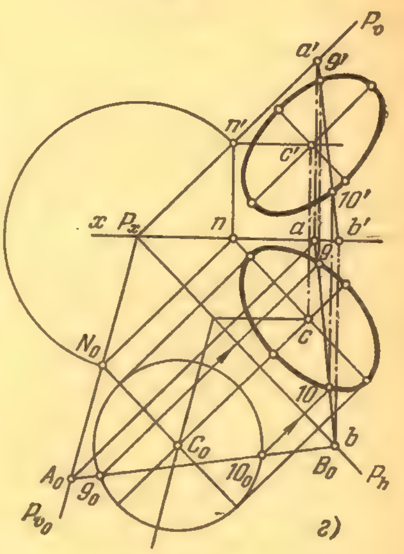


Рис. 175б—г.

На рис. 175, б показано построение осей эллипса — горизонт. проекции окружности. Большая ось расположена на горизонт. проекции горизонтали CN и равна $2R$. Положение малой оси также известно: она перпендикулярна к 1—2. Для определения величины этой оси (а также малой оси фронт. проекции) применено совмещение пл. P с пл. H, что дает возможность изобразить окружность без искажения. Ее диаметр $1_0 2_0$ соответствует отрезку 1—2, т. е. большой оси эллипса — горизонт. проекции окружности, а диаметр $3_0 4_0$ — малой оси этого эллипса. Проведя через точку 3_0 фронталь плоскости P в ее совмещенном положении ($\parallel P_{v0}$), а затем горизонт. проекцию этой фронтали, находим точку 3 и тем самым полуось c—3. Откладывая c—4 = c—3, получаем малую ось эллипса 3—4.

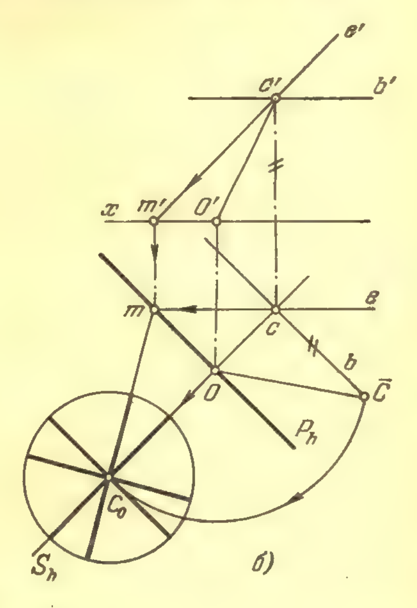
Построение осей эллипса—фронт. проекции окружности—показано на рис. 175,в. Здесь также известно положение большой оси — она лежит на фронт. проекции фронтали, проходящей через c',— и величина этой оси ($7'8' = 2R$). Малая ось перпендикулярна к $7'8'$. Величина же малой оси определяется при помощи диаметра $5_0 6_0$ окружности в ее совмещенном с пл. H положении: большой оси эллипса $7'8'$ соответствует диаметр $7_0 8_0$ окружности, а малой оси $5'6'$ — диаметр $5_0 6_0$, перпендикулярный к $7_0 8_0$. Проведя через 6_0 фронталь плоскости P до пересечения с P_h, находим затем

фронт. проекцию этой фронтали и на ней точку $6'$ — конец малой оси эллипса. Откладывая $c'5'=c'6'$, получаем малую ось $5'6'$.

На рис. 175, *г* показано построение проекций некоторых точек окружности. Взяты точки 9_0 и 10_0 на прямой A_0B_0. Построив горизонт. и фронт. проекции этой прямой, находим сначала проекции 9 и 10, а затем $9'$ и $10'$.

Найдя ряд точек, проводим через них и через концы осей эллипсы — проекции окружности.

190*. Построить проекции окружности, расположенной в плоскости, заданной ее горизонталью BC и фронталью CE (рис. 176, *а*). Известны величина радиуса этой окружности и положение центра — точка C.



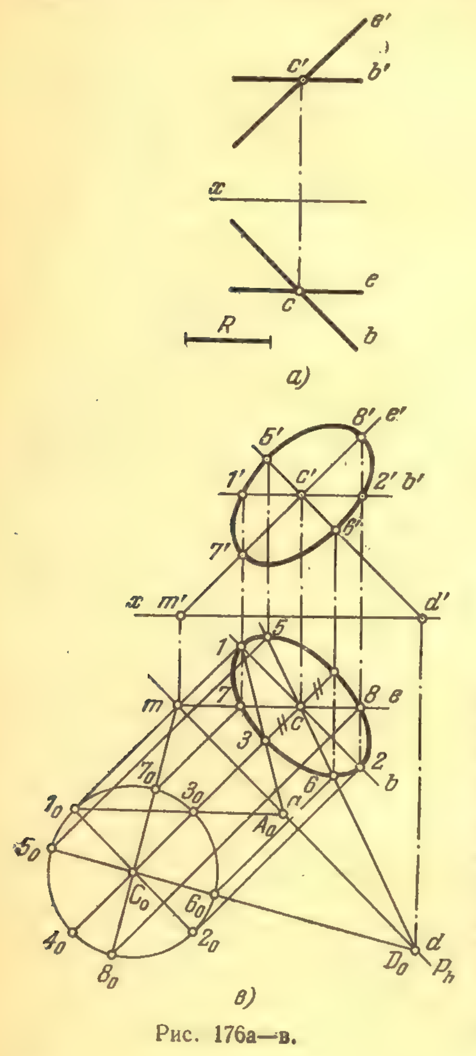


Рис. 176а—в.

Решение. Находим горизонт. след фронтали (рис. 176, *б*) и проводим через точку m след P_h параллельно cb. Определяем величину радиуса CO как величину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами cO и $c\bar{C}$ и находим совмещенное с пл. H положение центра окружности C_0. На рис. 176, *в* точка 3 построена с помощью прямой 1_03_0, продолженной до пересечения с P_h в точке $A_0(a)$, а точки 5 и 6—с помощью прямой 5_06_0, проходящей через центр C_0 и пересекающей при своем продолжении след P_h в точке $D_0(d)$.

Дальнейшие построения аналогичны выполненным на рис. 175, *б* и *в*. Они ясны из чертежа.

191. Построить проекции окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 177).

192*. Плоскость, заданную треугольником ABC, повернуть вокруг оси OO_1 так, чтобы точка K оказалась в этой плоскости (рис. 178, *а*).

Решение. Если точка K войдет в плоскость, то она окажется на одной из горизонталей этой плоскости, а именно на той, которая расположена на одном уровне с точкой K (рис.178,*б*). Поэтому проводим через k' фронт. проекцию горизонтали, находим точки $1'$ и $2'$, а по ним точки 1 и 2 и проводим горизонт. проекцию $1—2$ горизонтали.

Теперь надо повернуть горизонталь так, чтобы она прошла через точку K. Для этого опускаем из точки $O(O_1)$ перпендикуляр на $1—2$ и радиусом $O—3$ проводим дугу

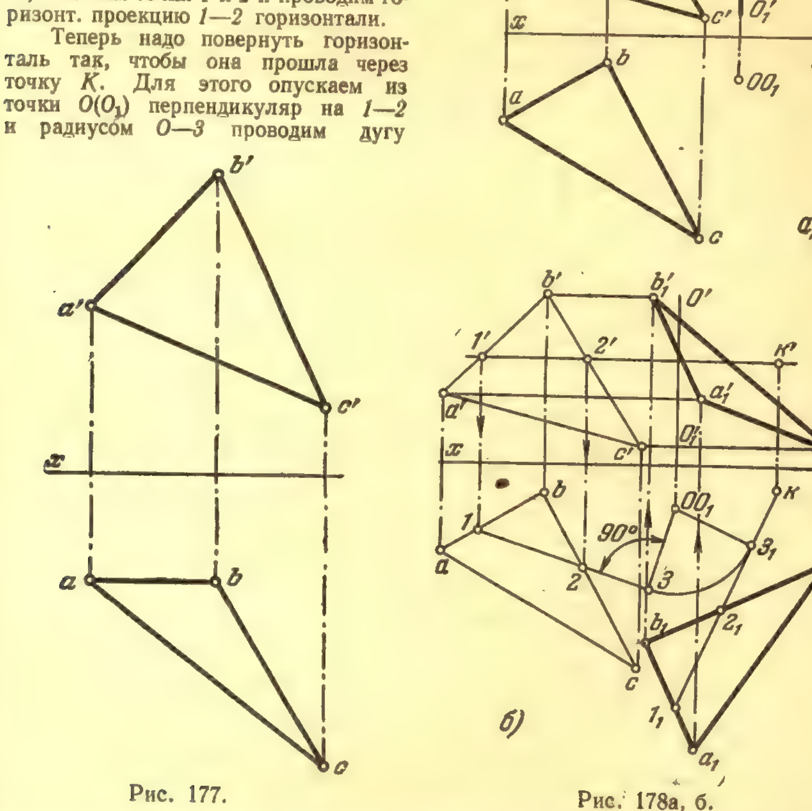


Рис. 177.

Рис. 178а, б.

окружности, по отношению к которой горизонт. проекция горизонтали является касательной в любом положении при повороте плоскости вокруг данной оси OO_1. Поэтому, проведя из k касательную к этой окружности, мы определяем положение горизонт. проекции горизонтали, на которой должна находиться точка K после требуемого поворота. Наносим на нее точки 1_1 и 2_1 ($3_1\,1_1 = 1—3$ и $1_12_1 = 1—2$), а затем строим точки a_1, b_1 и c_1 на основании известного вывода, устанавливающего неизменяемость горизонтальной проекции фигуры по форме и по размерам при повороте вокруг оси, перпендикулярной к пл. H.

По проекции $a_1b_1c_1$ строим проекцию $a'_1b'_1c'_1$. В положении $A_1B_1C_1$ треугольник проходит через точку K.

Если из K провести вторую касательную к окружности, то получится второе решение. Предоставляем читателю найти это положение треугольника ABC.

193. Плоскость, заданную треугольником ABC, повернуть вокруг оси OO_1 так, чтобы точка K оказалась в этой плоскости (рис. 179).

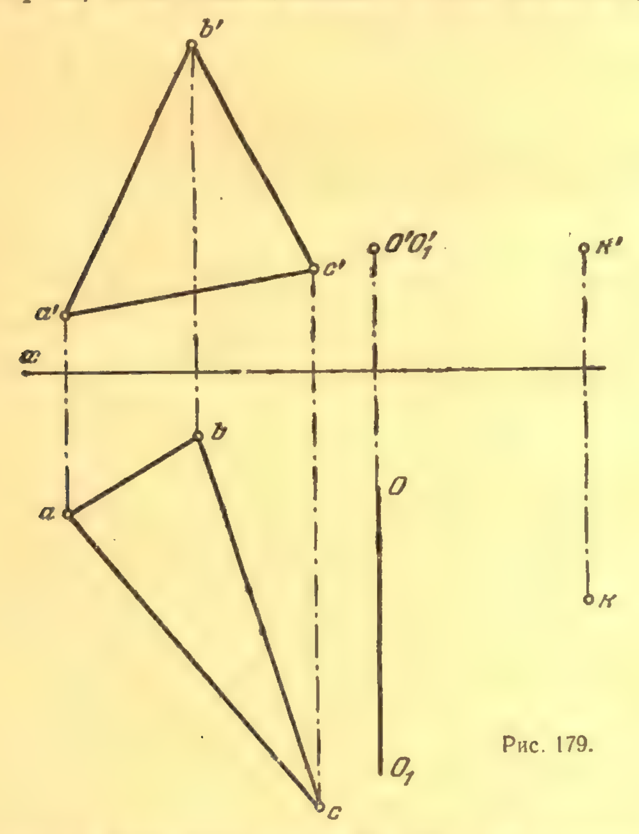


Рис. 179.

194*. Найти предельное положение осей, при котором еще возможно получить решение в задаче 192.

Решение. Положим, что плоскость, как и в задаче 192, задана треугольником (рис. 180, *а*), ось, вокруг которой надо повернуть плоскость, должна быть перпендикулярна к пл. H и точка K должна оказаться в плоскости треугольника.

Из рассмотрения рис. 180, *б* следует, что горизонт. проекция оси OO_1 должна быть расположена так, чтобы проекция k не оказалась внутри окружности с радиусом *0—3*, так как из точки k надо провести касательную к этой окружности. Следовательно, расстояние точки O от k должно быть не меньше расстояния этой же точки до прямой *1—2*.

Если провести k—*3* перпендикулярно к прямой *1—2* и разделить отрезок k—*3* пополам, то точка O может служить горизонт. проекцией оси, при повороте вокруг которой горизонт. проекция горизонтали *1—2* пройдет через точку k и, следовательно, точка K окажется в плоскости треугольника ABC. Очевидно, если взять еще какую-либо точку, расстояния которой до точки k и до прямой *1—2* равны, то и эта точка может быть принята в качестве горизонт. проекции оси, пригодной для решения поставленной задачи. Но все такие точки, расстояния которых до точки k и до прямой *1—2*

равны между собой, принадлежат параболе с фокусом в точке k и директрисой в виде прямой $1—2$. Следовательно, предельное положение осей получается, если их горизонт. проекции образуют параболу, а самые оси представляют собою образующие параболического цилиндра. На рис. 180, *б* показано построение параболы с фокусом в точке k и с директрисой $1—2$. Если взять отрезок, например l_1, провести прямую параллельно $1—2$ на расстоянии l_1 и дугу радиуса l_1 из точки k, то получатся две точки параболы. Вершина параболы — в точке O.

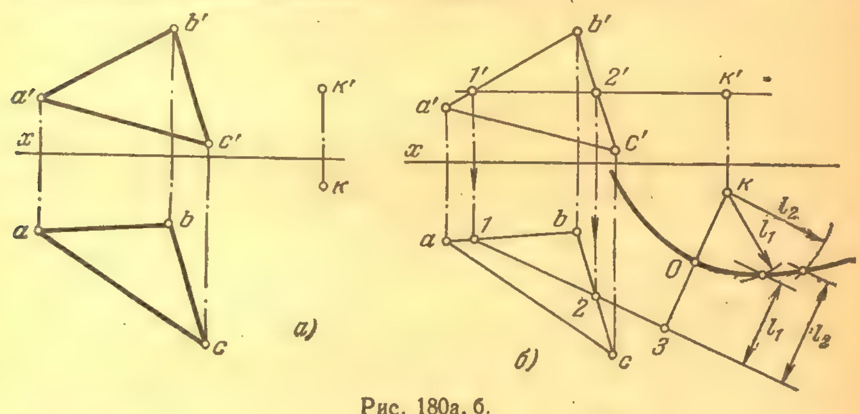


Рис. 180а, б.

Очевидно, оси, горизонт. проекции которых оказались бы внутри параболы, непригодны для соблюдения условия задачи 192. Если же взять оси вне параболического цилиндра, то за один оборот плоскости точка дважды окажется в ней.

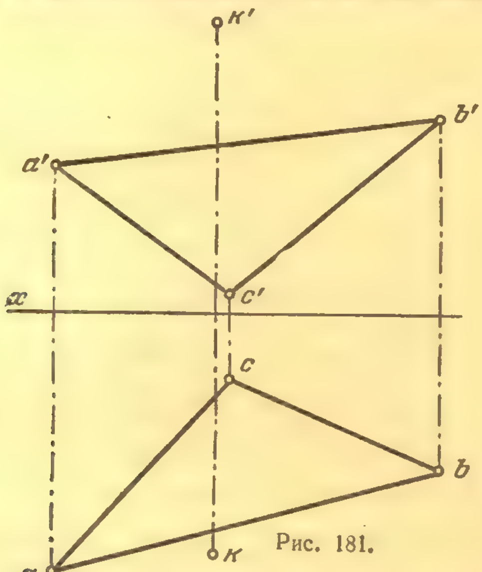


Рис. 181.

195. Найти предельное положение осей, перпендикулярных к пл. V, при повороте вокруг которых точка K окажется в плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 181).

196*. Найти точку K, находящуюся внутри пирамиды и отстоящую от грани SAB на расстояние l_1, от грани SAC — на l_2, от грани ABC (основание пирамиды) — на l_3 (рис. 182, *а*).

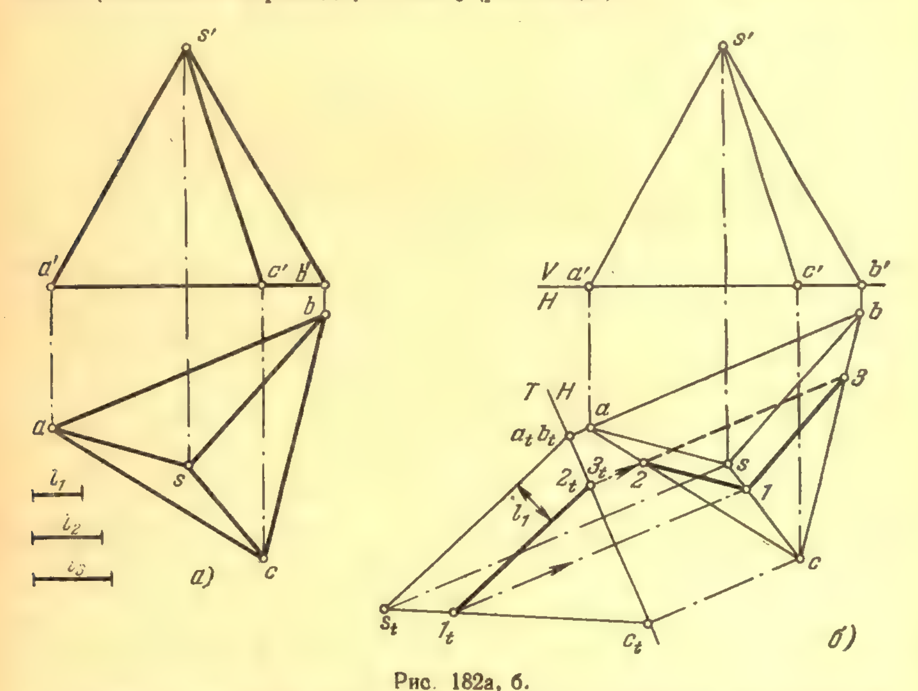


Рис. 182а, б.

Решение. Искомая точка получится как точка пересечения трех плоскостей, из которых каждая является геометрическим местом точек, отстоящих на определенное расстояние от граней пирамиды.

Введя дополнительную пл. T, перпендикулярную к грани SAB (рис. 182, *б*), получаем проекцию пирамиды, на которой грань SAB изображается прямой $s_t a_t$. Плоскость, параллельная грани SAB и удаленная от нее на расстояние l_1, изображается прямой $1_t 2_t$; эта плоскость пересекает пирамиду по треугольнику *1—2—3* (на рис. 182, *б* показана только горизонт. проекция).

Плоскость, удаленная от грани SAC на расстояние l_2, изображается на дополнительной пл. Q, перпендикулярной к этой грани (рис. 182, *в*), в виде прямой $4_q 5_q$ и пересекает пирамиду по треугольнику *4—5—6* (дана лишь горизонт. проекция этого треугольника).

Искомая точка K должна принадлежать линии пересечения плоскостей, заданных треугольниками *1—2—3* и *4—5—6*. Эта прямая проходит через точки M и N, получаемые при пересечении сторон *2—3* и *6—5*, *1—3* и *4—5* треугольников *1—2—3* и *4—5—6* (рис. 182, *г*).

Находим фронт. проекцию k' (рис. 182, *д*) на $m'n'$ из условия, что точка K отстоит от грани ABC на расстояние l_3.

Геометрическим местом таких точек является пл. P, параллельная грани ABC. По k' находим k на mn.

197. Найти точку K, находящуюся внутри призмы на расстояниях: l_1 — от грани $BCEF$, l_2 — от грани $ABDE$, l_3 — от основания ABC (рис. 183).

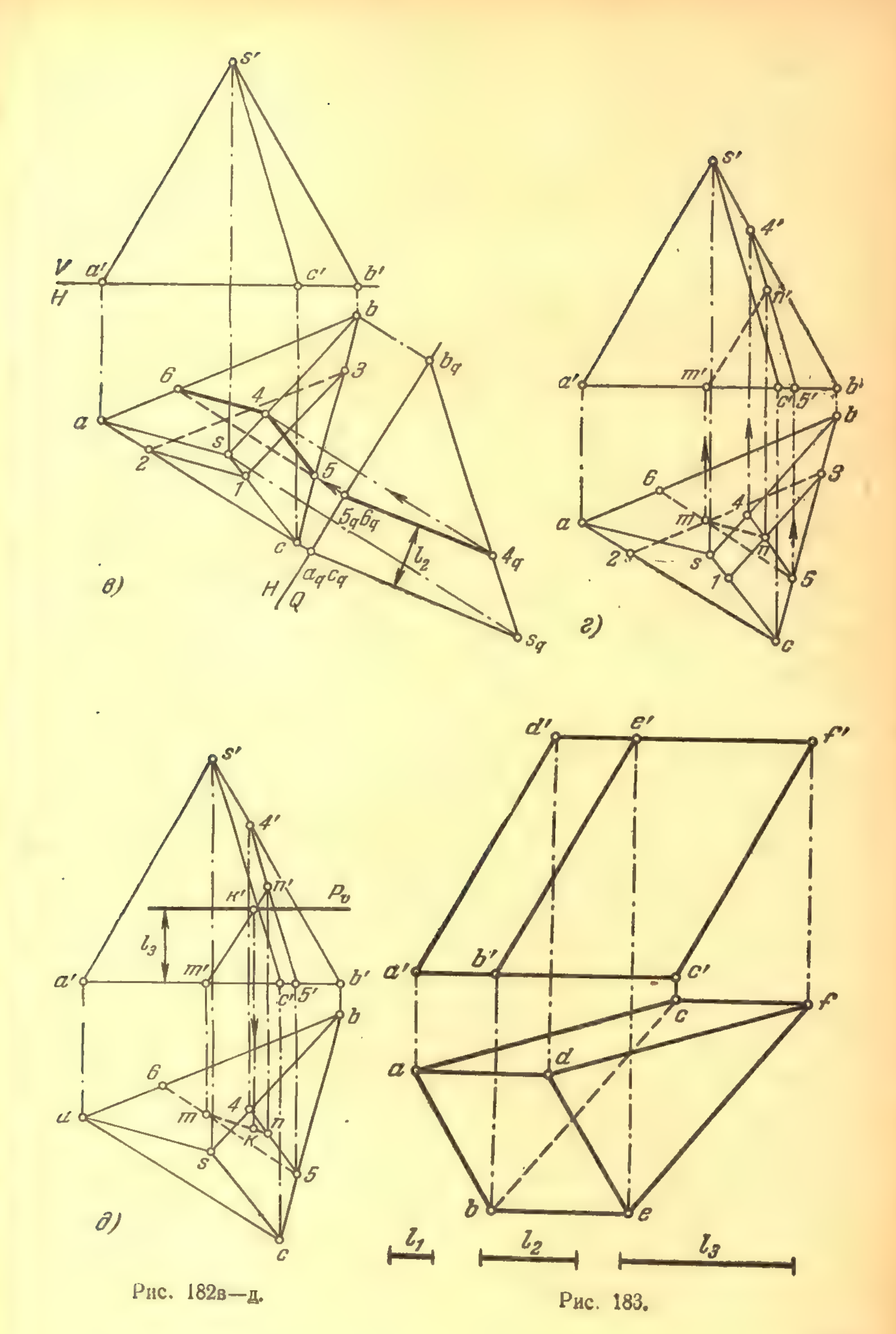


Рис. 182в—д.

Рис. 183.

198. Найти точку K, находящуюся внутри пирамиды $SABC$ на расстояниях: l_1 — от грани SAC, l_2 — от грани SBC, l_3 — от грани SAB (рис. 184).

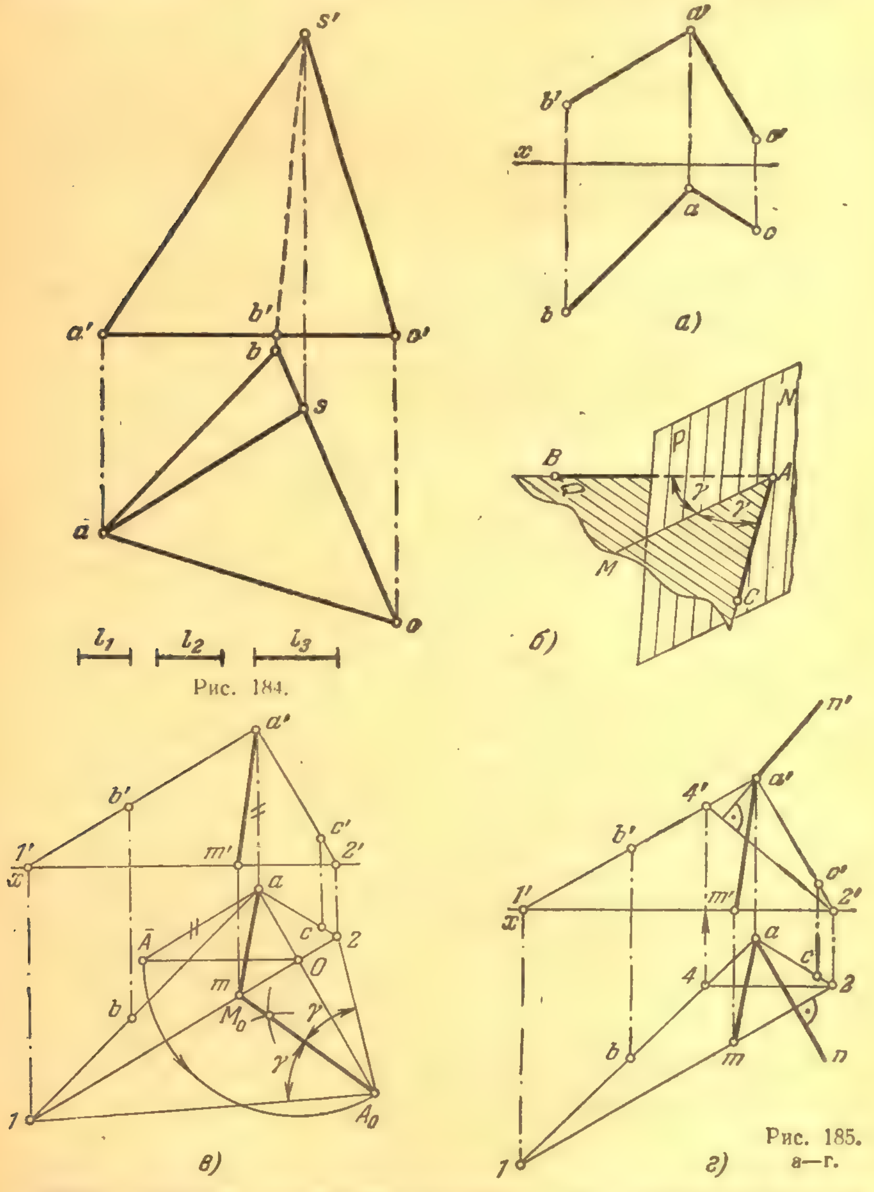


Рис. 184.

Рис. 185. а—г.

199*. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла BAC (рис. 185, *а*).

Решение. Искомым геометрическим местом является плоскость, проходящая через биссектрису данного угла перпендикулярно к его плоскости (рис. 185, *б*). Следовательно, искомая плоскость будет определяться этой биссектрисой и пересекающим ее перпендикуляром к плоскости угла *BAC*.

Для проведения биссектрисы угла *BAC* приходится построить его натуральный вид, так как непосредственное проведение биссектрисы в заданных проекциях угла возможно лишь в особых случаях, например при одинаковом наклоне сторон угла к плоскости проекций. На рис. 185, *в* показано совмещение плоскости угла *BAC* с пл. *H*, для чего построен горизонт. след (*1—2*) этой плоскости. Теперь может быть проведена биссектриса угла $1A_0 2$ — прямая A_0M_0— и построены ее проекции *am* и *a′m′*.

Остается провести перпендикуляр к плоскости угла *BAC* через какую-либо точку его биссектрисы и этим определить искомую плоскость. На рис. 185, *г* перпендикуляр проведен через вершину угла—точку *A*, для чего использован горизонт. след *1—2* и проведена фронталь *2—4*; проекция перпендикуляра $an \perp 1—2$ и проекция $a'n' \perp 2'4'$.

200. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла *BAC* (рис. 186). Искомую плоскость задать следами.

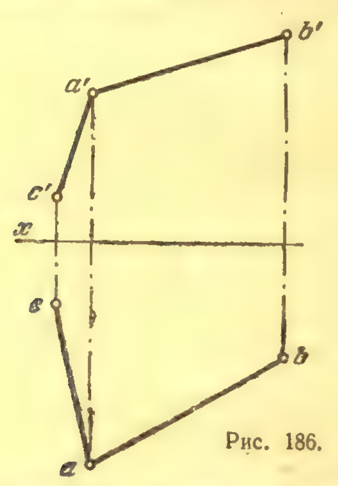
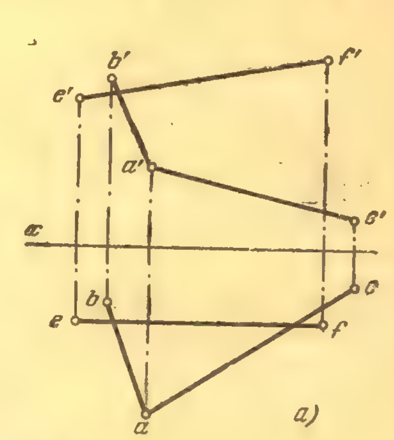


Рис. 186.



201*. На прямой *EF* (*EF* ∥ пл. *V*) найти точку, равноудаленную от сторон угла *BAC* (рис. 187, *а*).

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла *BAC*, является плоскость *P*, проходящая через биссектрису этого угла и перпендикулярная к его плоскости (рис. 187, *б*). Очевидно, искомая точка (*K*) на прямой *EF* получится при пересечении этой прямой с пл. *P*.

Построение пл. *P* на рис. 187, *в* аналогично построению на рис. 185, *в*, с той лишь разницей, что на рис. 187, *в* угол *BAC* совмещен с пл. *V* вращением вокруг фронт. следа *1′2′* плоскости этого угла. Для построения проекций перпендикуляра *AM* использован след *1′2′* и горизонталь *A—3*: $a'm' \perp 1'2'$ и $am \perp a3$.

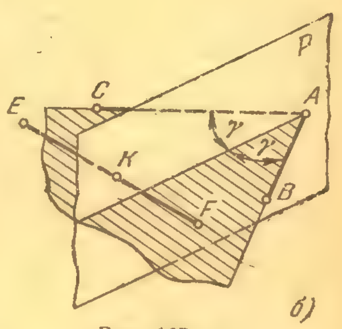


Рис. 187а, б.

Точка *K* на прямой *EF* найдена обычным способом построения точки пересечения прямой с плоскостью (рис. 187, *г*);

1) через EF проведена вспомогательная пл. T (так как прямая $EF \parallel$ пл. V, то оказалось возможным провести через нее фронтальную плоскость T),

2) построена прямая пересечения пл. P (заданной прямыми AM и AN) с пл. T (это фронталь плоскости P — прямая с проекциями $5'6'$, $5—6$),

3) найдена точка пересечения этой фронтали с прямой EF—точка K.

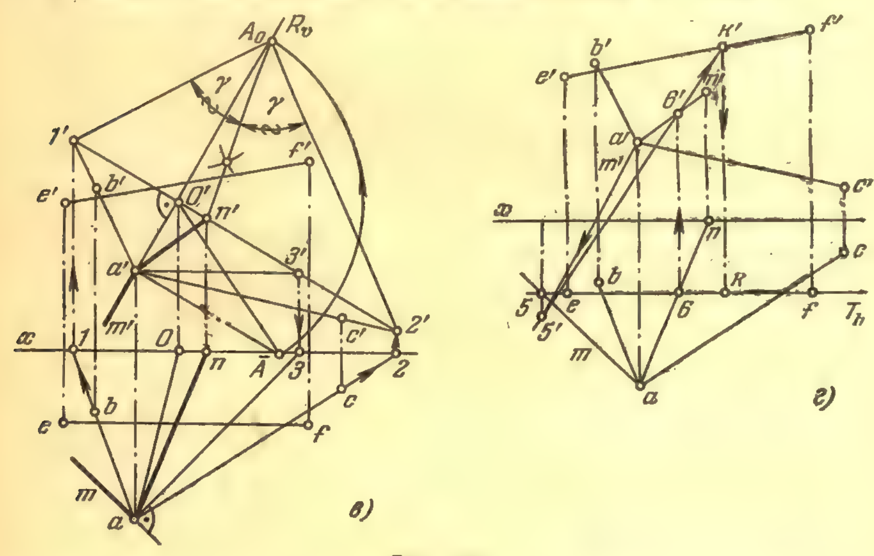


Рис. 187в, г.

202. На стороне AB основания пирамиды $SABC$ (рис. 188) найти точку K, равноудаленную от ребер SA и SC.

203. На ребре SC пирамиды $SABC$ (см. рис. 188) найти точку M, равноудаленную от ребра SA и стороны AB основания.

204*. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от пл. P и пл. Q (рис. 189, *а*).

Решение. Искомым геометрическим местом является (рис. 189, *б*) пл. R, делящая пополам двугранный угол, образованный данными плоскостями. Пл R проходит через ребро двугранного угла, г. е. через прямую MN. Если ребро MN расположить перпендикулярно к какой-либо пл. проекций T, то каждая из плоскостей P и Q, а также и пл. R изобразятся на этой плоскости проекций в виде прямых, как это показано на рис. 189, *б*, причем R_t делит угол между P_t и Q_t пополам.

Построив (рис. 189, *в*) прямую MN пересечения плоскостей P и Q, вводим (рис. 189, *г*) дополнительные плоскости S ($S \perp H$ и $S \parallel MN$) и T ($T \perp S$ и $T \perp MN$). Угол между построенными прямыми $m_t P_{xt}$ и $m_t Q_{xt}$ равен углу между плоскостями P и Q, а биссектриса этого угла $m_t R_{xt}$ представляет собою след искомой пл. R на дополнительной пл. T. Относя точку R_x к прямой $P_x Q_x$, т. е. к оси V/H, находим проекцию R_{xs} на $P_{xs} Q_{xs}$ и R_x на $P_x O_x$, т. е. на оси V/H. В точке R_x следы искомой плоскости пересекают ось V/H, а так как пл. R проходит через прямую MN, то след R_v проходит через точку n', а след R_h— через m.

205. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от пл. P и плоскости, заданной прямыми AB и CD (рис. 190).

206*. Найти на прямой AB точку, равноудаленную от плоскостей, заданных треугольниками MNC и MND (рис. 191, *а*).

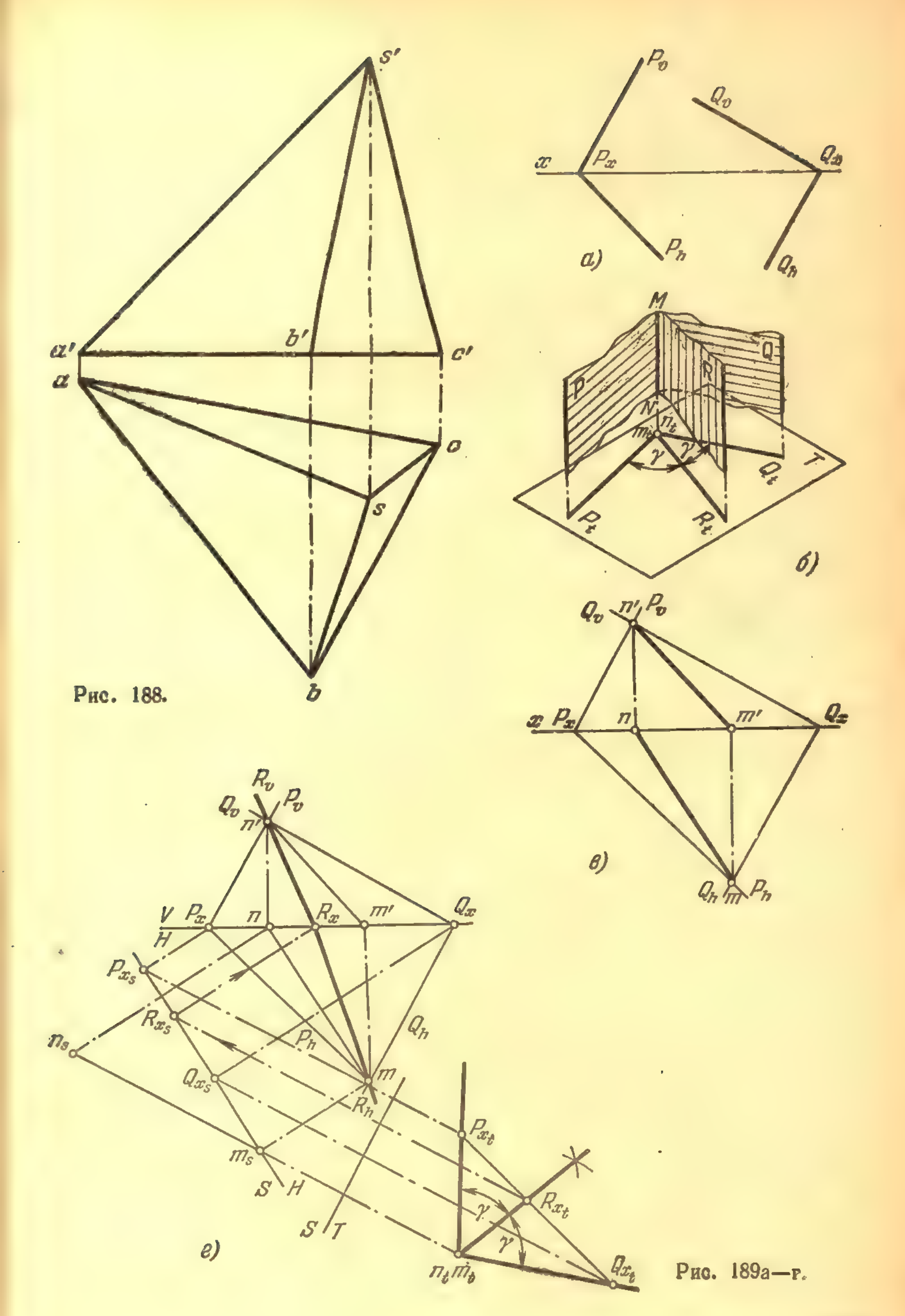


Рис. 188.

Рис. 189а—г.

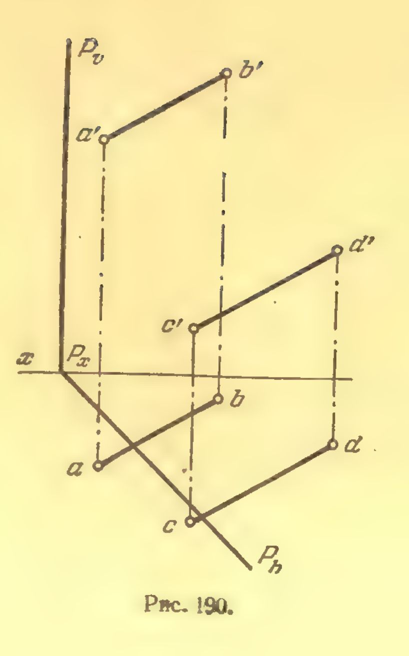


Рис. 190.

Рис. 191а—в.

Решение. Искомой точкой является точка пересечения прямой AB с плоскостью (R), делящей угол между данными плоскостями пополам (рис. 191, *б*).

Ход построения аналогичен примененному в задаче 204. Путем введения дополнительных пл. проекций S и T получаем положение, при котором ребро MN проецируется на пл. T в точку (рис. 191, *в*).

В этом положении изображаем плоскость, делящую пополам угол между гранями MNC и MND, в виде прямой R_t. В пересечении прямой $a_t b_t$ с R_t получим проекцию искомой точки K на пл. T; по ней находим k_s на $a_s b_s$, а затем k на ab и k' на $a'b'$.

207. На ребре SB пирамиды $SABC$ найти точку K, равноудаленную от грани SAC и основания ABC (см. рис. 188).

208. На стороне AB основания ABC пирамиды $SABC$ найти точку M, равноудаленную от граней SAC и SBC (см. рис. 188).

209*. Через точку A провести прямую общего положения, расположенную под углом α к пл. H и под углом β к пл. V (рис. 192, *а*).

Решение. Известно (см. задачу 22), что для прямой общего положения $\alpha + \beta < 90°$.

На рис. 192, *б* и *в* показано построение искомой прямой с применением способа вращения. На этих рисунках изображены две прямые: одна (AB_1) расположена

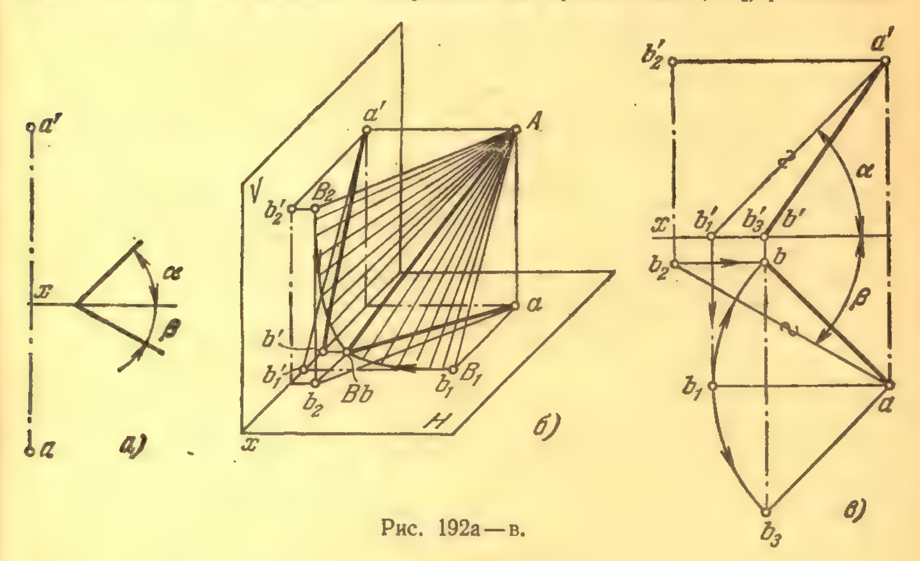


Рис. 192а—в.

параллельно пл. V и другая (AB_2) — параллельно пл. H. На обеих прямых отложены равные отрезки AB_1 и AB_2: $a'b'_1 = ab_2$.

Если теперь повернуть отрезок AB_1 вокруг оси, перпендикулярной к пл. H, а отрезок AB_2 — вокруг оси, перпендикулярной к пл. V, причем обе оси вращения проходят через точку A, то в некоторый момент оба этих отрезка совпадут (на рис. 192, *б* это показано в виде отрезка AB), и, следовательно, искомая прямая окажется построенной.

Всего можно провести через точку A четыре прямые. На чертеже (рис. 192, *в*) проводим дугу окружности радиуса ab_1 до пересечения в точке b с прямой, проходящей через точку b_2 параллельно оси x. По точке b находим b'.

На рис. 192, *в* показано еще одно (из четырех возможных) положение прямой, обозначенное AB_3.

210. Через точку A провести вправо от нее прямую общего положения AB, расположенную под углом α к пл. H и под углом β к пл. V (рис. 193), при условии, что точка B расположена в пл. H и ближе к пл. V, чем точка A.

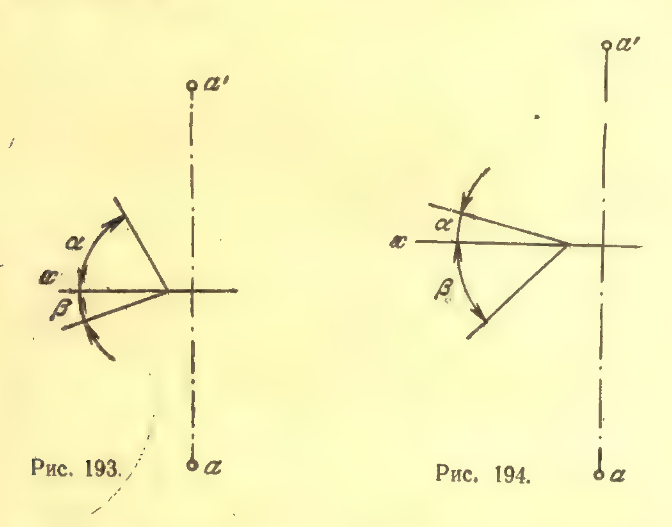


Рис. 193. Рис. 194.

211. Через точку A провести вправо от нее отрезки AB, AC, AD и AE, расположенные под углом α к пл. H и под углом β к пл. V (рис. 194).

212*. Провести через точку A плоскость, составляющую с пл. H угол α_1 и с пл. V угол β_1 (рис. 195, *а*).

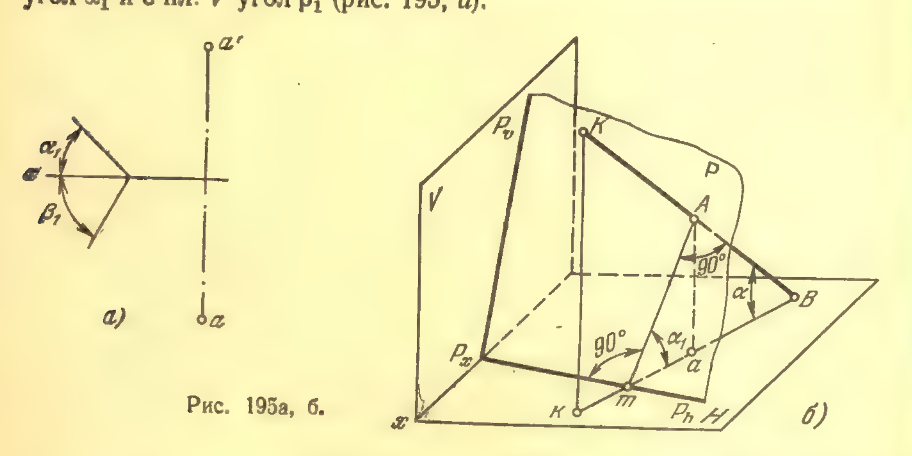


Рис. 195а, б.

Решение. Для построения искомой плоскости в данном случае использована зависимость между углами, составляемыми некоторой прямой с пл. H (угол α) и с пл. V (угол β), и углами, составляемыми плоскостью, перпендикулярной к этой прямой, с теми же плоскостями проекций H (угол α_1) и V (угол β_1). Известно, что $\alpha_1+\alpha=90°$

(рис. 195, *б*) и $\beta_1 + \beta = 90°$. Отсюда следует, что $180° > \alpha_1 + \beta_1 > 90°$. Это позволяет проверить правильность задания углов α_1 и β_1 (рис. 195, *а*).

Итак, определив углы $\alpha = 90° - \alpha_1$ и $\beta = 90° - \beta_1$, проводим через точку *A* прямую под углами α и β соответственно к пл. *H* и пл. *V* (рис. 195, *в*), как это имело место в задаче 209. Теперь через точку *A* проводим плоскость, перпендикулярную к построенной прямой *AB*. Эта плоскость на рис. 195, *г* выражена горизонталью и фронталью: $a'd' \perp a'b'$, $ac \perp ab$.

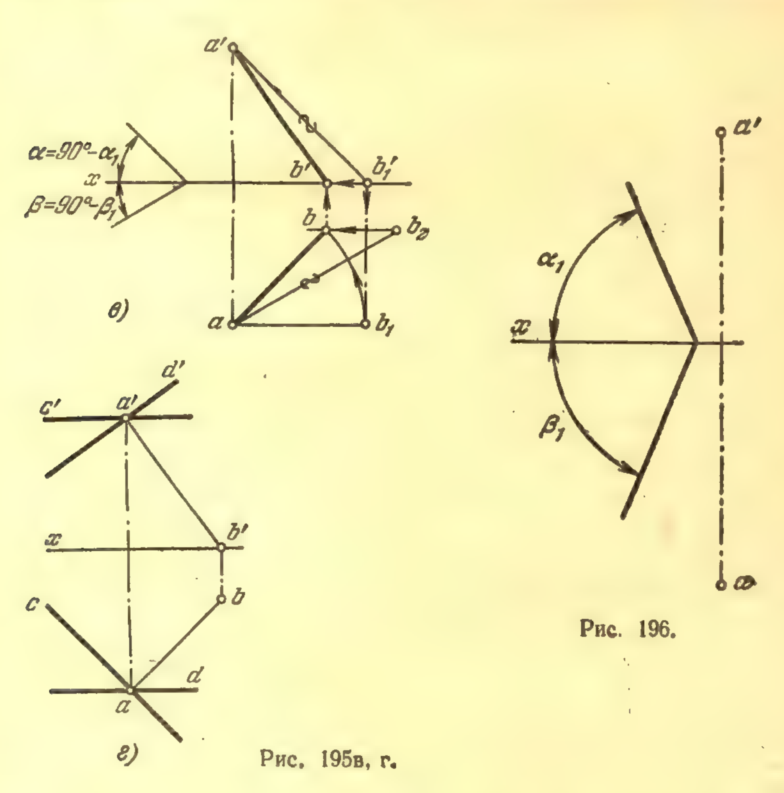


Рис. 195в, г.

Рис. 196.

213. Провести через точку *A* две плоскости (выразив их следами) под углами α_1 к пл. *H* и β_1 к пл. *V* (рис. 196), построив вспомогательные прямые под углами $\alpha = 90° - \alpha_1$ к пл. *H* и $\beta = 90° - \beta_1$ к пл. *V* — одну вправо, вглубь, вниз, от точки *A*, другую — вправо, вглубь, вверх.

214*. Построить правильную треугольную пирамиду с вершиной в точке *S*. Высота пирамиды наклонена к пл. *H* под углом α и к пл. *V* под углом β. Точка *A* — одна из вершин основания (рис. 197, *а*).

Р е ш е н и е. Проводим (рис. 197, *б*) через точку *S* прямую *SM* под заданными углами α и β к пл. *H* и пл. *V* (см. задачу 209). Плоскость основания пирамиды должна пройти через точку *A* перпендикулярно к *SM*; задаем эту плоскость горизонталью *AN* и фронталью *AK* (рис. 197, *в*). Находим точку *O* пересечения прямой *SM* с плоскостью основания. Для этого заключаем *SM* в фронтально-проецирующую

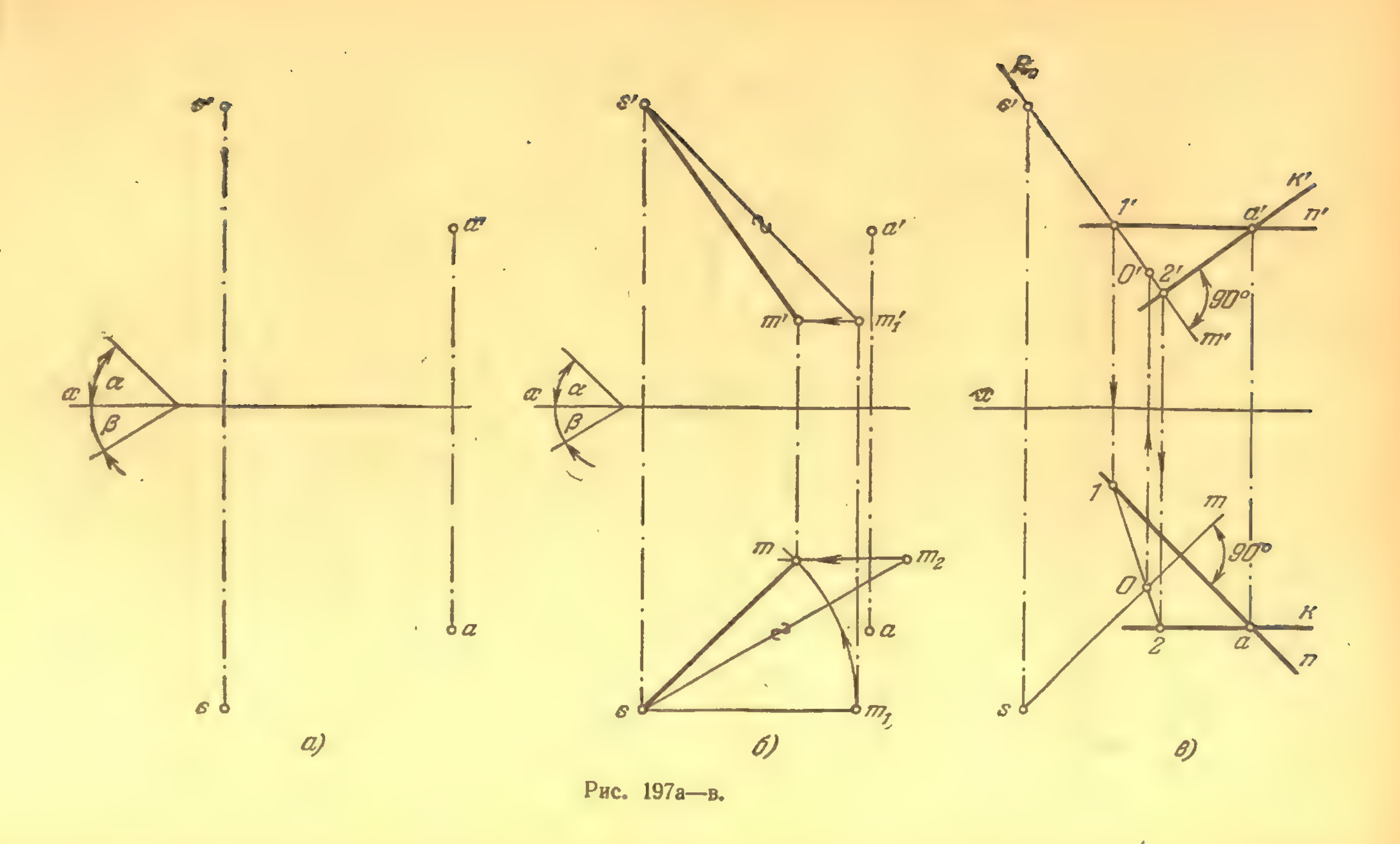
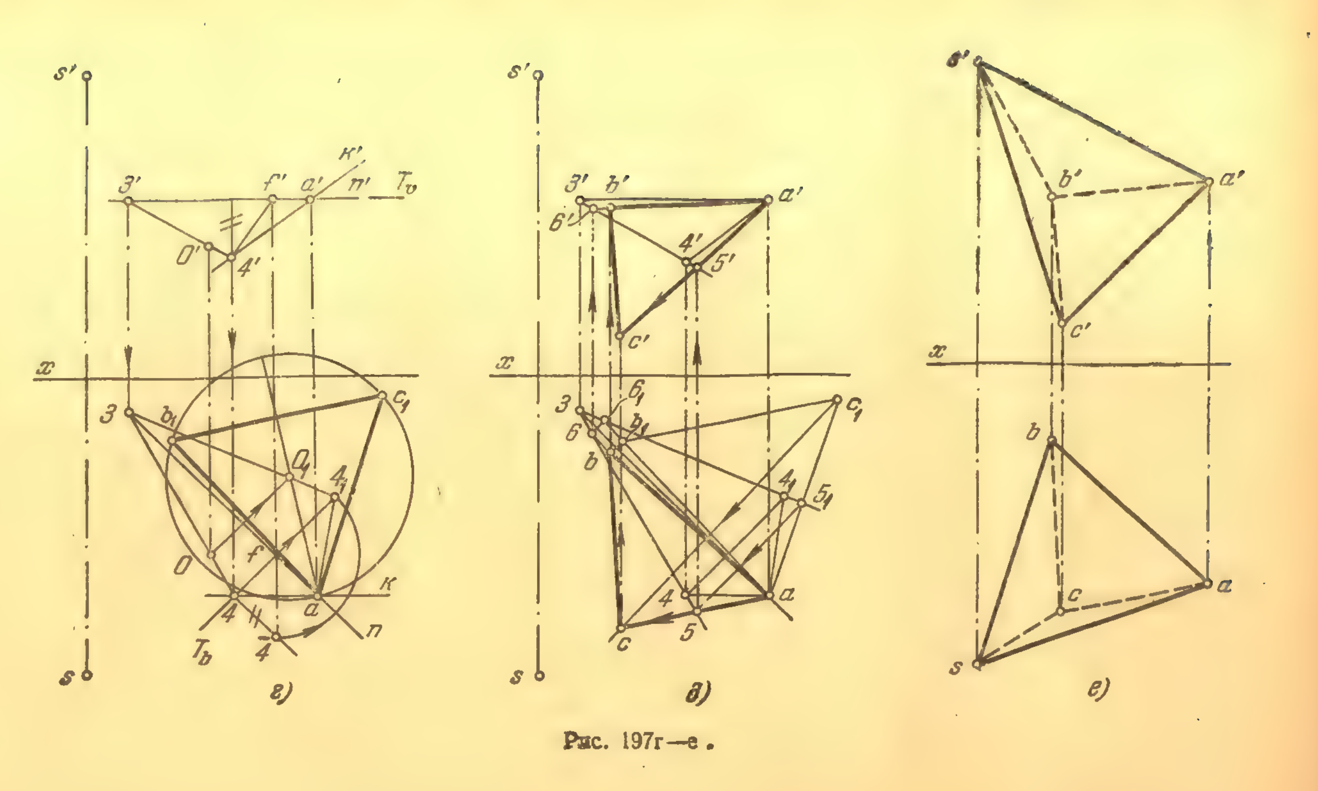


Рис. 197а—в.



s'
s
x
3'
f'
a'
k'
n'
T_v
O'
4'
3
b_1
c_1
O_1
4_1
O
f
k
4
a
n
T_h
г)
6'
b'
4'
5'
c'
6
6_1
b_1
b
4_1
5_1
5
c
д)
b'
c'
b
c
е)

Рис. 197г—е.

пл. R, изображенную только фронт. следом R_v. Для построения вершин B и C пирамиды поворачиваем плоскость основания вокруг горизонтали A—3 до совмещения ее с пл. T (рис. 197, *г*).

В плоскости основания через точку O проводим произвольную прямую 3—4. Строим совмещенное с пл. T положение точки 4 $|4_1|$ и соединяем 4_1 с точкой 3. На прямой 3—4_1 находим точку O_1, из которой радиусом O_1—a проводим окружность. Разделив ее на три части, находим вершины b_1 и c_1. Зная b_1 и c_1, находим (рис. 197, *д*) горизонт. проекции: c — на продолжении прямой a—5 (найдя сначала точку 5 по 5_1), b — на прямой a—6 (найдя сначала точку 6 по 6_1). Затем строим прямые $a'5'$ и $a'6'$ и на них точки c' и b'; $a'b'c'$ и abc — проекции основания пирамиды. На рис. 197, *е* проекции вершин s' и s соединены с одноименными с ними проекциями вершин основания.

215. Построить правильную четырехугольную пирамиду с вершиной в точке S. Высота пирамиды наклонена к пл. H под углом α и к пл. V под углом β. Точка A — одна из вершин основания (рис. 198).

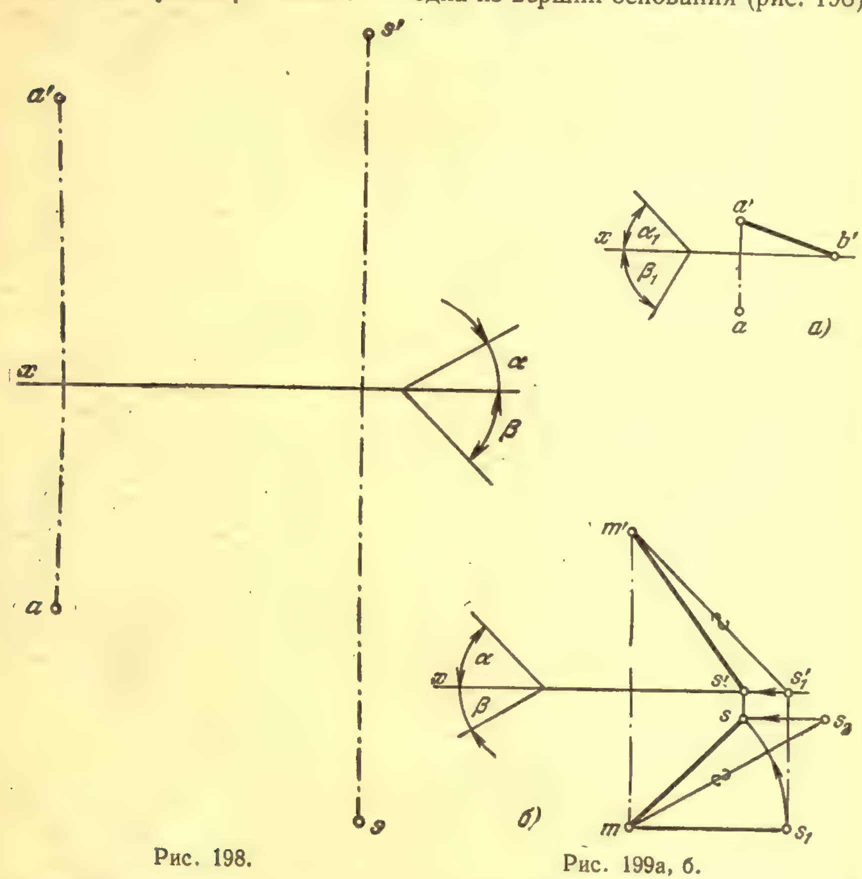
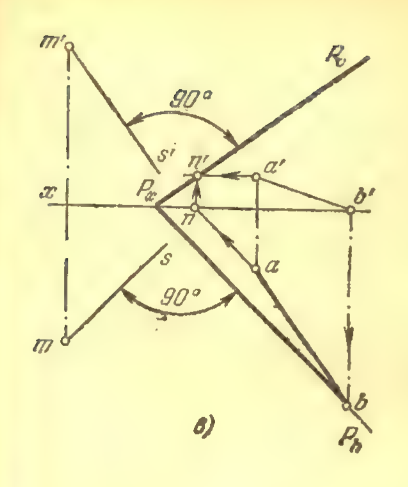
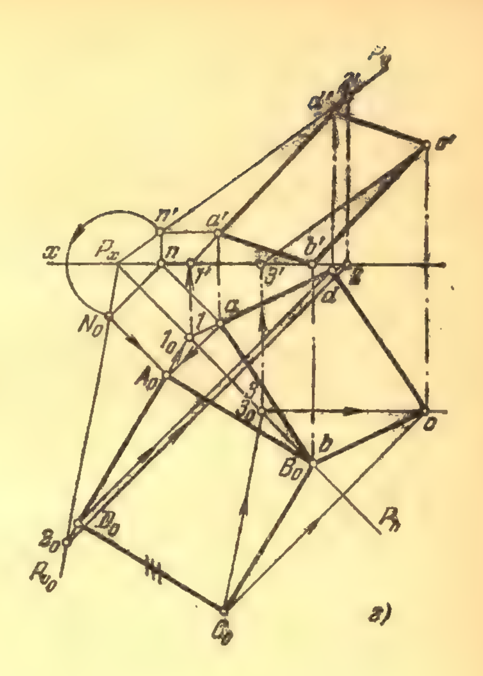


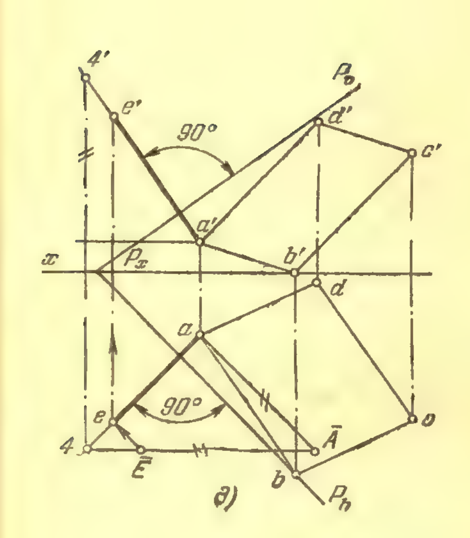
Рис. 198.

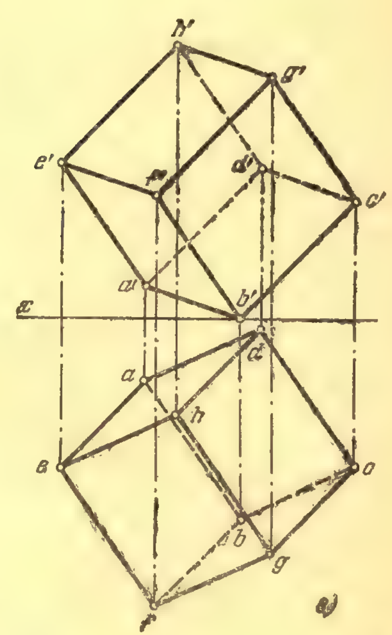
Рис. 199а, б.

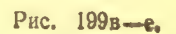
216*. Построить куб с основанием на плоскости, расположенной под углом α_1 к пл. H и углом β_1 к пл. V. Отрезок $a'b'$— фронт. проекция стороны основания куба (рис. 199, *а*).


m'
P_v
90°
s'
n'
a'
x
P_x
b'
n
s
a
90°
m
b
P_h
в)


P_v
d'
c'
n'
a'
x
P_x
n
1'
3'
b'
2'
d
a
N_0
1
1_0
A_0
3
3_0
c
b
B_0
P_h
2_0
D_0
P_{v_0}
C_0
г)


4'
P_v
e'
d'
90°
c'
a'
x
P_x
b'
d
a
e
90°
c
4
$\bar{E}$
$\bar{A}$
b
P_h
д)


h'
g'
e'
f'
d'
c'
a'
b'
x
d
a
h
e
c
b
g
f
е)


Рис. 199в—е.

Р е ш е н и е. Строим произвольную прямую MS (рис. 199, *б*), расположенную под углом $\alpha=90°-\alpha_1$ к пл. H и $\beta=90°-\beta_1$ к пл. V.

Эта прямая дает нам направление боковых ребер куба. Теперь проводим через точку A пл. P (рис. 199, *в*), перпендикулярную к этой прямой, и находим в пл. P точку B. Совмещаем пл. P и лежащий в ней отрезок AB с пл. H (рис. 199, *г*) и достраиваем квадрат $A_0B_0C_0D_0$. Затем поднимаем точки D_0 и C_0 в пространство: точку D_0 с помощью прямой 1_02_0 и точку C_0 с помощью совмещенной фронтали 3_0C_0.

Так как ребра куба перпендикулярны к основанию, то через точку A проводим (рис. 199, *д*) прямую, перпендикулярную к пл. P ($a'4' \perp P_v$ и $a-4 \perp P_h$). На этой прямой откладываем отрезок AE, равный стороне основания, хотя бы A_0B_0. Это сделано при помощи построения прямоугольного треугольника. Получив таким образом проекции $a'e'$ и ae, строим (рис. 199, *е*) проекции куба.

217. Построить прямую треугольную призму с основанием в виде равнобедренного треугольника ABC на плоскости, расположенной под

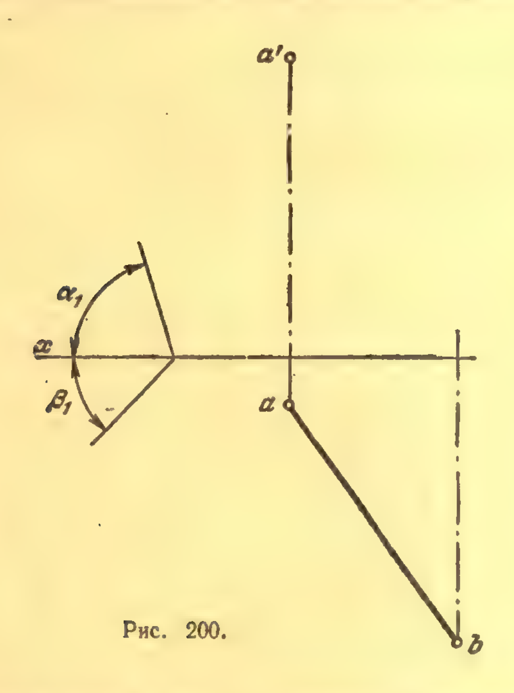


Рис. 200.

углом α_1 к пл. H и углом β_1 к пл. V. Вершина C треугольника ABC лежит на пл. H. Высота призмы равна стороне AB основания — треугольника ABC (рис. 200).

ГЛАВА VI

КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

§ 21. Кривые линии. Поверхности. Точки на поверхностях

218*. Построить проекции правой цилиндрической винтовой линии, проходящей через точку *A*, принадлежащую поверхности цилиндра. Точка задана своей фронт. проекцией (рис. 201). Провести прямую, касательную к винтовой линии в точке *A*. Шаг винтовой линии взять равным высоте цилиндра.

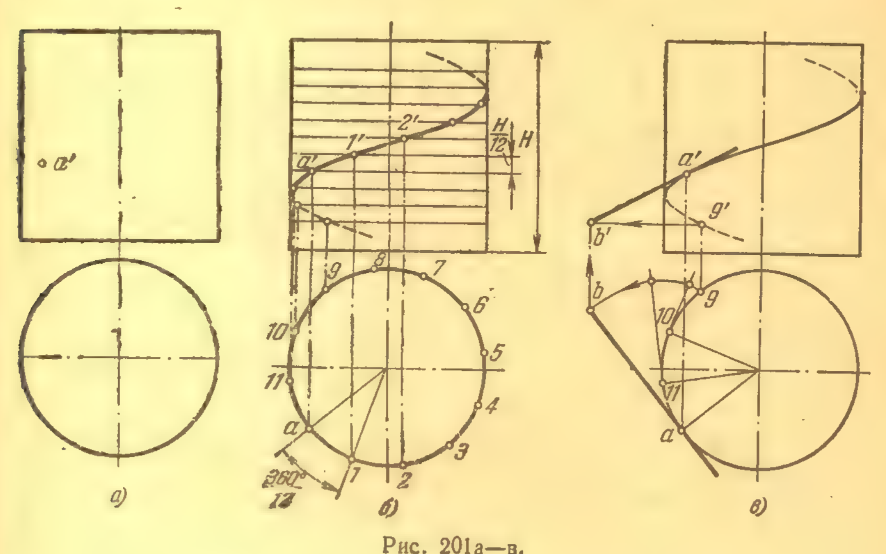


Рис. 201а—в.

Решение. При заданном на рис. 201, *a* положении цилиндра горизонт. проекция винтовой линии на нем представляет собою окружность. Делим (рис. 201, *б*) окружность, начиная от точки *a*, на 12 равных частей. Вверх и вниз от точки *a'* откладываем отрезки, равные *H* : 12. Строим фронт. проекции ряда точек, принадлежащих винтовой линии (построение ясно из чертежа).

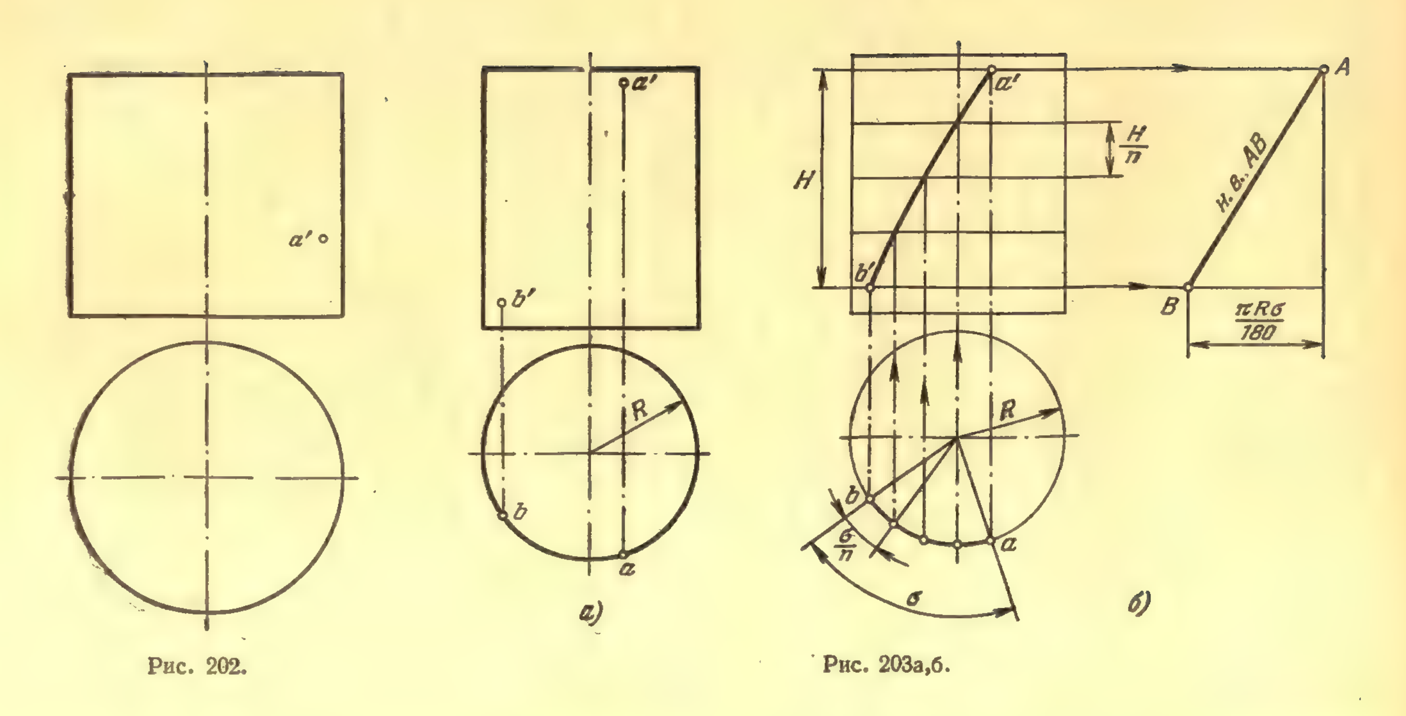


Рис. 202.

Рис. 203а,б.

Исходя из того, что касательная к кривой проецируется в касательную к проекции этой кривой, проводим касательную к окружности в точке a (рис. 201, $в$). Это горизонт. проекция касательной к винтовой в ее точке A.

Все касательные к цилиндрической винтовой линии пересекаются с плоскостью, перпендикулярной к оси этой линии, в точках, которыми образуется эвольвента окружности. Находим точку b как точку эвольвенты, отложив на касательной от точки a отрезок ab, равный по длине трем дугам $(a—11)+(11—10)+(10—9)$. Фронт. проекция b' получается на уровне точки $9'$. Фронт. проекция касательной проходит через точки a' и b'.

219. Построить проекции левой цилиндрической винтовой линии, проходящей через точку A, заданную на поверхности цилиндра (рис. 202). Провести прямую, касательную к винтовой линии в точке A. Шаг винтовой линии взять равным удвоенной высоте цилиндра.

220*. Построить проекции участка цилиндрической винтовой линии радиуса R (рис. 203, $а$), проходящей через данные точки A и B, и определить длину этого участка (кратчайшее расстояние между точками A и B на цилиндрической поверхности).

Решение. Горизонт. проекцией искомого участка винтовой линии является дуга ab. Делим (рис. 203, $б$) угол σ и расстояние H на n равных частей (в данном случае $n=4$) и строим проекции $n—1$ точек, принадлежащих винтовой линии, не считая точек A и B.

Для определения кратчайшего расстояния между точками A и B строим развертку участка AB винтовой линии. Она представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, один катет которого равен H, а другой $\frac{\pi R \sigma}{180}$.

221. Построить проекции участка цилиндрической винтовой линии радиуса R (рис. 204), проходящей через данные точки A и B, и определить длину этого участка (кратчайшее расстояние между точками A и B на цилиндрической поверхности).

222*. Найти линию пересечения цилиндрической поверхности, заданной (рис. 205, $а$) образующей CD и направляющей AB, с пл. H.

Решение. Задаем на кривой AB ряд точек и проводим (рис. 205, $б$) через них образующие. Геометрическим местом горизонтальных следов образующих будет искомая кривая линия m_1m_2, $m'_1m'_2$.

223. Найти линию пересечения цилиндрической поверхности, заданной (рис. 206) образующей CB и направляющей AB, с пл. V.

224*. Построить проекции прямого кругового цилиндра, осью которого является прямая MN ($MN \parallel$ пл. V, рис. 207, $а$), окружность нижнего основания проходит через точку A, а плоскость верхнего — через точку B.

Решение. Пользуясь тем, что ось цилиндра по заданию параллельна пл. V, проводим (рис. 207, $б$) перпендикуляры из точек B и A к оси цилиндра и находим точки O_1 и O_2 (центры окружностей оснований) и высоту цилиндра (отрезок $O'_1O'_2$). Теперь надо найти радиус основания цилиндра. Применяем способ перемены пл. пр. Вводим дополнительную пл. S, перпендикулярную к пл. V и к оси цилиндра. Искомый радиус определяется проекциями O_{2s} и a_s (рис. 207, $в$).

Строим фронт. проекцию искомого цилиндра. Для построения горизонт. проекции цилиндра находим (рис. 207, $г$) малые оси $1—2$ и $3—4$ эллипсов — проекций оснований цилиндра. Большие оси эллипсов равны диаметру основания. Строим эти эллипсы и, проведя проекции очерковых образующих, получаем горизонт. проекцию цилиндра.

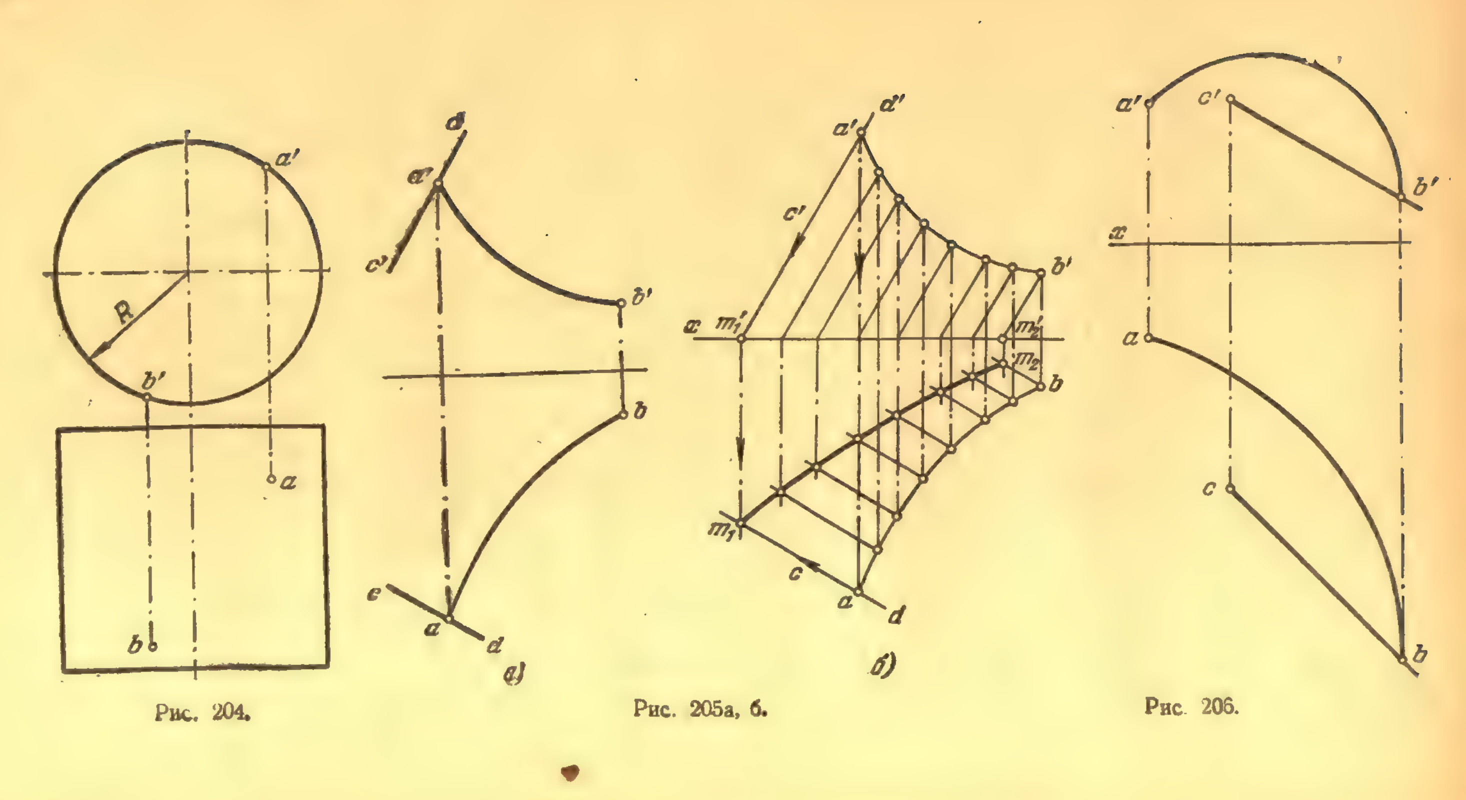
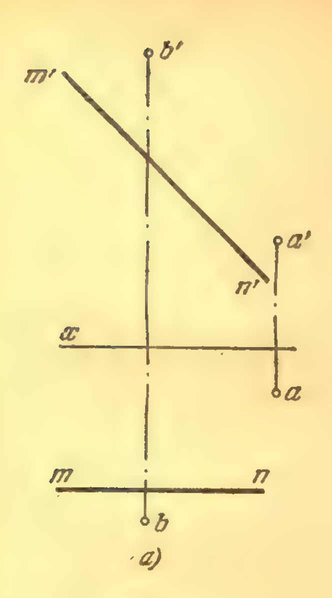
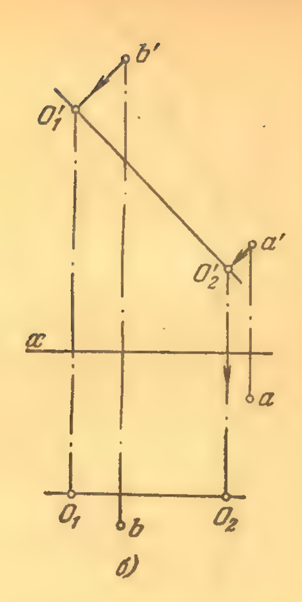


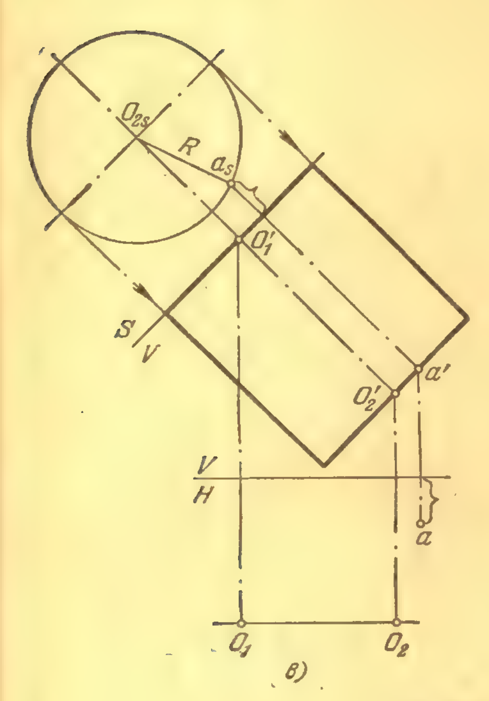
Рис. 204.

Рис. 205а, б.

Рис. 206.


b'
m'
a'
n'
x
a
m
n
b
а)


b'
O_1'
a'
O_2'
x
a
O_1
b
O_2
б)


O_{2s}
R
a_s
O_1'
S
V
a'
O_2'
V
H
a
O_1
O_2
в)

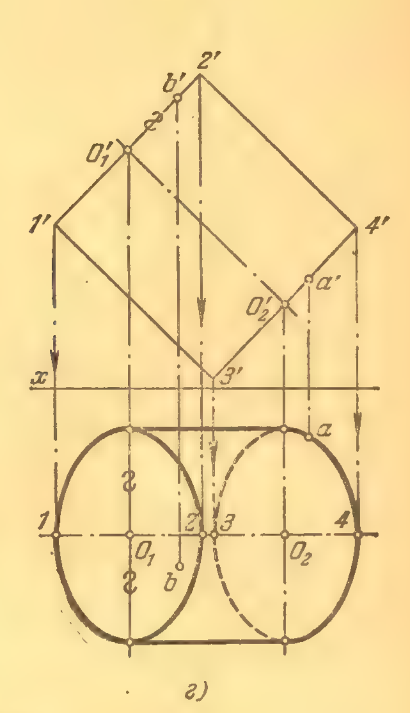

2'
b'
O_1'
1'
4'
a'
O_2'
x
3'
a
1
2
3
4
O_1
b
O_2
г)

Рис. 207а—г.

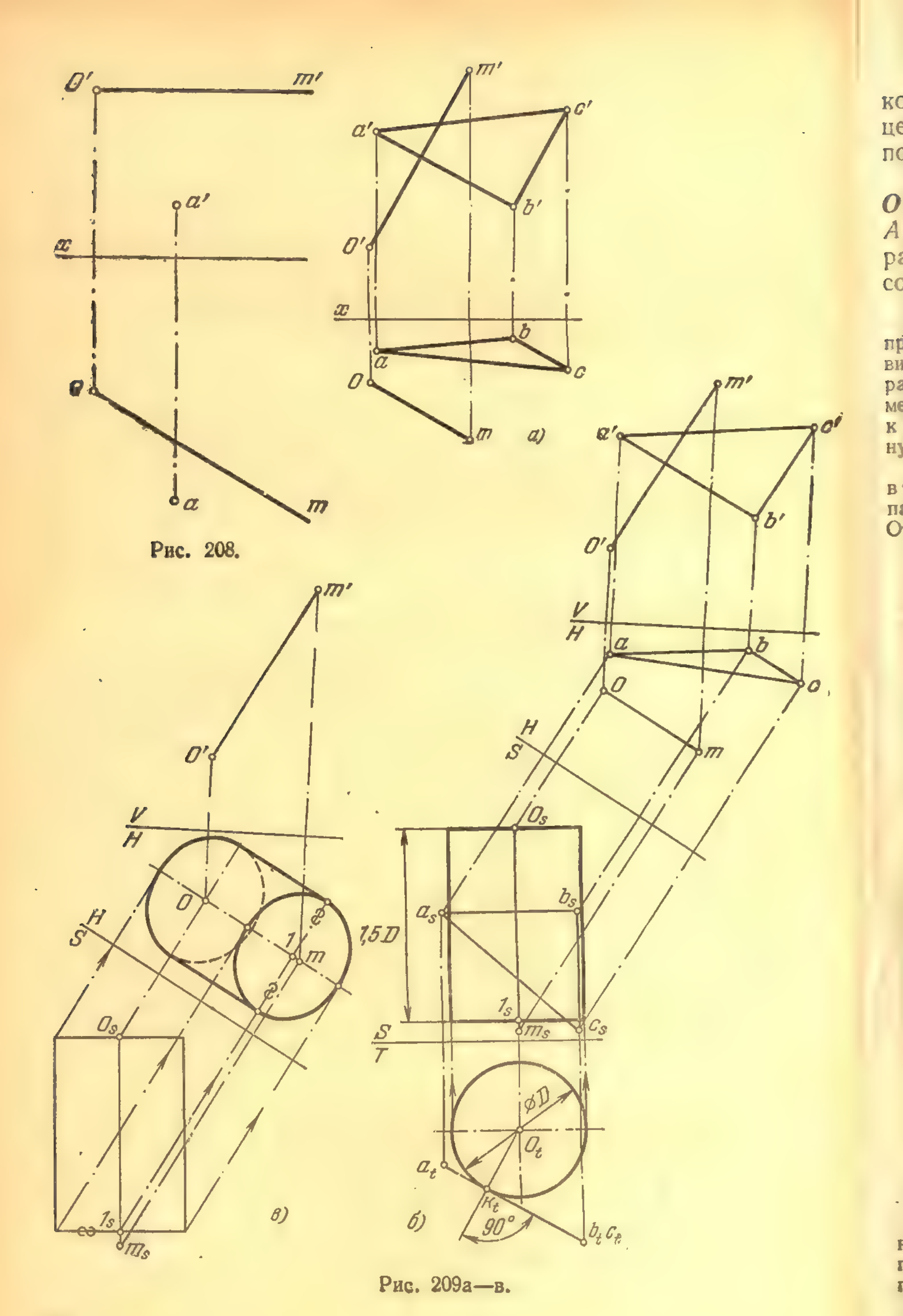


Рис. 208.

Рис. 209а—в.

225. Построить проекции прямого кругового цилиндра, ось которого лежит на прямой OM ($OM \parallel$ пл. H, рис. 208), точка O является центром одного из оснований, точка A принадлежит цилиндрической поверхности; высота цилиндра равна диаметру основания.

226*. Построить проекции прямого кругового цилиндра с осью OM (рис. 209, *а*), касательного к плоскости, заданной треугольником ABC. Высоту цилиндра, считая от точки O, принять равной полутора диаметрам основания. Прямые OM и BC параллельны между собою.

Решение. Если ось цилиндра окажется перпендикулярной к плоскости проекций, то касательная к цилиндру плоскость изобразится на той же пл. пр. в виде прямой, касательной к окружности — проекции цилиндра. Этим определится радиус основания цилиндра. Осуществляем такое построение, применяя способ перемены пл. пр. (рис. 209, *б*). Вводим дополнительную пл. S, взяв ее перпендикулярно к H и параллельно оси цилиндра OM (ось $S/H \parallel Om$), а затем еще одну дополнительную пл. T, перпендикулярную к пл. S и к OM (ось $T/S \perp O_s m_s$).

На пл. T цилиндрическая поверхность проецируется в окружность с центром в точке O_t, а плоскость треугольника ABC, касательная к цилиндру и, следовательно, параллельная оси OM,— в отрезок $a_t b_t$ прямой, касательной к этой окружности. Отсюда получаем диаметр окружности основания цилиндра, равный $2k_t O_t$.

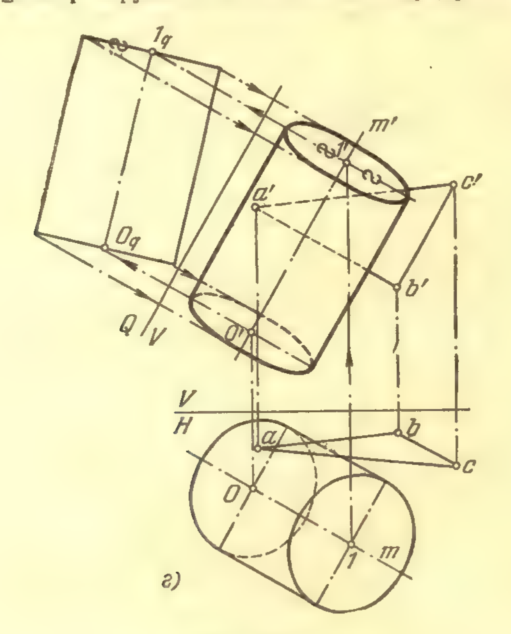


Рис. 209г.

На рис. 209, *в* показано построение горизонт. проекции цилиндра.

На рис. 209, *г* показано построение фронт. проекции цилиндра. Для определения величины малой оси эллипса на этой проекции введена еще одна дополнительная пл. Q, перпендикулярная к пл. V и параллельная OM (ось $Q/V \parallel O'm'$). Находим проекцию цилиндра на пл. Q и с ее помощью фронт. проекцию цилиндра.

227*. Найти линию пересечения конической поверхности, заданной вершиной S и направляющей AB, с пл. H (рис. 210, *а*).

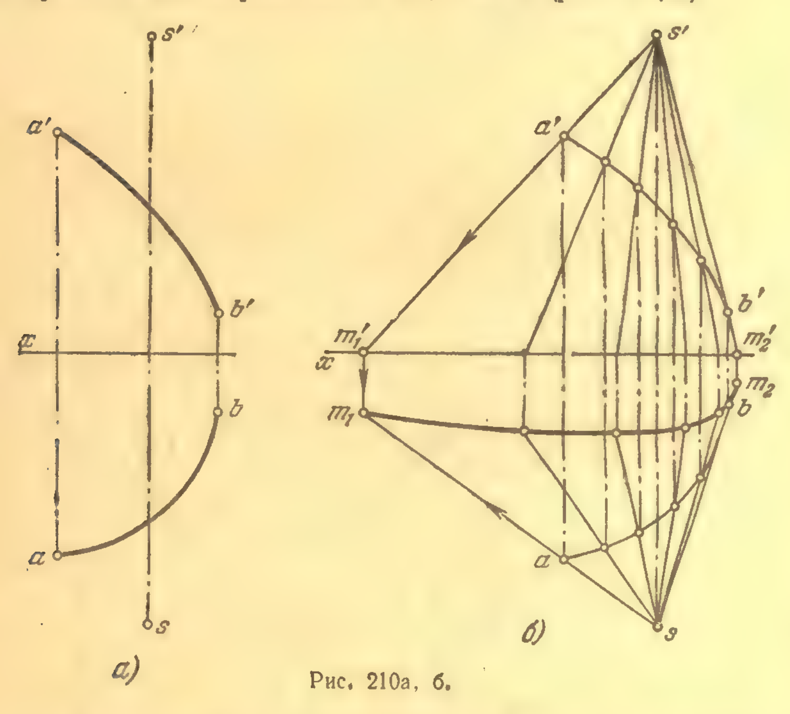


Рис. 210а, б.

Решение. Задаем на кривой AB ряд точек (рис. 210, *б*) и проводим через них образующие конуса. Геометрическим местом горизонтальных следов образующих будет искомая кривая M_1M_2.

228. Найти линию пересечения конической поверхности, заданной вершиной S и направляющей AB, с пл. V (рис. 211).

229*. Построить проекции прямого кругового конуса, ось которого лежит на прямой SM(SM||пл. V) (рис. 212, *а*). Высота конуса равна l, окружность основания касается пл. H.

Решение. Так как в данном случае прямая SM параллельна пл. V, то можно отложить (рис. 212, *б*) на $s'm'$ отрезок $s'O'$, равный l. Точка (O', O) является центром окружности основания. Эта окружность проецируется на пл. V в отрезок прямой. Поэтому, проводя через точку O' прямую, перпендикулярную к $s'O'$, получим точку $1'$, радиус основания $O'1'$ и весь диаметр основания $1'3'$.

Точка ($1'$, 1) является точкой касания основания конуса с пл. H. Фронт. проекция конуса — треугольник $1's'3'$. На пл. H окружность основания проецируется в эллипс, большая ось которого $2—4$ равна отрезку $1'3'$, а малая ось — отрезку $1—3$.

Для построения очерка горизонт. проекции конуса надо найти те его образующие, горизонт. проекции которых касаются эллипса, т. е. те, которые являются самыми крайними, если смотреть на конус сверху. На рис. 212, *в* показан вписанный в конус шар; он касается конуса по окружности, фронт. проекция которой $5'6'$. Точки 7 и 7_1 этой окружности принадлежат также и экватору вписанного шара.

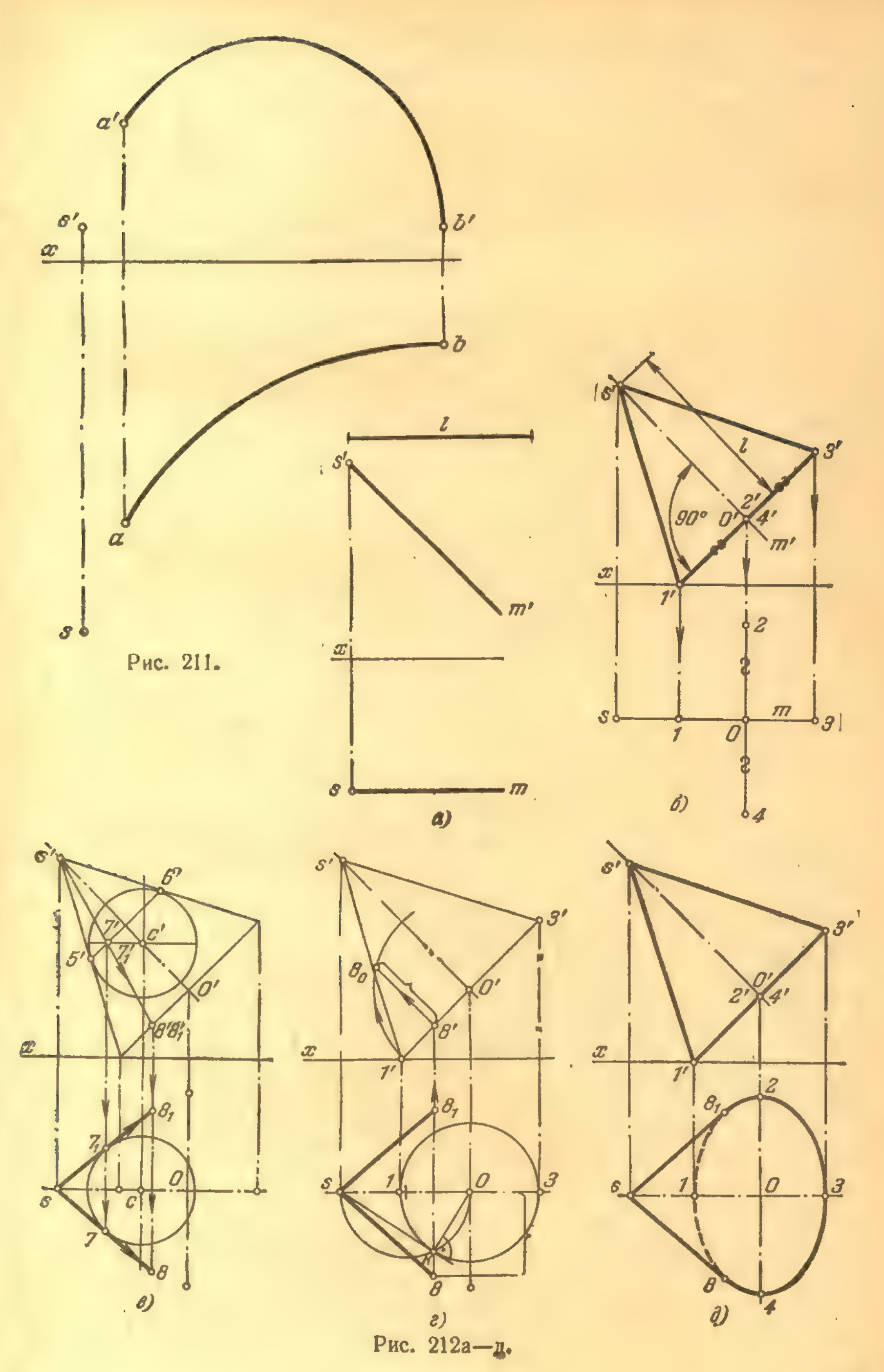


Рис. 211.

Рис. 212а—д.

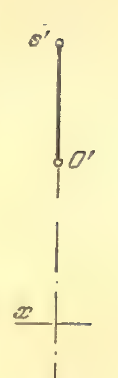
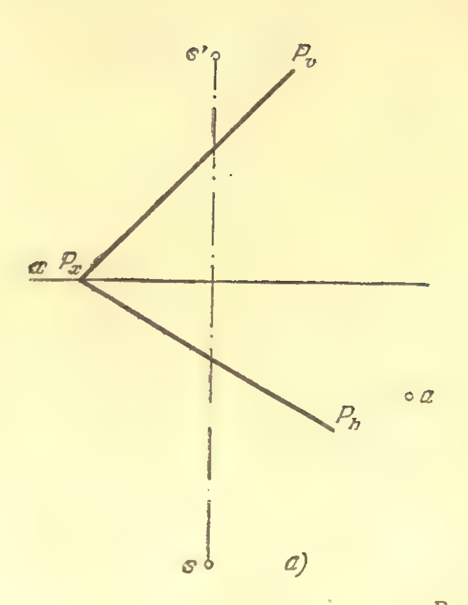
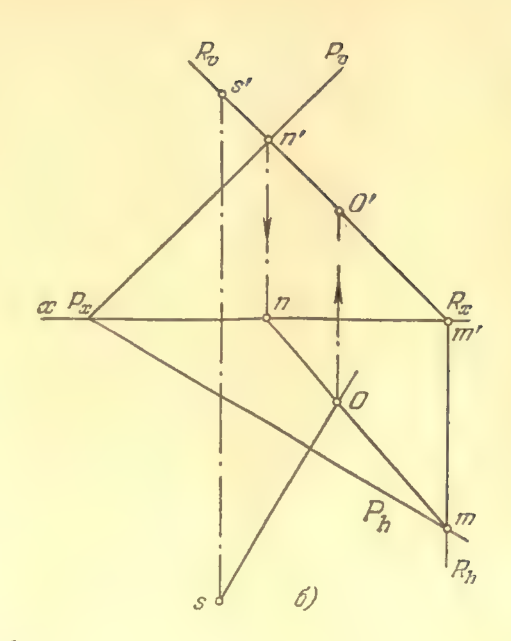


Рис. 213.





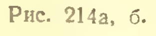


Рис. 214а, б.

Искомые образующие проходят через точки 7 и 7_1 и пересекают окружность основания в точках 8 и 8_1.

Горизонт. проекции s—7 и s—7_1 этих образующих касаются эллипса, построенного (рис. 212, *д*) по осям 2—4 и 1—3, в точках 8 и 8_1.

Очерк горизонт. проекции конуса составляется из прямых s—8 и s—8_1 и части эллипса 8—2—3—4—8_1.

Касательные к эллипсу из точки s можно провести и так, как это показано на рис. 212, *г*: сначала провести касательную из точки s к окружности, построенной на малой оси эллипса как на диаметре, получить точку k и по ней точку $8'$. Повернув окружность основания конуса до параллельности пл. V (на рис. 212, *г* показана только часть этой окружности, проведенная из точки O' радиусом $O'1'$), получаем точку 8_0 и полухорду $8'8_0$. Откладывая от прямой sO вверх и вниз отрезок, равный этой полухорде, получаем точки 8 и 8_1— точки касания очерковых образующих с эллипсом. Эллипс должен пройти через эти точки.

230. Построить проекции прямого кругового конуса, если точка S — вершина конуса, а точка O — центр окружности основания; эта окружность одной своей точкой касается пл. V (рис. 213).

231*. Построить проекции прямого кругового конуса, основание которого должно быть в плоскости P (рис. 214, *а*), вершина конуса — в точке S. Точка A принадлежит окружности основания конуса.

Р е ш е н и е. Из точки S проводим (рис. 214, *б*) перпендикуляр к пл. P и находим точку их пересечения (O', O), являющуюся центром окружности основания конуса. Совмещаем (рис. 214, *в*) пл. P с пл. H и строим совмещенные положения точек O и A (O_0 и A_0). Радиус окружности основания конуса равен расстоянию между этими точками.

Из точки O_0 проводим окружность основания и строим с ее помощью (рис. 214, *г*) эллипсы, в которые она проецируется на пл. H и пл. V (см. задачу 189).

Проведя из точек s' и s касательные к соответствующим эллипсам, получаем искомые проекции конуса (рис. 214, *д*).

232. Построить проекции прямого кругового конуса, ось которого лежит на прямой SM, а точка A принадлежит окружности его основания (рис. 215). Применить при решении способ совмещения.

233*. Построить проекции прямого кругового конуса, если его ось проходит через точку I (рис. 216, *а*), основание расположено на плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD, а плоскость, заданная треугольником EFG, касается этого конуса.

Р е ш е н и е. На рис. 216, *б* показано, что искомый конус оказывается в двугранном угле, образованном плоскостью основания (она задана параллельными прямыми AB и CD) и касательной плоскостью (заданной треугольником EFG). Ось конуса, проведенная через точку I перпендикулярно к плоскости основания, определяет в пересечении с этой плоскостью центр основания — точку O, а в пересечении с касательной плоскостью вершину конуса — точку S. Тут же определится и радиус основания OK. Очевидно, надо найти прямую, по которой взаимно пересекаются плоскость основания конуса и касательная к нему плоскость. Это прямая MN. Если ввести дополнительную плоскость проекций так, чтобы она расположилась перпендикулярно к MN, то на полученном чертеже сразу обнаружатся точки O и S и радиус окружности основания конуса.

Итак, начинаем с построения линии пересечения плоскости основания конуса с плоскостью, касательной к конусу (рис. 216, *в*). Это делаем путем нахождения точек пересечения прямых AB и CD с плоскостью треугольника EFG. Через AB и CD проведены вспомогательные горизонтально-проецирующие плоскости R и Q.

Теперь (рис. 216, *г*), последовательно вводя дополнительные плоскости проекций — пл. U, перпендикулярную к пл. V и параллельную MN, и пл. T, перпендикулярную к пл. U и к прямой MN, можно получить чертеж, на котором обе плоскости — основания и касательная к конусу — изображены в виде прямых. Проводя

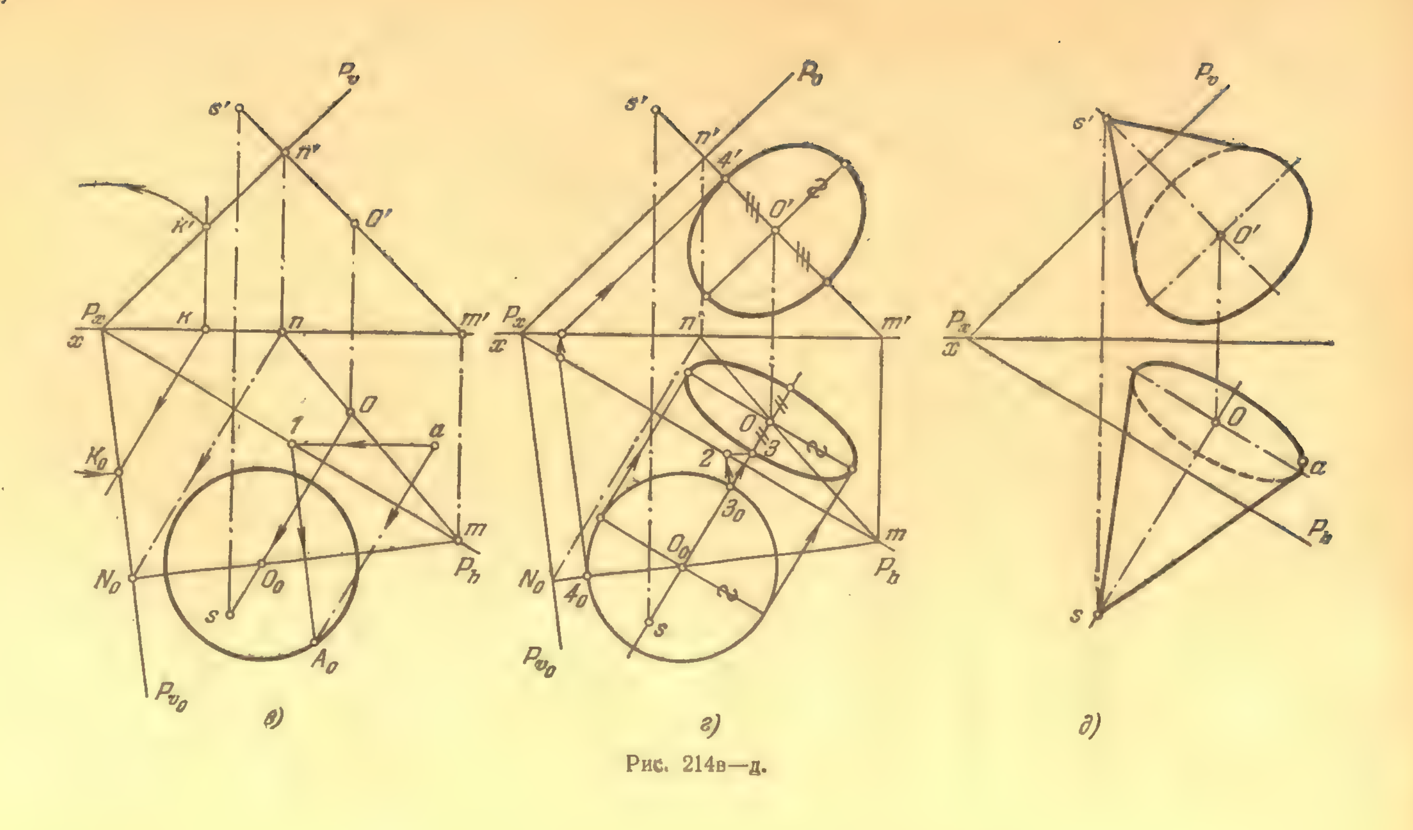


Рис. 214в—д.

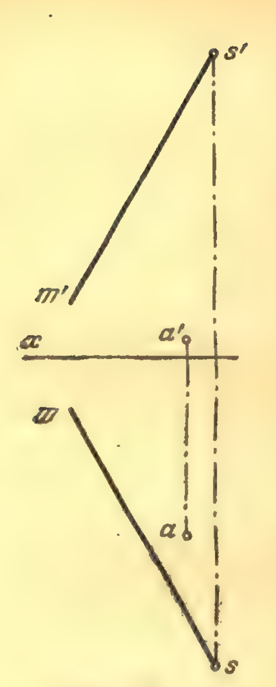
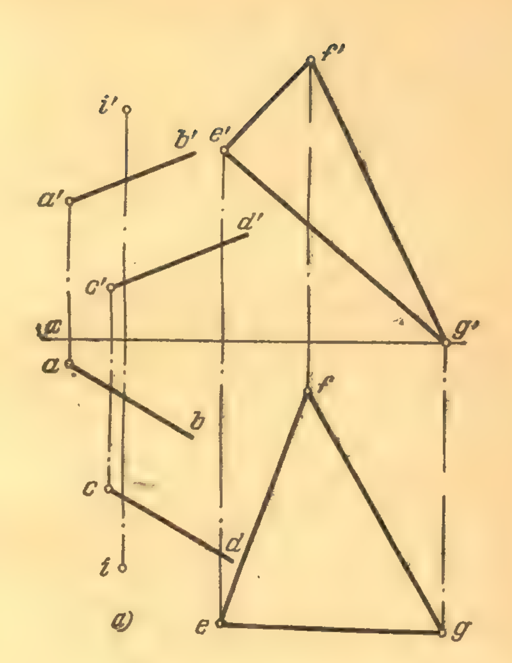


Рис. 215.



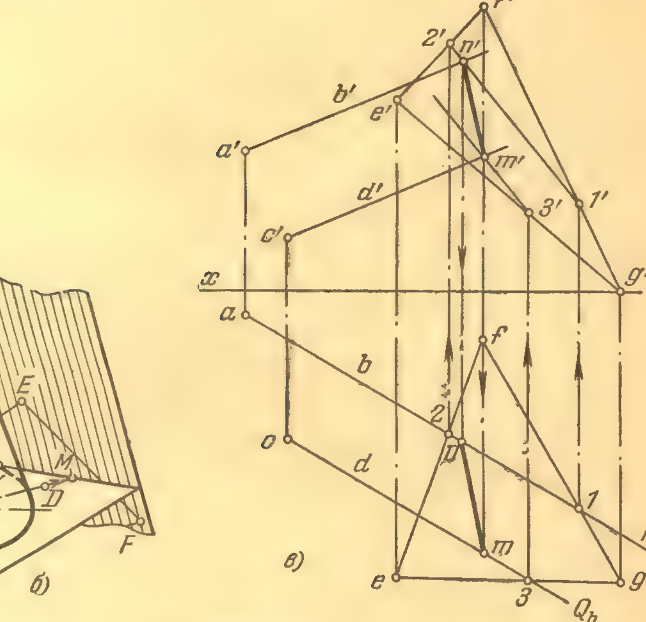
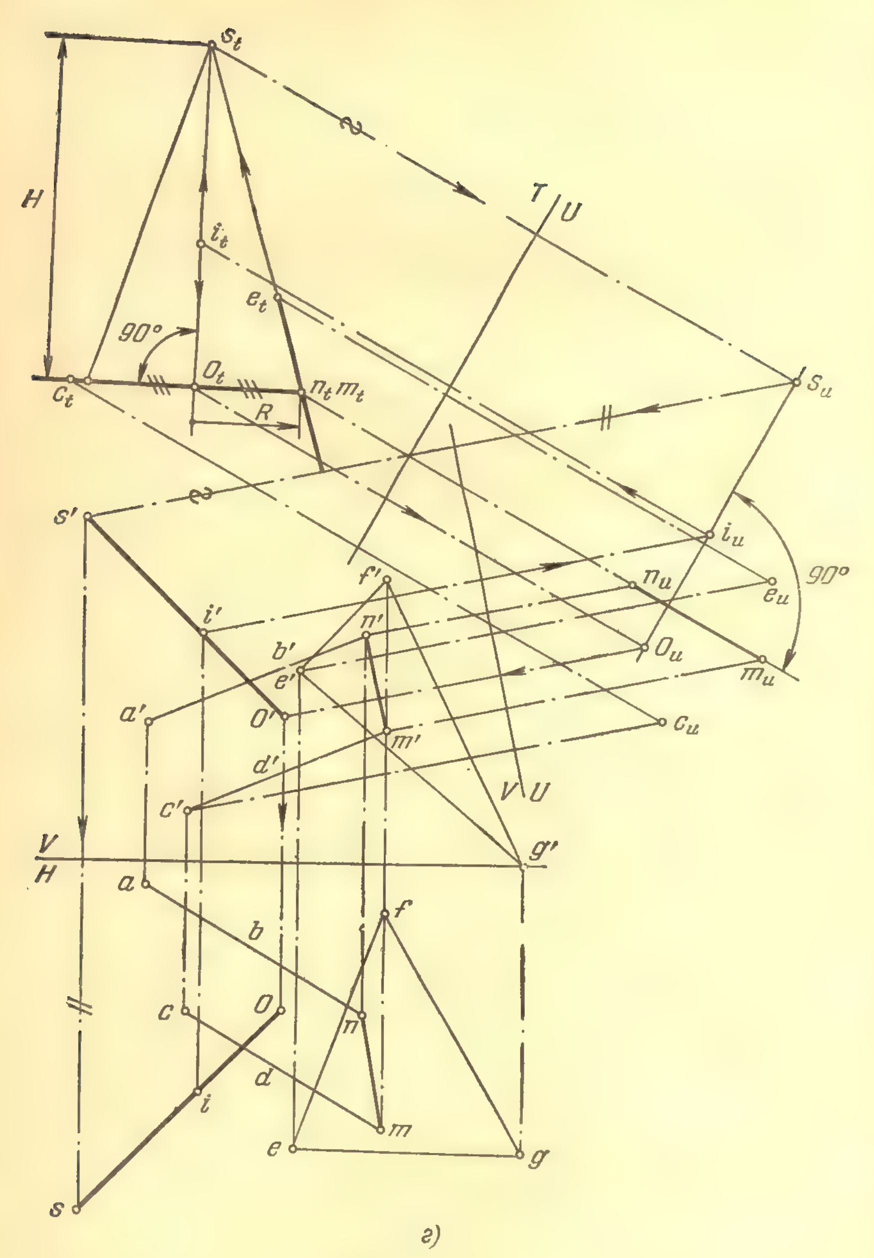


Рис. 216а—в.


s_t
H
T
U
i_t
e_t
90°
O_t
$n_t m_t$
c_t
R
s_u
s'
i_u
n_u
90°
e_u
f'
i'
n'
O_u
b'
e'
m_u
a'
O'
m'
c_u
d'
V
U
c'
V
H
g'
a
f
b
c
O
n
d
i
m
e
g
s

г)

Рис. 216г.

на этом чертеже через точку i_t проекцию высоты конуса перпендикулярно к плоскости его основания, получаем проекцию O_t центра основания и s_t— проекцию вершины конуса. Получаем также отрезок $O_t m_t$, равный радиусу основания.

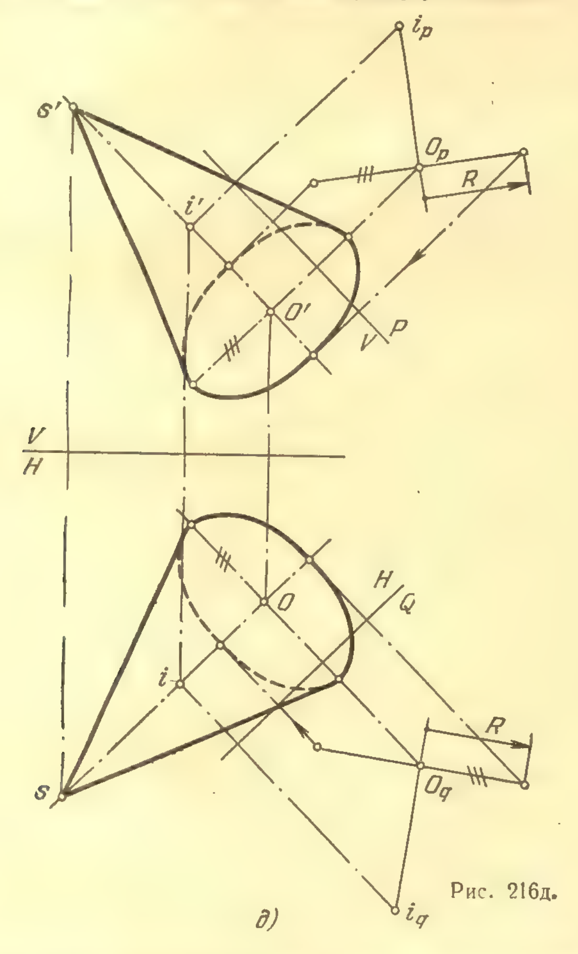


Рис. 216д.

Получив на рис. 216, *г* проекции $s'O'$ и sO, переходим к заключительной стадии построения (рис. 216, *д*), т. е. к получению чертежа конуса.

234. Построить проекции прямого кругового конуса, если (рис. 217) точка O является горизонт. проекцией центра основания, расположенного в пл. P, а плоскость, заданная прямыми AB и CD, касается поверхности искомого конуса.

235*. Даны (рис. 218, *а*) точки: O — центр сферы, A — точка на ее поверхности. Построить проекции сферы.

Решение. Радиус искомой сферы выражается отрезком с проекциями $O'a'$ и Oa (рис. 218, *б*). Определяем натуральную величину R этого отрезка и проводим из точек O' и O окружности радиусом R.

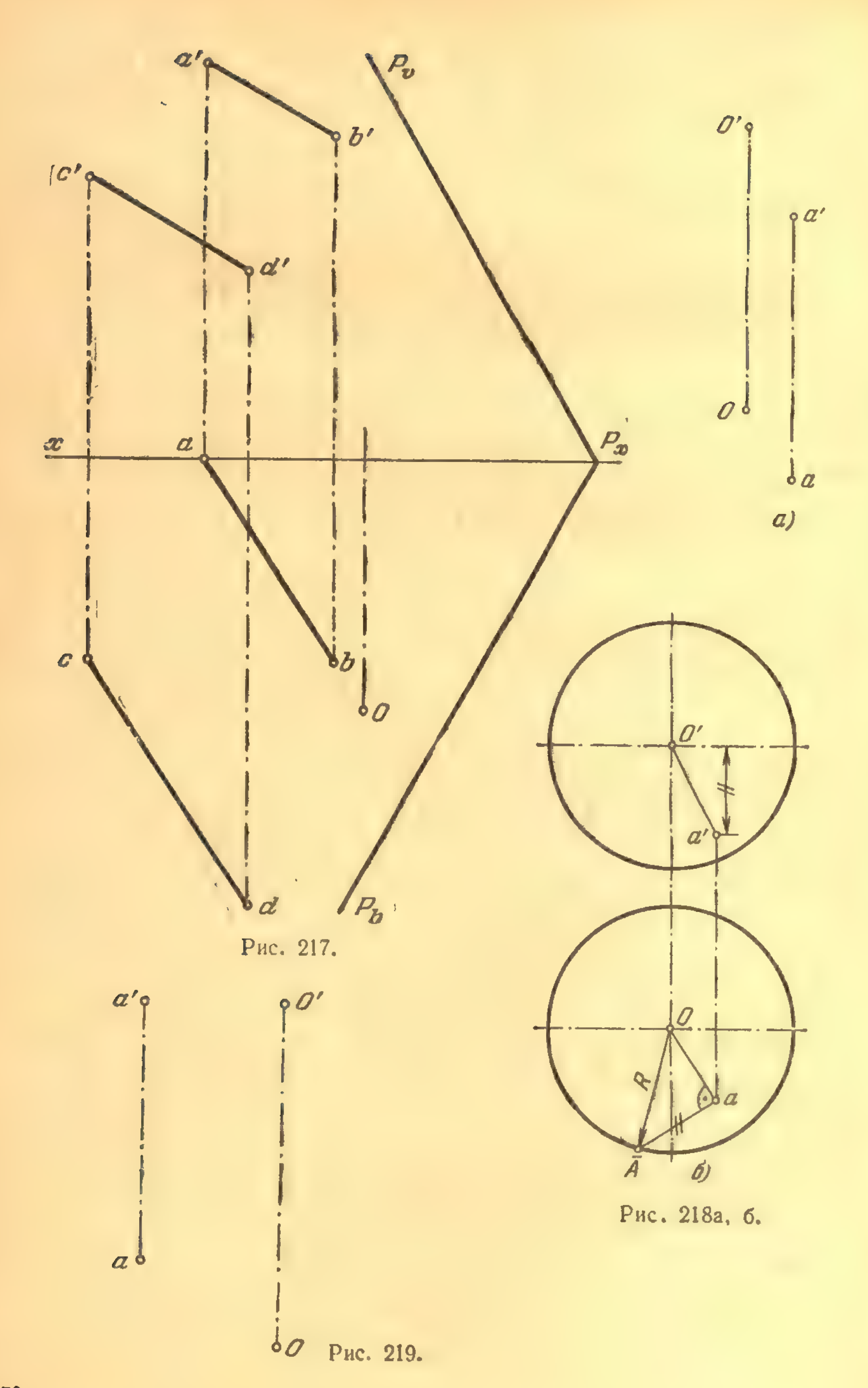


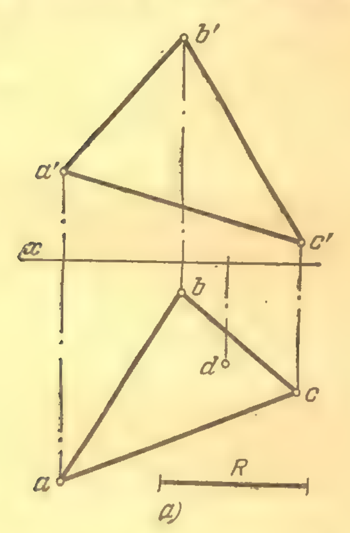
Рис. 217.

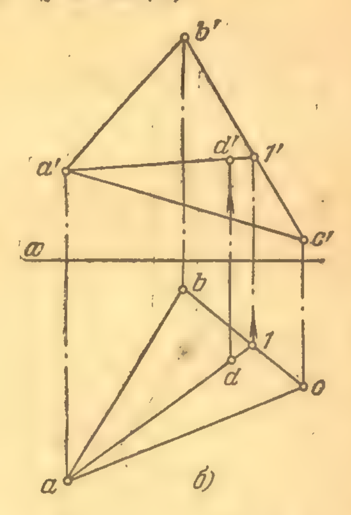
Рис. 218а, б.

Рис. 219.

236. Построить проекции сферы с центром в точке O; точка A принадлежит экватору сферы (рис. 219).

237*. Построить сферу радиуса R, касательную в точке D к плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 220, *а*).





Решение. Центр сферы должен лежать на перпендикуляре, проведенном в точке D к пл. треугольника ABC. Найдя (рис. 220, *б*) проекцию d', проводим в пл. треугольника горизонталь $A—2$ и фронталь $C—3$ (рис. 220, *в*), используя их для построения проекций de и $d'e'$ перпендикуляра к этой плоскости.

Теперь надо отложить на прямой DE от точки D отрезок, равный R. Взяв некоторый отрезок DF (рис. 220, *г*), находим его натуральную величину $\overline{DF}$, откладываем на $\overline{DF}$ отрезок, равный R, и получаем сначала проекцию O, а по ней O'. Остается провести окружности из точек O и O' радиусом R. Изображена лишь одна сфера — по одну сторону плоскости. Если от точек d и d' отложить на продолжении прямых de и $d'e'$ отрезки $dO_1=dO$ и $d'O'_1=d'O'$ (эти построения на чертеже не показаны), то точка O_1 будет центром второй сферы с тем же радиусом R, касательной к плоскости треугольника ABC в точке D.

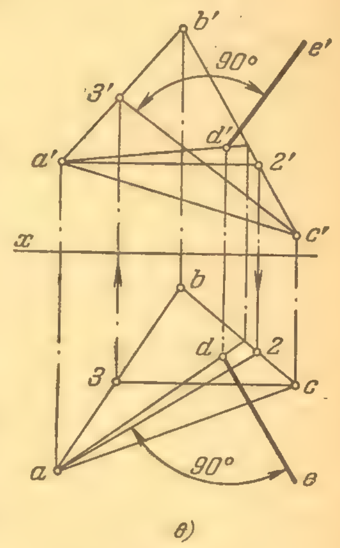


Рис. 220а—в.

238. Построить сферу, касательную к плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 221), если центр тяжести площади треугольника является точкой касания, а радиус сферы равен половине стороны BC.

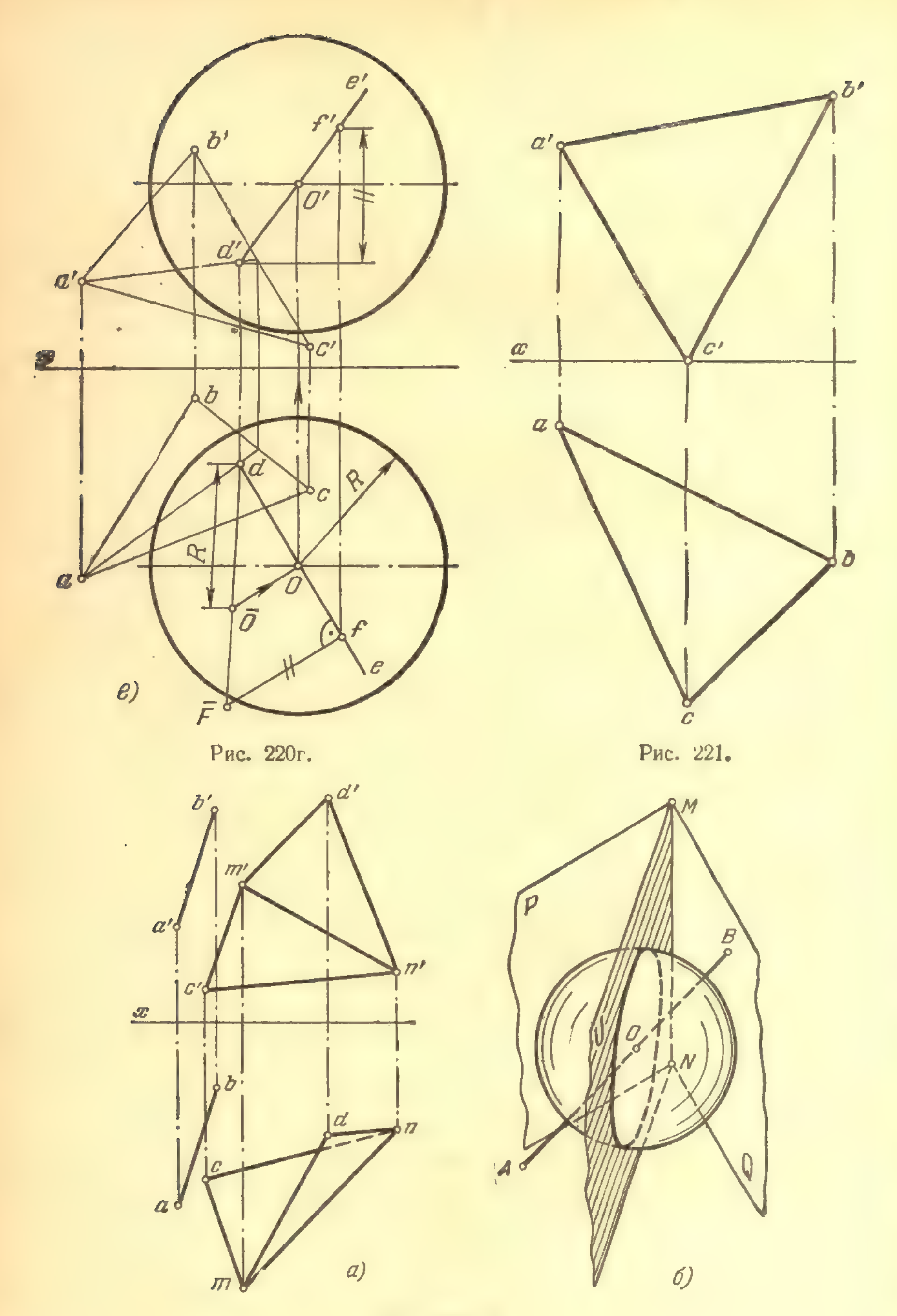


Рис. 220г.

Рис. 221.

Рис. 222а, б.

239*. Построить сферу с центром на прямой AB (рис. 222, *а*), касательную к плоскостям, заданным треугольниками MNC и MND.

Решение. Геометрическим местом центров сфер, касательных к заданным плоскостям P и Q (рис. 222, *б*), является плоскость (U), проходящая через линию их пересечения MN и делящая двугранный угол между плоскостями пополам.

Центр искомой сферы — точка O находится в точке пересечения плоскости U с прямой AB. Радиус R сферы равен расстоянию от точки O до любой из заданных плоскостей.

Все это легко получить, применяя способ перемены пл. пр. (рис. 222, *в*). Первую дополнительную плоскость проекций (S) вводим так, чтобы она была перпендикулярна к пл. H и параллельна ребру MN двугранного угла, а затем вторую дополнительную пл. T перпендикулярно к пл. S и к тому же ребру MN. Получив проекцию двугранного угла в виде угла $c_t m_t d_t$, проводим в нем биссектрису, изображающую пл. U, находим точку O_t и отрезок $O_t k_t = R$. Остальное ясно из чертежа.

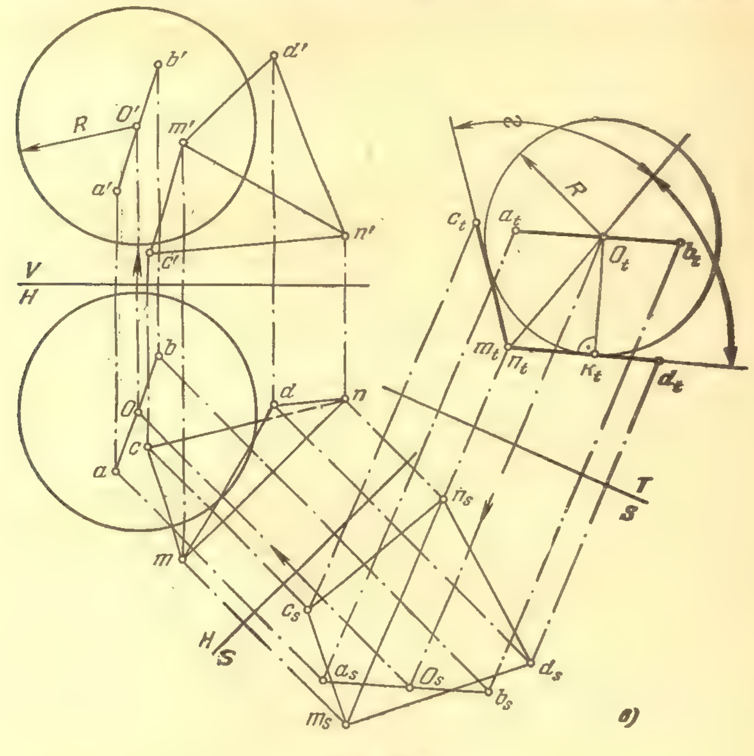


Рис. 222в.

240. Построить сферу, касательную к граням ABC и SAB пирамиды $SABC$ (рис. 223), взяв ее центр на ребре SC.

241*. Провести через прямую AB плоскость, касательную к данной сфере (рис. 224, *а*).

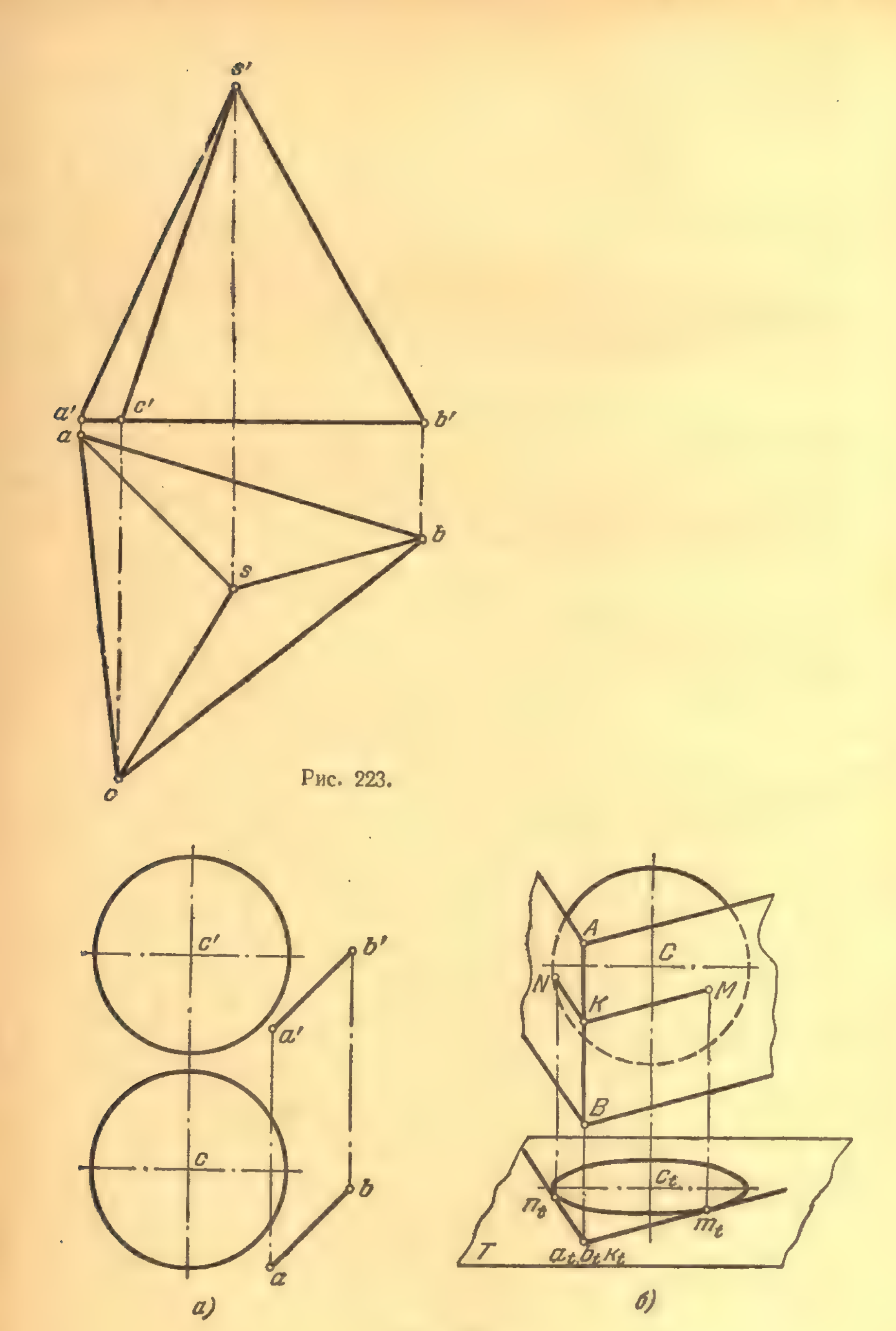


Рис. 223.

Рис. 224а, б.

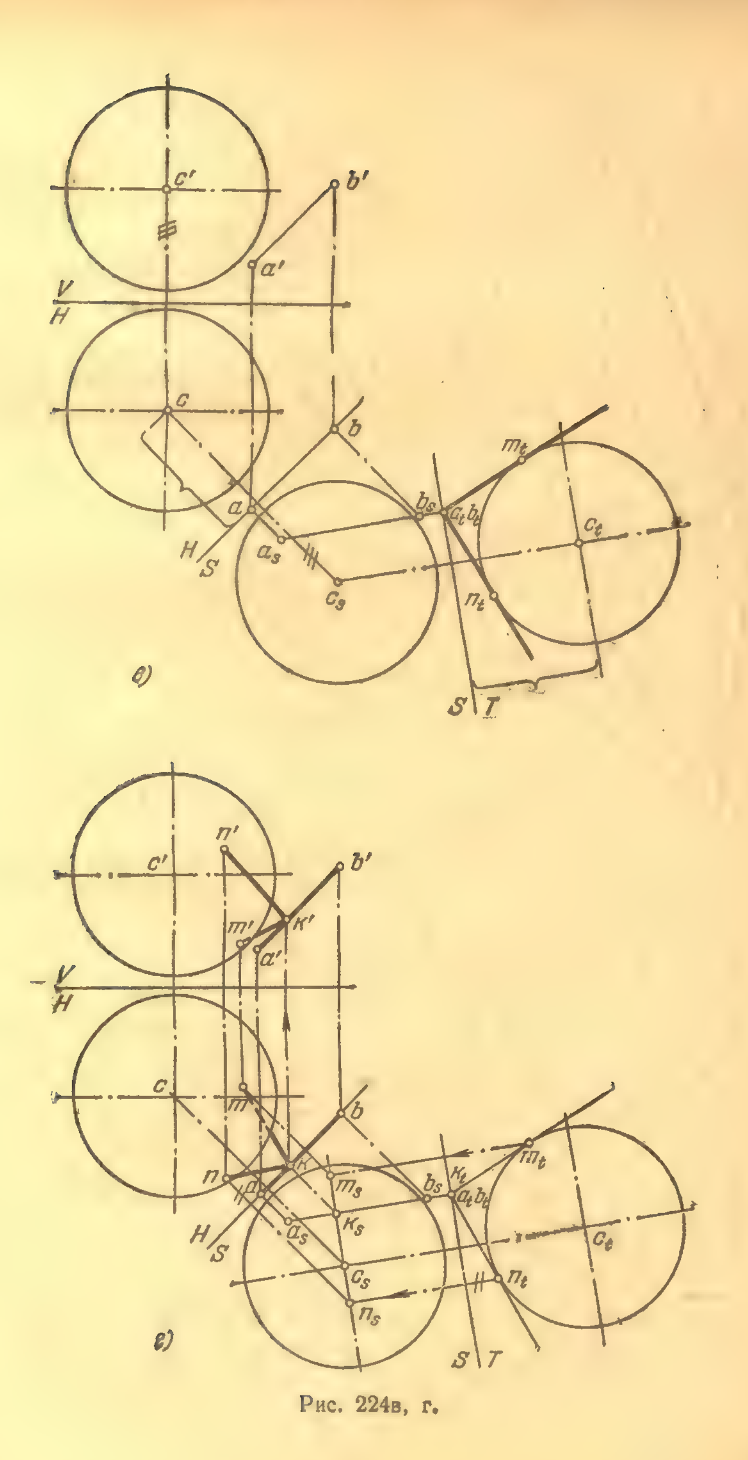

c'
b'
a'
V
H
c
b
a
H
S
a_s
c_s
b_s
$a_t b_t$
m_t
c_t
n_t
S
T
в)
n'
c'
b'
m'
k'
a'
V
H
c
m
b
k
n
a
m_s
k_s
a_s
c_s
n_s
b_s
k_t
$a_t b_t$
m_t
c_t
n_t
H
S
S
T
г)

Рис. 224в, г.

Решение. Представив себе пространственную картину (рис. 224, *б*), можно видеть, что сфера касательна к двум плоскостям, составляющим двугранный угол с ребром AB. Отсюда вытекает следующий план решения: а) применяя способ перемены пл. пр., расположить дополнительную пл. T перпендикулярно к AB, б) получить на этой же пл. T проекцию сферы, в) провести из точки — проекции AB на пл. T — две касательные к окружности, представляющей собою проекцию сферы на пл. T. Эти касательные можно рассматривать как проекции плоскостей, касательных к сфере (они перпендикулярны к пл. T), и в то же время как проекции двух прямых, проведенных из некоторой точки на AB касательно к сфере. Очевидно, прямая AB и каждая из этих касательных определяют плоскость, проходящую через AB касательно к сфере. Если же выделить точки касания M и N (рис. 224, *б*), то каждая из касательных плоскостей будет выражена прямой AB и точкой касания (M или N).

На рис. 224, *в* показано построение проекций прямой AB и сферы на пл. T и проекций m_t и n_t точек касания на прямых, проведенных из точки a_t (b_t) касательно к окружности с центром c_t. Заключительная стадия построения показана на рис. 224, *г*: проведя через точку c_s прямую параллельно оси T/S, получаем на этой прямой проекции m_s и n_s, а также k_s— проекцию точки K на прямой AB; из точки K проведены касательные KM и KN к сфере.

Остальное ясно из чертежа.

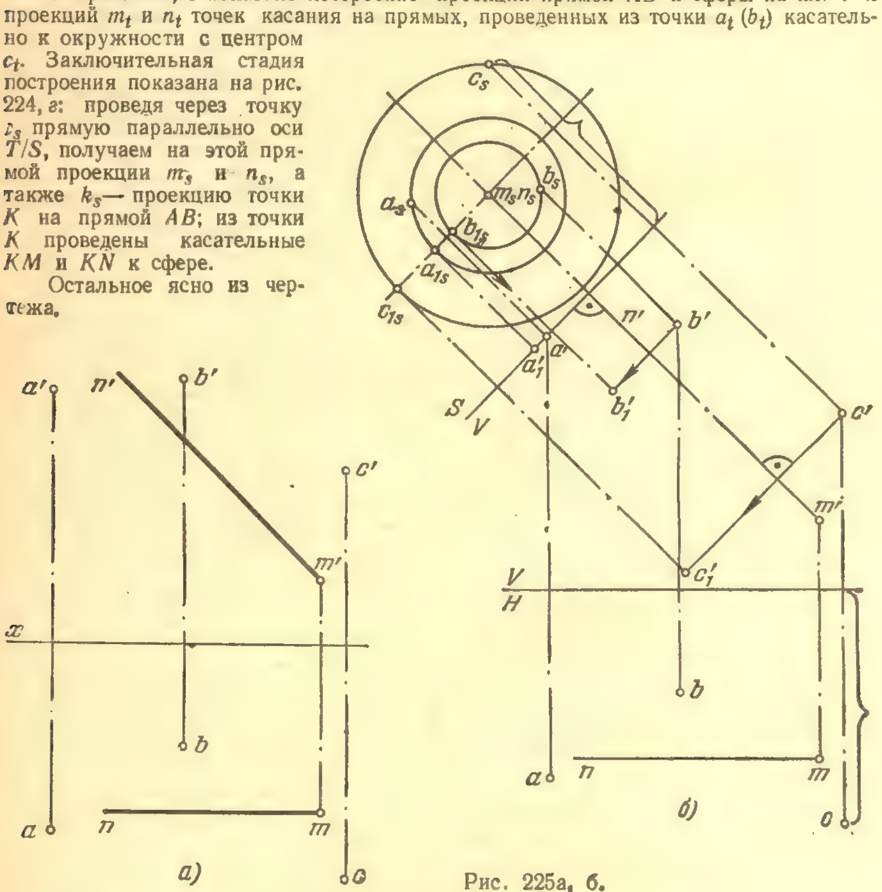


Рис. 225а, б.

242*. Построить проекции тела вращения, ограниченного поверхностью тора и двумя кругами (основаниями), плоскости которых перпендикулярны к оси этого тела; ось задана прямой MN($MN \|$пл. V, рис. 225, *а*). Точки A, B и C принадлежат поверхности тела, причем

точка A лежит на окружности одного из оснований тела, а C — на окружности другого основания.

Р е ш е н и е. Так как ось тела параллельна пл. V, то очерком фронт. проекции будет главный меридиан тела. Проведя через a' и c' (рис. 225, *б*) прямые, перпендикулярные к $m'n'$, мы получим фронт. проекции плоскостей оснований тела, а введя

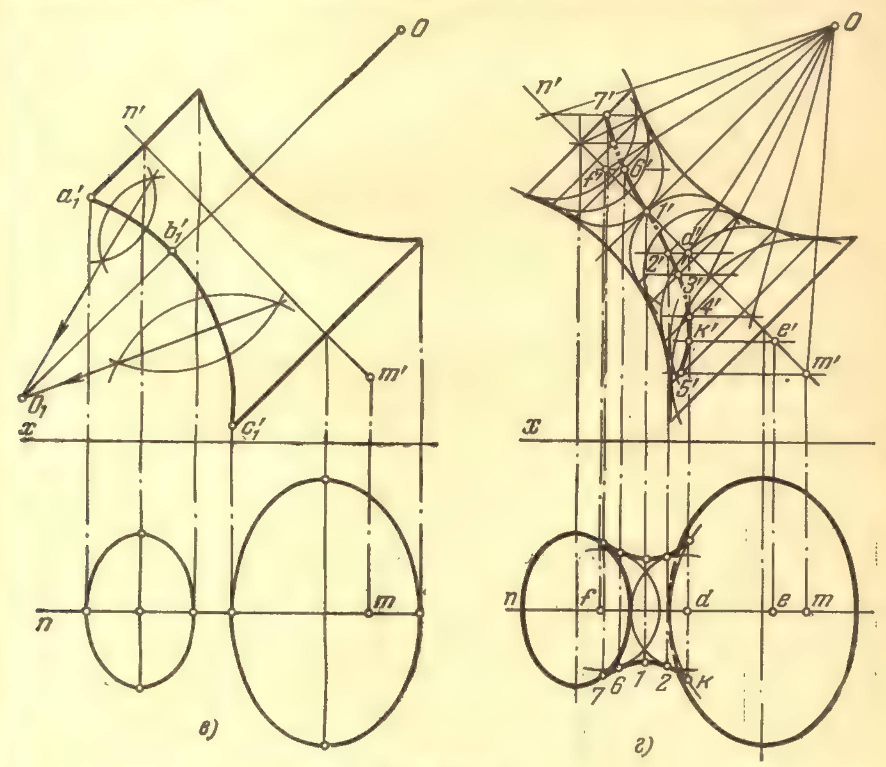


Рис. 225в, г.

дополнительную пл. S, перпендикулярную к пл. V и к MN, получим натуральный вид обоих оснований — круги радиусов $m_s c_s$ и $m_s a_s$. Пл. S взята совпадающей с плоскостью меньшего основания. Построена также параллель, на которой расположена заданная точка B.

По точкам c_{1s}, a_{1s} и b_{1s} находим точки c_1', a_1 и b_1'. Через эти точки должна пройти дуга окружности — фронт. проекция образующей тора в ее крайнем положении (рис. 225, *в*). Проведя эту дугу и ей симметричную относительно оси $m'n'$, получим фронт. проекцию тела вращения. Для его горизонт. проекции строим эллипсы — проекции оснований.

Чтобы получить горизонт. проекцию полностью, надо построить ее очерк (рис. 225, *г*). Для этого прибегаем к помощи ряда сфер, вписываемых в тело вращения.

Эти сферы касаются поверхности тела по окружностям, фронт. проекции которых — отрезки прямых, перпендикулярных к $m'n'$. В пересечении окружностей касания с экваторами сфер находим точки 7, 6, 1, 2 и др. для очерка горизонт. проекции.

Например, взяв центр сферы в точке F, проводим прямую $f'O$, определяем точку касания очерка сферы с очерком тора, проводим проекцию окружности касания,

перпендикулярную к $m'n'$, и находим точку $6'$ пересечения ее с проекцией экватора сферы. Проведя из точки f окружность — горизонт. проекцию экватора, находим на ней точку 6.

Так же поступаем, взяв, например, центр сферы в точке D; находим точку ($2'$, 2).

Через найденные проекции точек проводим кривую $7\ 6'\ 1'\ 2'\ k'\ 5'$ и кривую $7—6—1—2—k$, являющуюся искомой очерковой линией горизонт. проекции поверхности тора. Горизонт. проекции точек кривой, расположенных ниже точки K, невидимы.

243. Построить проекции тела вращения, ограниченного поверхностью тора и двумя кругами (основаниями), плоскости которых перпендикулярны к оси тела вращения, ось задана прямой MN

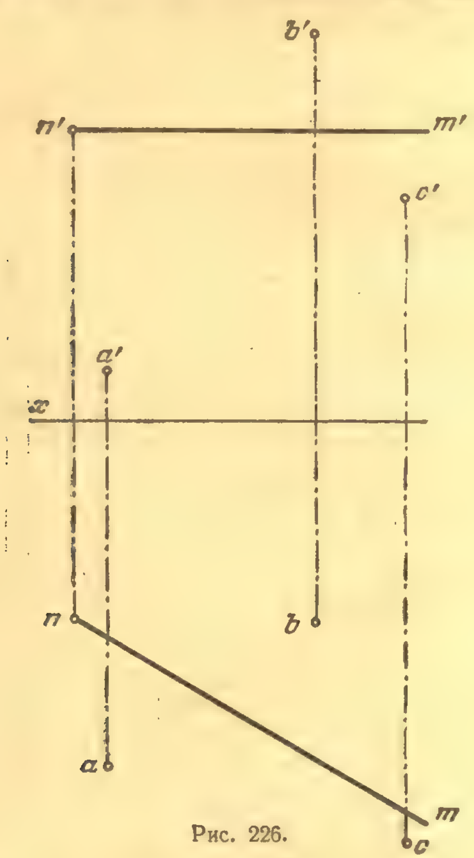
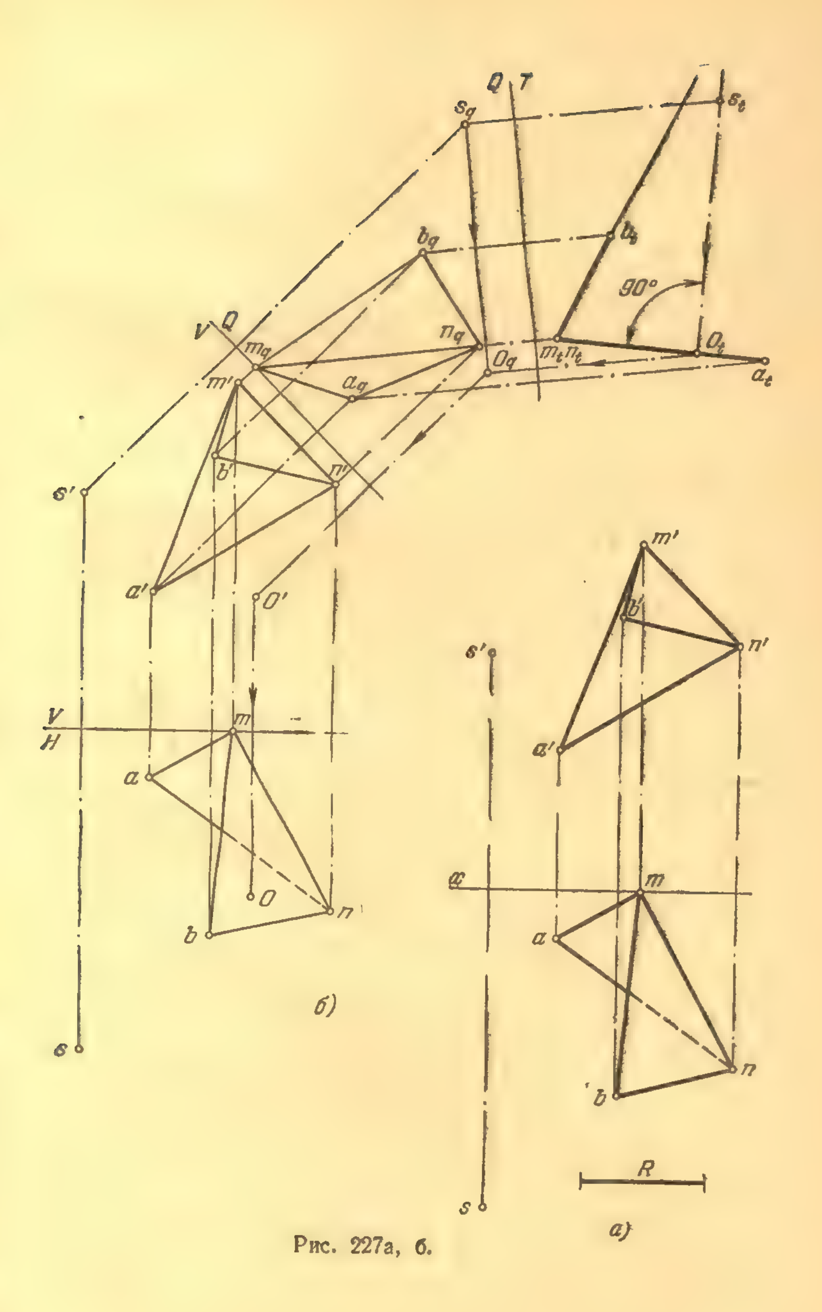


Рис. 226.

($MN \parallel$ пл. H, рис. 226). Точки A, B и C принадлежат поверхности тела, причем точка A лежит на окружности одного, а точка C — на окружности другого основания.

244*. Построить проекции тела вращения, ограниченного поверхностью тора и кругом (основанием), плоскость которого перпендикулярна к оси этого тела. В точке S (рис. 227, a) находится вершина



Q
T
s_q
s_t
b_q
b_t
90°
V
Q
m_q
n_q
O_q
m_t n_t
O_t
a_t
m'
a_q
b'
n'
s'
a'
O'
V
H
m
a
O
n
b
б)
s
m'
b'
n'
s'
a'
x
m
a
n
b
R
s
а)

Рис. 227а, б.

тела, основание лежит в плоскости, заданной треугольником AMN. Радиус основания тела равен R. Плоскость, заданная треугольником BMN, касательна к поверхности тела.

Решение. Легко представить себе такое положение заданных элементов относительно некоторой пл. проекций, при котором двугранный угол между плоскостями с ребром MN изобразится в виде угла, стороны которого являются проекциями заданных треугольников; перпендикуляр, проведенный из проекции вершины S на соответствующую сторону угла, определит высоту тела вращения и центр круга основания. Действительно (рис. 227, *б*), применяя способ перемены плоскостей проекций, получаем соответствующую конфигурацию в проекции на дополнительной пл. T. Образующая тела вращения на этой плоскости должна изобразиться дугой окружности, проходящей через точки s_t и c_t (точка c_t должна лежать на прямой m_tO_t на расстоянии R от точки O_t) и касательной к прямой m_tb_t.

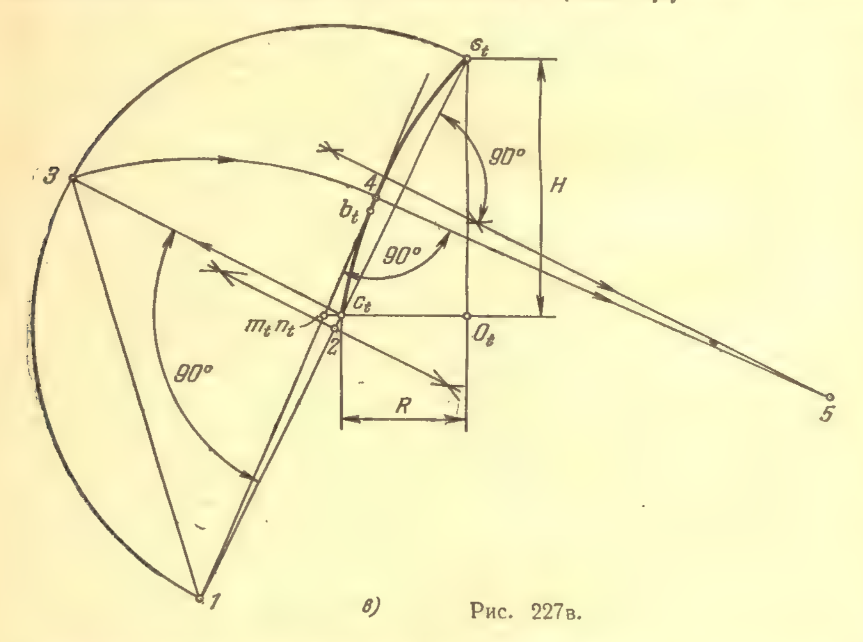


Рис. 227в.

Построение такой дуги показано на рис. 227, *в*. Через точки s_t и c_t проведена прямая до пересечения с прямой m_tb_t в точке *1*. Отрезок s_t1 разделен пополам, и из точки *2* как из центра проведена окружность (показана ее половина) радиусом s_t2. Из точки c_t проведен перпендикуляр к s_tc_t до пересечения с окружностью в точке *3*. Проводя дугу радиусом *1—3*, получаем на прямой m_tb_t точку *4*. Теперь, проведя перпендикуляр в точке *4* к прямой m_tb_t и к отрезку s_tc_t в его середине, находим точку *5*— центр дуги, проходящей через точки s_t и c_t и касательной в точке *4* к прямой m_tb_t.

Итак, из рис. 227, *б* и *в* мы получаем высоту тела вращения, натуральную величину радиуса дуги, дающей очерк его меридиана, и проекции O' и O центра основания.

Теперь переходим к построению проекций тела вращения на пл. V и пл. H (рис. 227, *г*). Используем способ перемены пл. пр. Сначала вводим дополнительную пл. P перпендикулярно к пл. H и параллельно оси тела вращения: ось P/H проводим параллельно sO. Построив s_pO_p, проводим через O_p прямую, перпендикулярную к s_pO_p, и получаем на пл. P проекцию основания в виде отрезка прямой, равного $2R$, а по ней — проекцию на пл. H в виде эллипса. Проекция тела на пл. P очерчивается дугами радиуса, величина которого получена на рис. 227, *в*. Пользуясь изображением

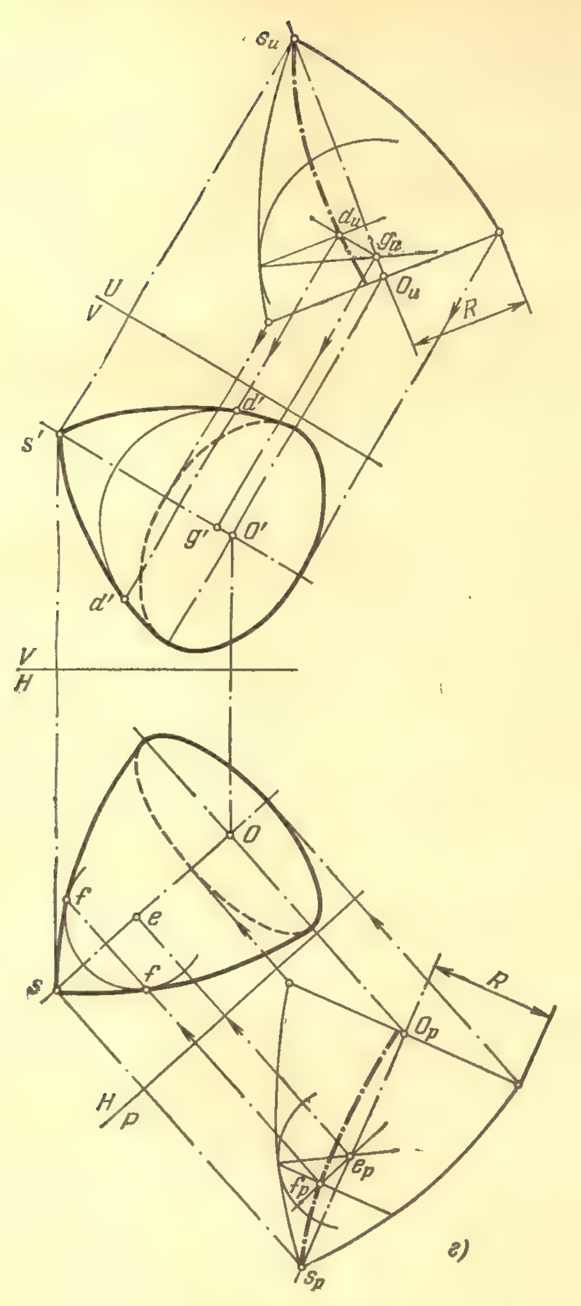


Рис. 227г.

на пл. P, находим очерк горизонт. проекции при помощи вписанных сфер (подобно рассмотренному в задаче 242 на рис. 225, г). Например, взяв проекции сферы с центрами e_p и e, получаем точку f для очерка проекции тела вращения.

Аналогично поступаем и для построения фронт. проекции тела, вводя дополнительную пл. U.

245. Построить проекции тела вращения, ограниченного поверхностью тора и двумя кругами в плоскостях, перпендикулярных к оси тела вращения, если дано: а) точка O_1 — горизонт. проекция центра основания, расположенного в пл. P и имеющего радиус R_1;

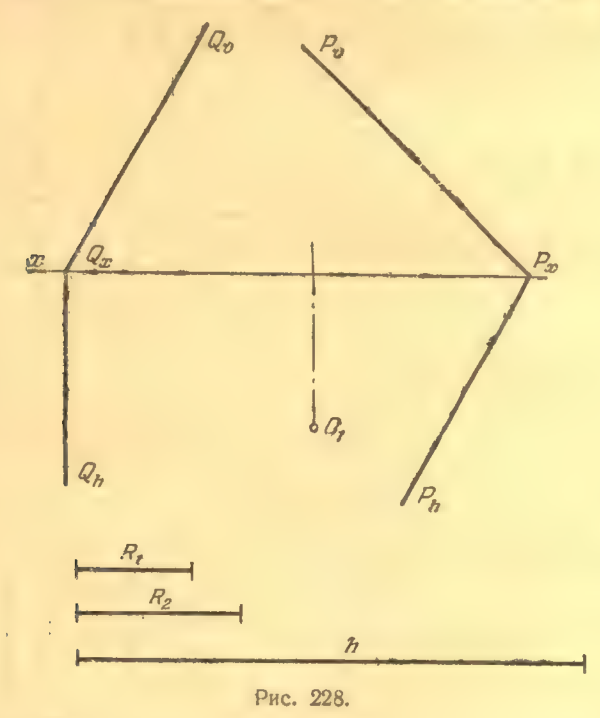


Рис. 228.

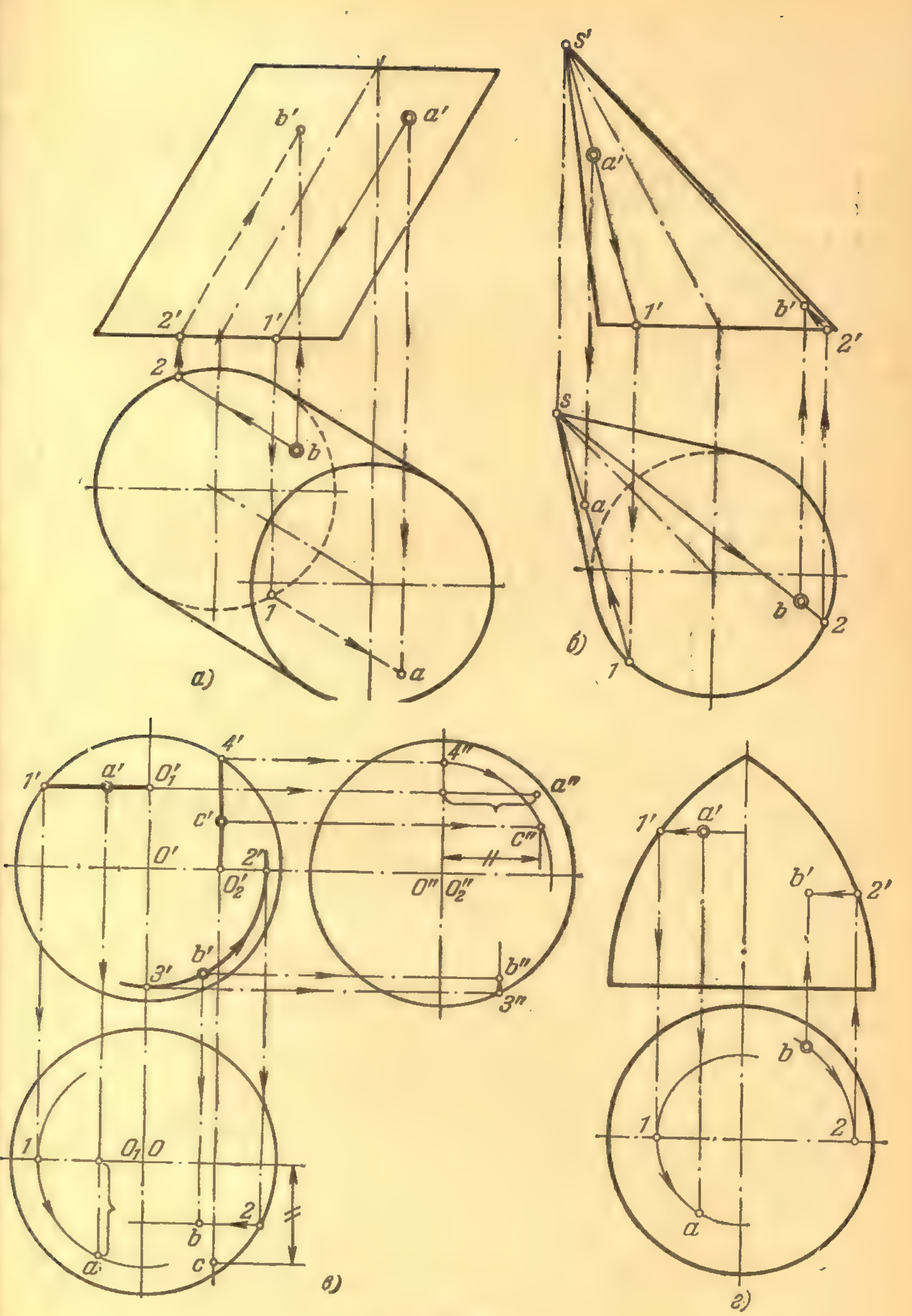
б) R_2 — радиус другого основания; в) h — расстояние между основаниями; г) пл. Q касательна к поверхности тора (рис. 228).

246*. По заданной проекции точки, принадлежащей изображенной на чертеже поверхности, найти другую проекцию этой точки.

Решение. При решении применен общий прием, заключающийся в отнесении рассматриваемой точки к некоторой линии, заведомо принадлежащей поверхности.

На рис. 229, *а* по заданным проекциям a' и b точек, принадлежащих цилиндрической поверхности, надо было найти проекции a и b'. Построение выполнено при помощи образующих $A—1$ и $B—2$. Также и на рис. 229, *б* применены образующие конической поверхности $S—1$ для нахождения проекции точки a по заданной a' и $S—2$ для нахождения проекции точки b' по заданной b.

На рис. 229, *в* найдены проекции a и a'' по заданной проекции a' точки, принадлежащей сфере. Проведена горизонт. проекция параллели, взятой на уровне точки A, — окружность радиуса $O_1'1'$. Дальнейшее ясно из чертежа.



b'
a'
2'
1'
2
b
1
a
a)
S'
a'
1'
b'
2'
s
a
b
2
1
б)
4'
1'
a'
O_1'
c'
O'
2'
O_2'
b'
3'
4''
a''
c''
O''
O_2''
b''
3''
1
O_1
O
2
b
a
c
в)
1'
a'
b'
2'
b'
1
2
a
г)

Рис. 229а—г.

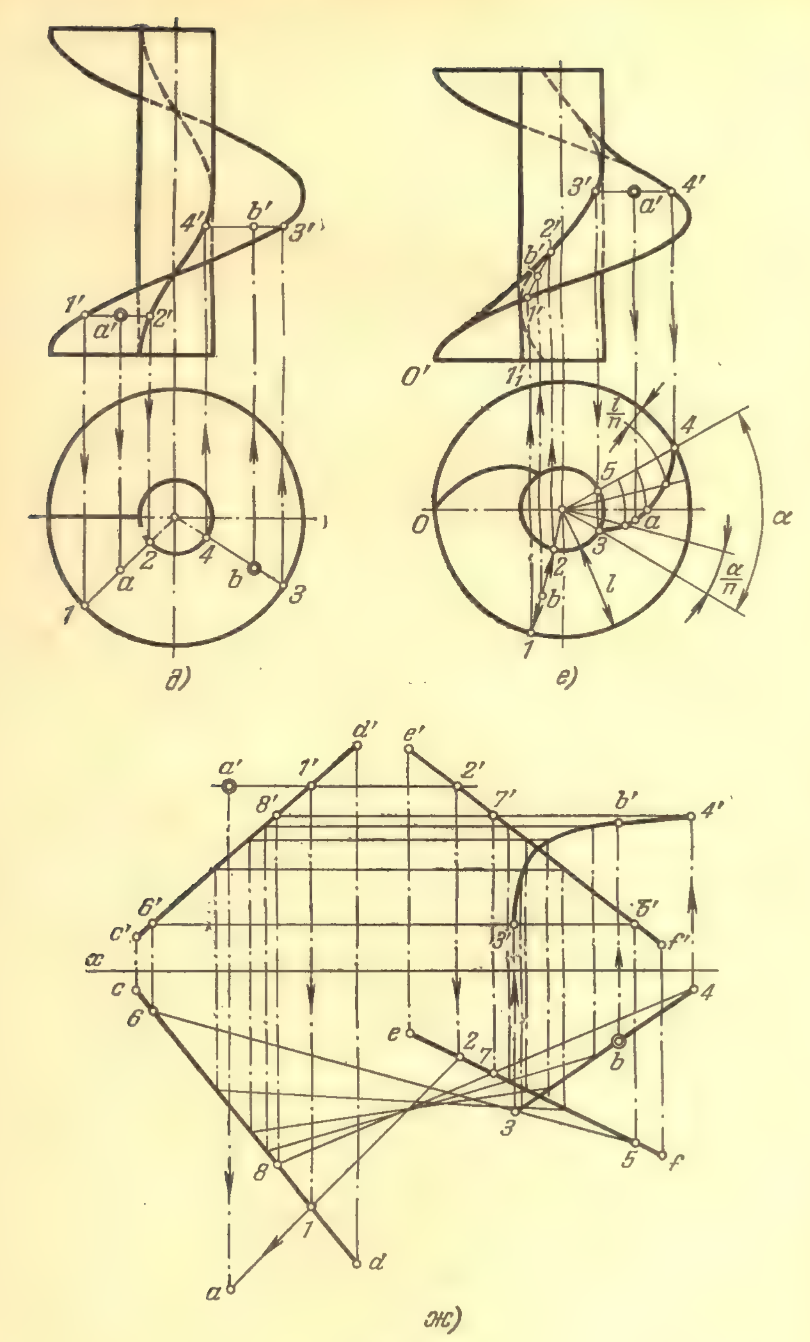

1'
a'
2'
4'
b'
3'
1
a
2
4
b
3
д)
3'
a'
4'
2'
b'
1'
0'
$1'_1$
$\frac{l}{n}$
4
5
0
a
3
2
b
l
1
α
$\frac{\alpha}{n}$
е)
d'
e'
a'
1'
2'
8'
7'
b'
4'
6'
б'
c'
3'
f'
x
c
4
6
e
2
7
b
3
5
f
8
1
d
a
ж)

Рис. 229д—ж.

На том же рис. 229, *в* показано, что можно, например, построить проекцию b точки B, принадлежащей сфере, по заданной проекции b' иначе, чем это сделано для точки A, а именно: представить себе сечение сферы плоскостью, параллельной пл. V, по окружности радиуса $O'b'$, найти положение горизонт. проекции этой окружности и на ней взять проекцию b. Проекцию b'' можно найти, построив профильную проекцию окружности радиуса $O'b'$.

Можно было бы представить себе плоскость, проходящую через заданную точку параллельно пл. W. Это показано на рис. 229, *в* на примере нахождения проекций c'' и c точки C по заданной ее проекции c'. Плоскость, параллельная пл. W, рассечет сферу по окружности радиуса $O_2'4'=O_2''4''$. Находим на профильной проекции этой окружности проекцию c''. Затем находим проекцию c.

Все построения на рис. 229, *в* выполнены в предположении, что точки A, B и C даны на той части сферы, которая видима на пл. V.

На рис. 229, *г* найдена проекция a по заданной a' и проекция b' по заданной b; точки принадлежат поверхности тора. Применены параллели поверхности.

На рис. 229, *д* по заданным проекциям a' и b точек A и B, принадлежащих прямой винтовой поверхности, найдены проекции a и b'. Это сделано путем отнесения точек к соответствующим положениям образующей — прямой линии. Горизонт. проекции образующих направлены радиально, а фронт. проекции — перпендикулярно к фронт. проекции оси поверхности.

Для нахождения фронт. проекции точки B, принадлежащей косой винтовой поверхности (рис. 229, *е*), по заданной ее горизонт. проекции b также использована прямолинейная образующая поверхности. Ее горизонт. проекция определена точками 1 и 2, по ним взяты точки $1'$ и $2'$ на фронт. проекции винтовых линий, и проведена проекция $1'\ 2'$, на которой и найдена точка b'. Точность построения (так же, как и на рис. 229, *д*) зависит от тщательности построения синусоид — фронт. проекций винтовых линий. Чтобы повысить точность, можно применить расчет подъема точек на фронт. проекции в зависимости от углового перемещения на горизонт. проекции. Например, точка, образующая винтовую линию, в положении 1 переместилась вдоль оси цилиндра на долю шага, соответствующую доле полного поворота вокруг оси:

$$\frac{1_1'1'}{\text{шаг}}=\frac{\widehat{01}}{360^\circ}.$$

Что же касается нахождения горизонт. проекции точки A по заданной проекции a' (см. рис. 229, *е*), то здесь применено сечение косой винтовой поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее оси. Получающаяся при этом спираль Архимеда изобразится без искажения на горизонт. проекции. Проведя фронт. проекцию спирали Архимеда — отрезок $3'4'$, находим проекции точек 3 и 4; затем делим угол α на n равных частей и на такое же число равных частей делим отрезок $5—4$, равный l. Точки спирали получаются в пересечении соответствующих прямых и дуг, как это показано на чертеже. Искомая точка a находится на спирали.

На рис. 229, *ж* показано построение проекции a' точки A и проекции b' точки B, принадлежащих косой плоскости (гиперболическому параболоиду). Плоскостью параллелизма является пл. H. Через заданную проекцию a' проведена проекция $1'2'$ образующей этой поверхности ($1'2' \parallel$ оси x), построена проекция $1—2$, на которой и получена искомая горизонт. проекция точки A.

Для нахождения проекции b' проведена через точку b прямая $3—4$ — горизонт. проекция некоторой линии, принадлежащей поверхности. По точкам пересечения прямой $3—4$ с образующими ($5—6$, $4—8$ и др.) найдены точки для проведения фронт. проекции $3'4'$ полученной кривой, на которой определяется искомая проекция b'.

§ 22. Пересечение поверхности плоскостью и прямой линией

247*. Построить проекции части прямого кругового цилиндра, остающейся после пересечения его фронтально-проецирующей плоскостью P (рис. 230). Дать натуральный вид сечения и полную развертку поверхности.

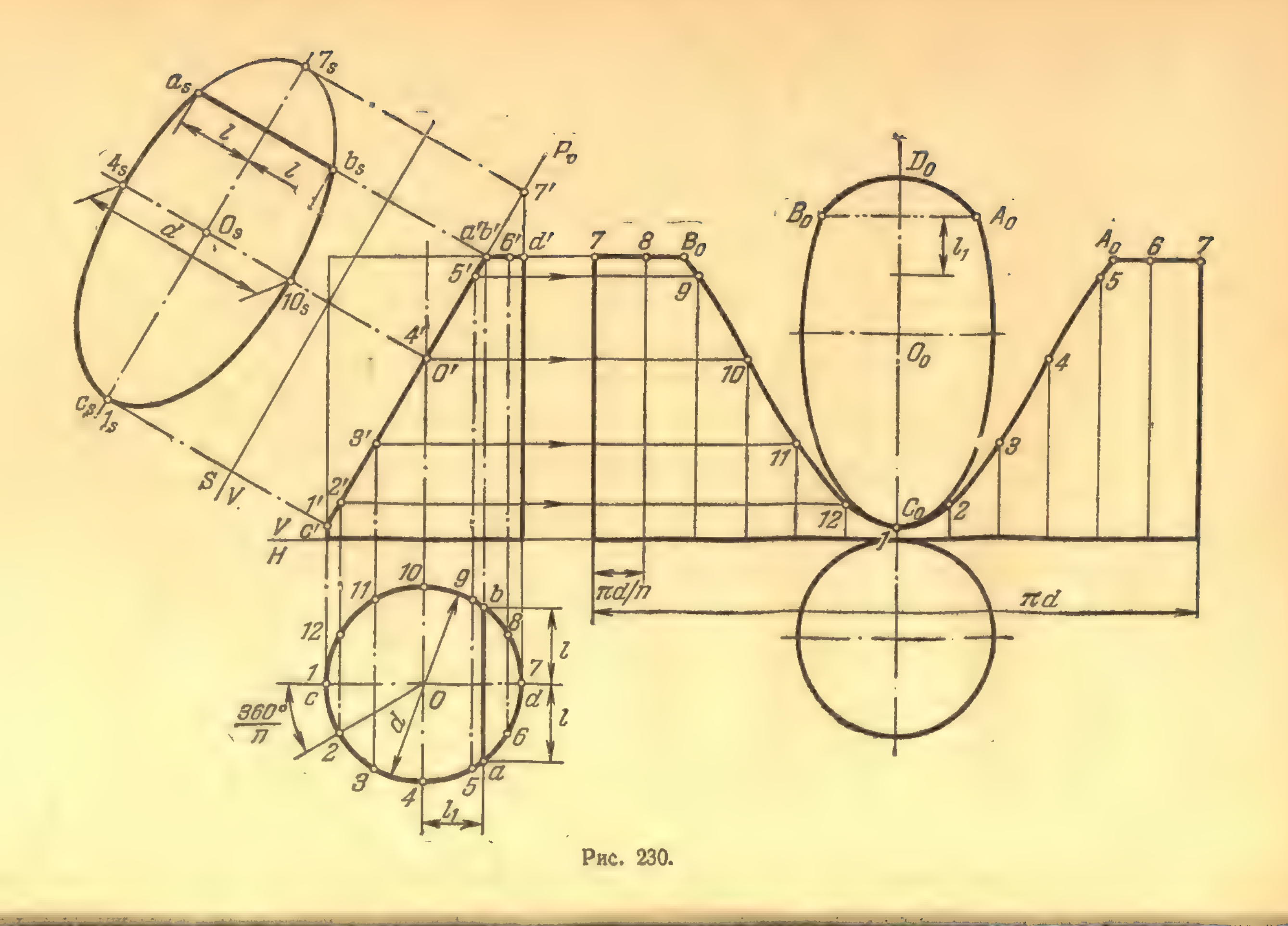


Рис. 230.

Решение. Судя по положению секущей пл. P относительно оси цилиндра, линия на его боковой поверхности, получаемая в пл. P, представляет собой эллипс с центром в O (на оси цилиндра); большая ось эллипса равна отрезку $1'7'$, а малая — диаметру цилиндра. Учитывая, что пл. P пересекает и одно из оснований цилиндра, получаем сечение в виде фигуры, ограниченной дугой эллипса и отрезком прямой AB. Для построения этой фигуры применен способ перемены плоскостей проекций, а именно введена дополнительная пл. S, перпендикулярная к пл. V и параллельная пл. P. Построение можно было бы осуществить, не вводя пл. S и осей V/H и S/V, а пользуясь большой осью эллипса для откладывания от нее отрезков, взятых на горизонт. проекции, как, например, отрезка l для получения точек a_s и b_s.

Примененное на рис. 230 деление окружности основания на некоторое число равных между собою дуг (взято 12 дуг) представляет собою обычный прием для построения развертки в подобных случаях. Полная развертка составлена из а) развертки боковой поверхности, ограниченной пятью отрезками прямой линии и кривой $A_0C_0B_0$ — синусоидой, в которую развернулся эллипс, б) круга основания цилиндра, в) натурального вида сечения, г) сегмента, полученного на верхнем основании.

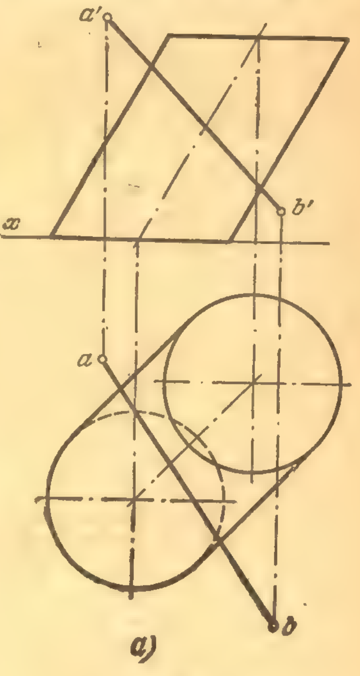


Рис. 231а.

248*. Найти точки пересечения поверхности цилиндра прямой линией (рис. 231, *а*).

Решение. Применяем для решения задачи общий прием построения точек пересечения прямых линий с любыми поверхностями, а именно: 1) заключение прямой в некоторую плоскость, 2) построение линии пересечения поверхности этой плоскостью, 3) нахождение точки пересечения заданной прямой и этой линии. В данной задаче возьмем вспомогательную плоскость так, чтобы она рассекла поверхность цилиндра по прямым линиям — образующим. Это наиболее простой прием для заданного случая. На рис. 231, *б* показано, что вспомогательная пл. P определяется прямой AB и пересекающей ее прямой CM_2, параллельной образующим цилиндра. Такая плоскость рассечет цилиндр по его образующим.

Построение показано на рис. 231, *в*. Чтобы определить образующие, по которым плоскость, проведенная через AB, пересечет цилиндр, построены горизонт. следы прямой AB (точка m'_1m_1) и прямой CM_2 (точка m'_2m_2). Через следы прямых проведен горизонт. след плоскости — прямая m_1m_2. Этот след пересекает в точках 1 и 2 окружность — след цилиндрической поверхности на той же пл. H. Проведя $1—k$ и $2—n$ параллельно cm_2, получаем точки k и n — горизонт. проекции искомых точек пересечения AB с поверхностью цилиндра, а затем k' и n' — фронт. проекции этих точек.

249. Найти точки пересечения поверхности цилиндра прямой линией (рис. 232, *а* и *б*).

250*. Построить проекции части прямого кругового конуса, оставшейся после пересечения его фронтально-проецирующей плоскостью (рис. 233, *а* и *б*). Дать натуральный вид сечения и полную развертку поверхности изображенного тела.

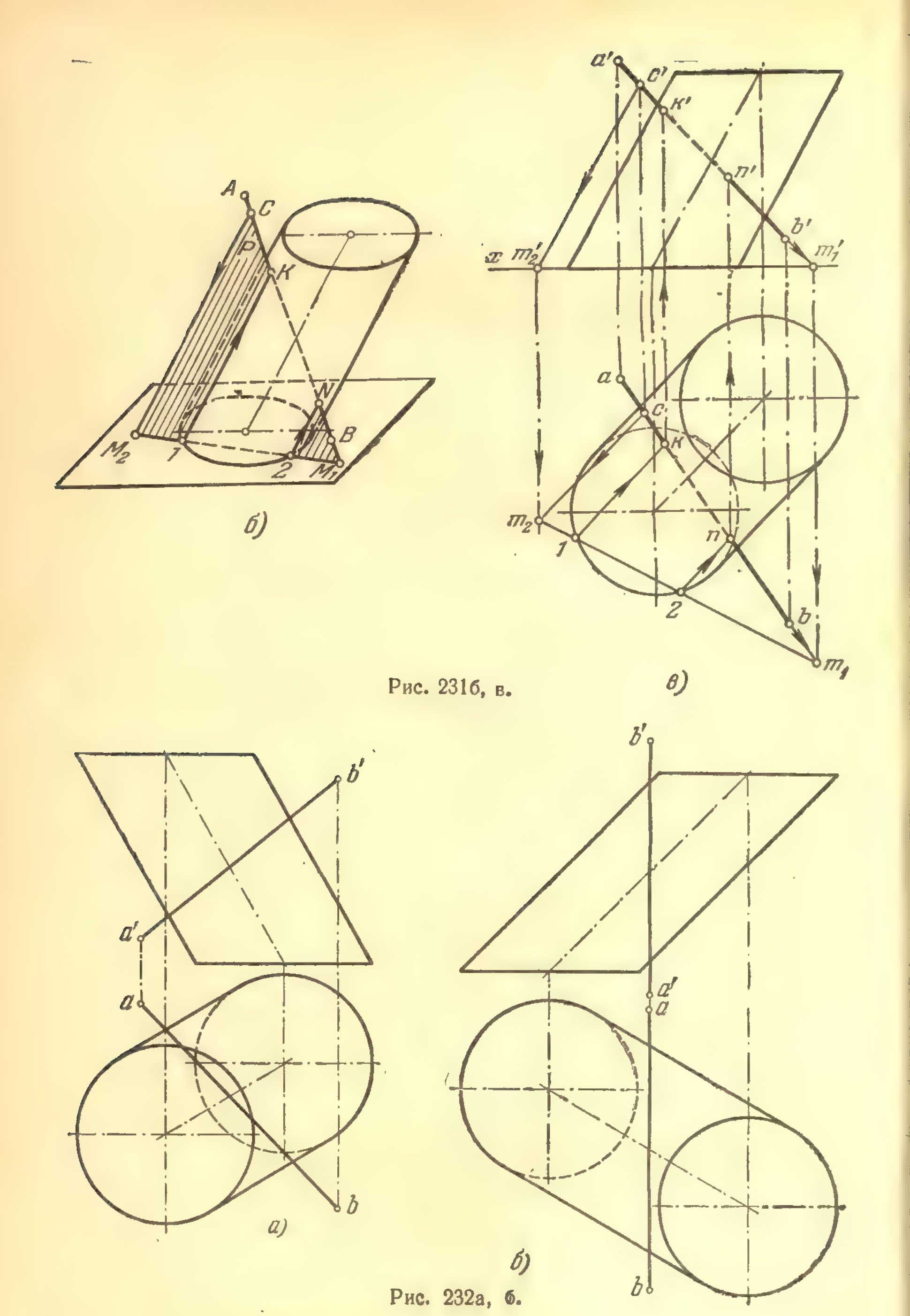
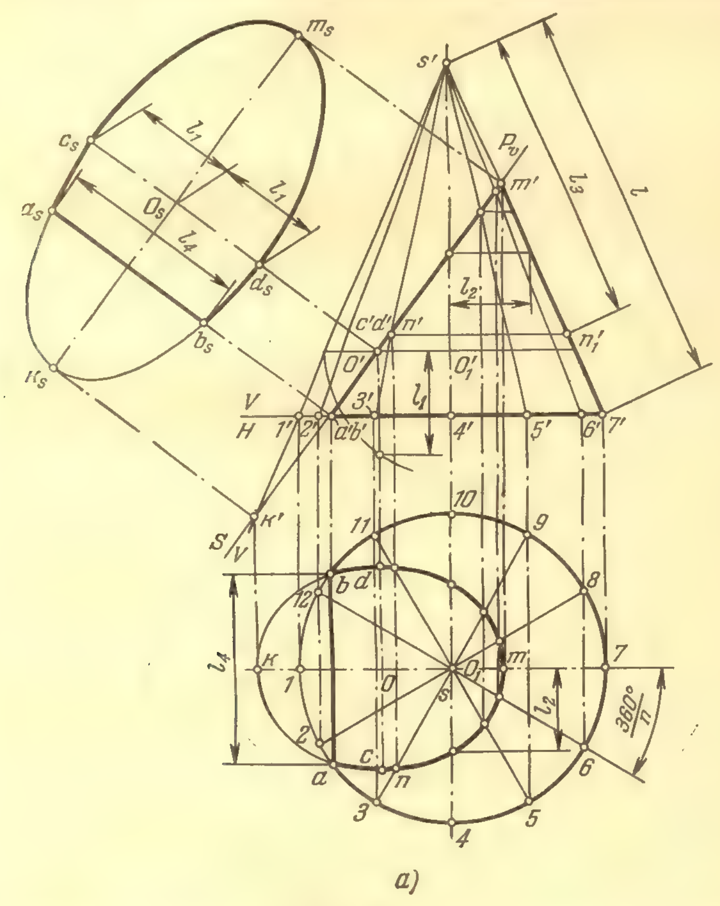


Рис. 231б, в.

Рис. 232а, б.

Решение. Судя по положению секущей плоскости относительно образующих конуса, линия на его боковой поверхности, получаемая в пл. P, представляет собою эллипс. Большая ось этого эллипса может быть представлена отрезком $m'k'$. Деля $m'k'$ пополам, получаем фронт. проекцию центра эллипса — точку O', а по ней и проекцию O. Теперь можно найти малую полуось, проведя секущую плоскость



а)

Рис. 233а.

через точку O перпендикулярно к оси конуса и взяв в полученном круговом сечении полухорду l_1. Малая ось эллипса равна $2l_1$. Горизонт. проекция эллипса также представляет собою эллипс; его большая ось mk, а малая — cd, равная $2l_1$.

Последующие построения подобны выполненным на рис. 230. Натуральный вид фигуры сечения построен при помощи способа перемены пл. пр., причем дополнительная пл. S взята совпадающей с пл. P. Замечание на стр. 187 о том, что построение можно было бы осуществить, не вводя пл. S и осей V/H и S/V, справедливо и для данного случая.

Зная, что боковая поверхность конуса развертывается в круговой сектор с углом $\varphi = \frac{d}{l} \cdot 180°$ при вершине, где d — диаметр основания, а l — длина образующей конуса, строим сектор с разбивкой его на равные части соответственно разметке

образующих на чертеже конуса. Зная, например, положение образующей $S—3$ на чертеже и на развертке, находим положение точки N_0 на развертке при помощи натуральной величины отрезка l_3 образующей от вершины S до точки N.

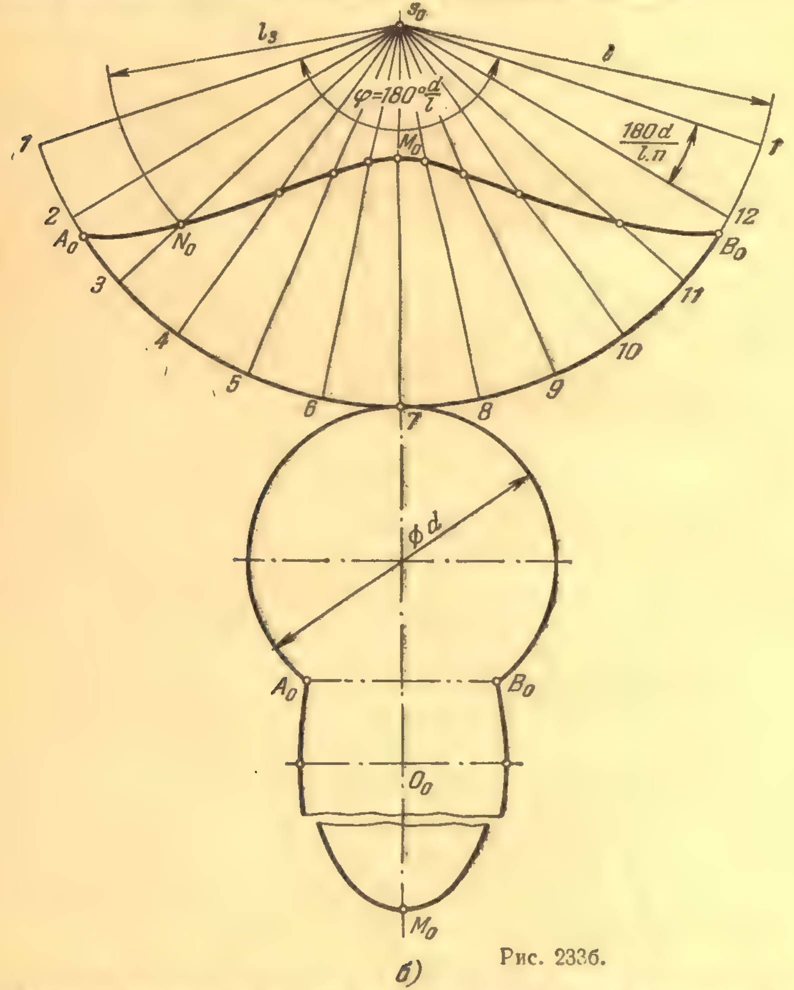


Рис. 233б.

В полную развертку оставшейся части поверхности входят: а) развертка боковой поверхности, ограниченная дугой окружности радиуса l и построенной кривой $A_0N_0M_0B_0$; б) части круга основания, в) натурального вида сечения, причем круг и сечение граничат по хорде A_0B_0.

251*. Найти точки пересечения поверхности прямого кругового конуса прямой линией (рис. 234, *а*).

Решение. Применяя вспомогательную плоскость, проведенную через данную прямую линию, задаемся целью обеспечить простейшее пересечение конуса этой плоскостью. Секущую плоскость надо провести через вершину конуса. Она будет пересекать конус по прямым линиям (образующим). На рис. 234, *б* показана пл. P, проведенная через данную прямую AB и вершину конуса. Проведя пл. T,

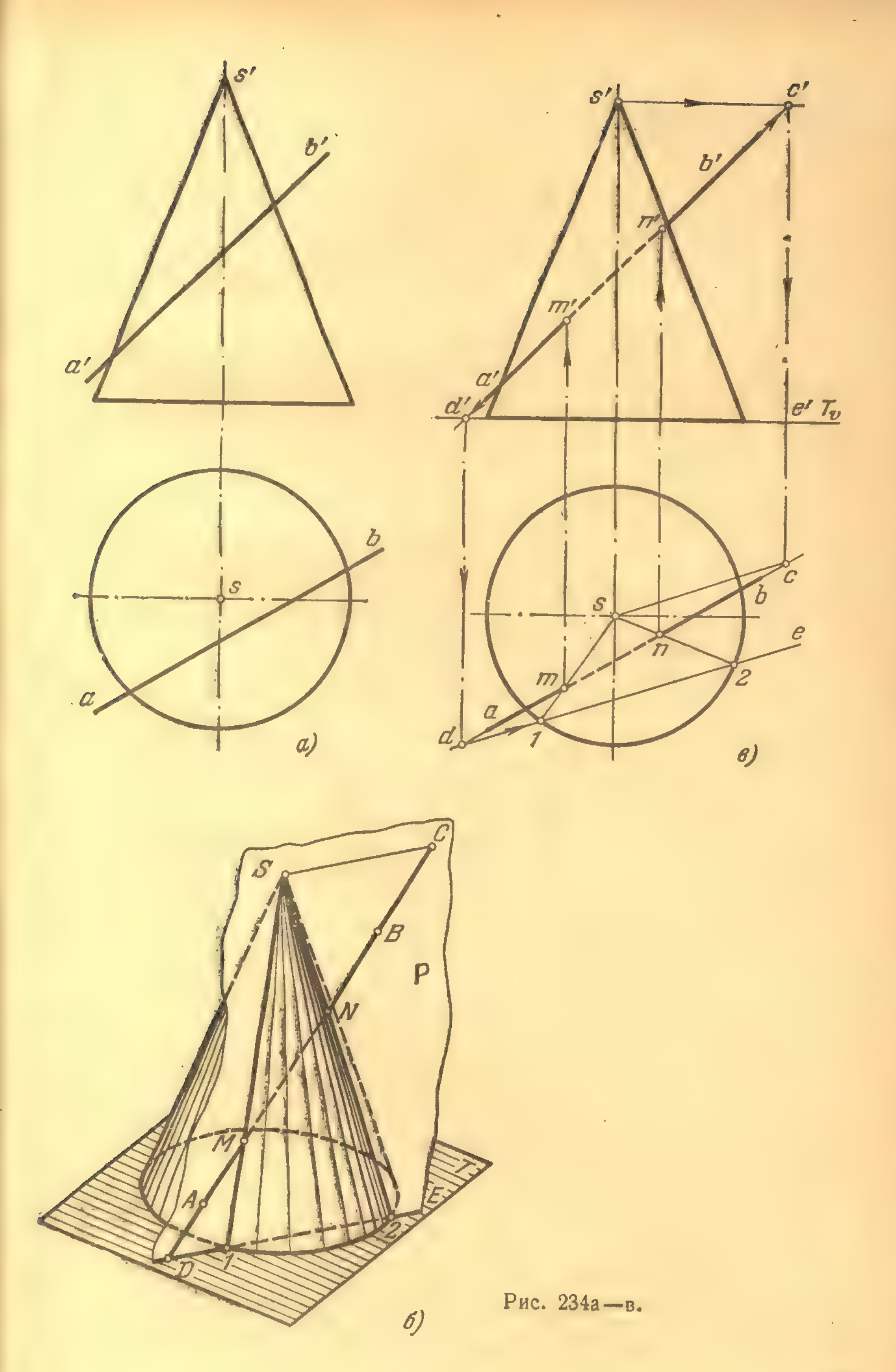


Рис. 234а—в.

перпендикулярную к оси конуса и, следовательно, пересекающую его по окружности, находим на пл. T линию ее пересечения с пл. P — прямую DE. Образующие, по которым пл. P пересекает конус, определяются вершиной S и точками 1 и 2. На этих образующих и получаются точки K и M, в которых прямая AB пересекает поверхность конуса.

На рис. 234, *в* пл. P задана прямой AB и проведенной через вершину S прямой SC, пересекающей AB в точке C и параллельной пл. T. Плоскость P пересекает пл. T по прямой DE, параллельной SC. Поэтому, найдя на чертеже точку D (точку пересечения прямой AB с пл. T), проводим $de \| sc$. Образующие, по которым пл. P пересекает поверхность конуса, изображены лишь их проекциями $s—1$ и $s—2$. Этого достаточно, чтобы найти горизонт. проекции m и n точек пересечения, а по ним проекции m' и n'.

Если рассматривать конус, поставленный на пл. H, то надобность в пл. T отпадает.

252. Найти точки пересечения поверхности конуса прямой линией (рис. 235, *а* и *б*).

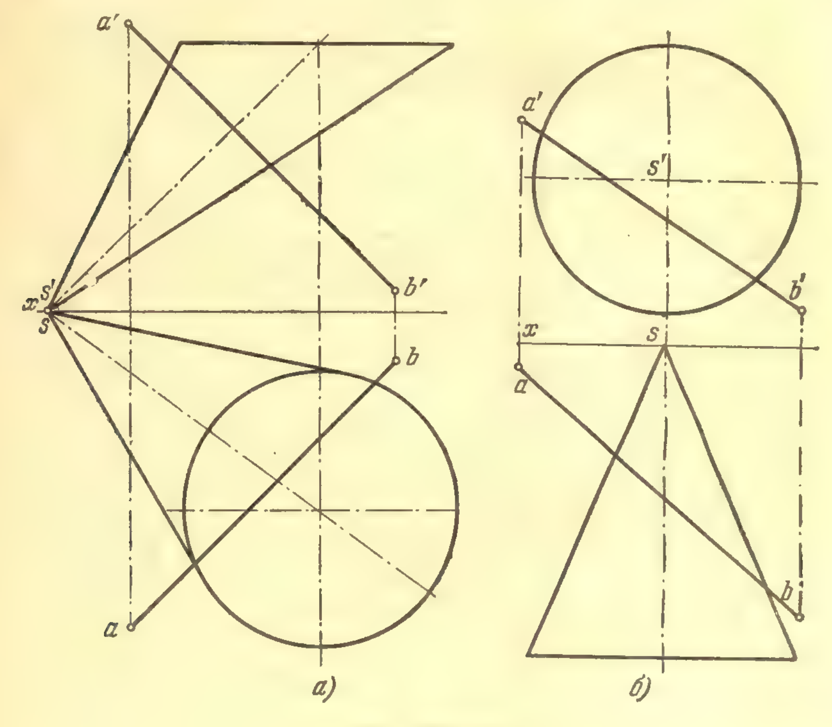


Рис. 235а, б.

Указание. Принять плоскость круга в качестве вспомогательной плоскости, подобной пл. T на рис. 234, *в*.

253*. Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью сферы (рис. 236, *а*).

Решение. Используя вспомогательную секущую плоскость, проходящую через данную прямую (рис. 236, *б*), получаем окружность. Искомые точки *M* и *N* получаются при пересечении этой окружности с прямой линией.

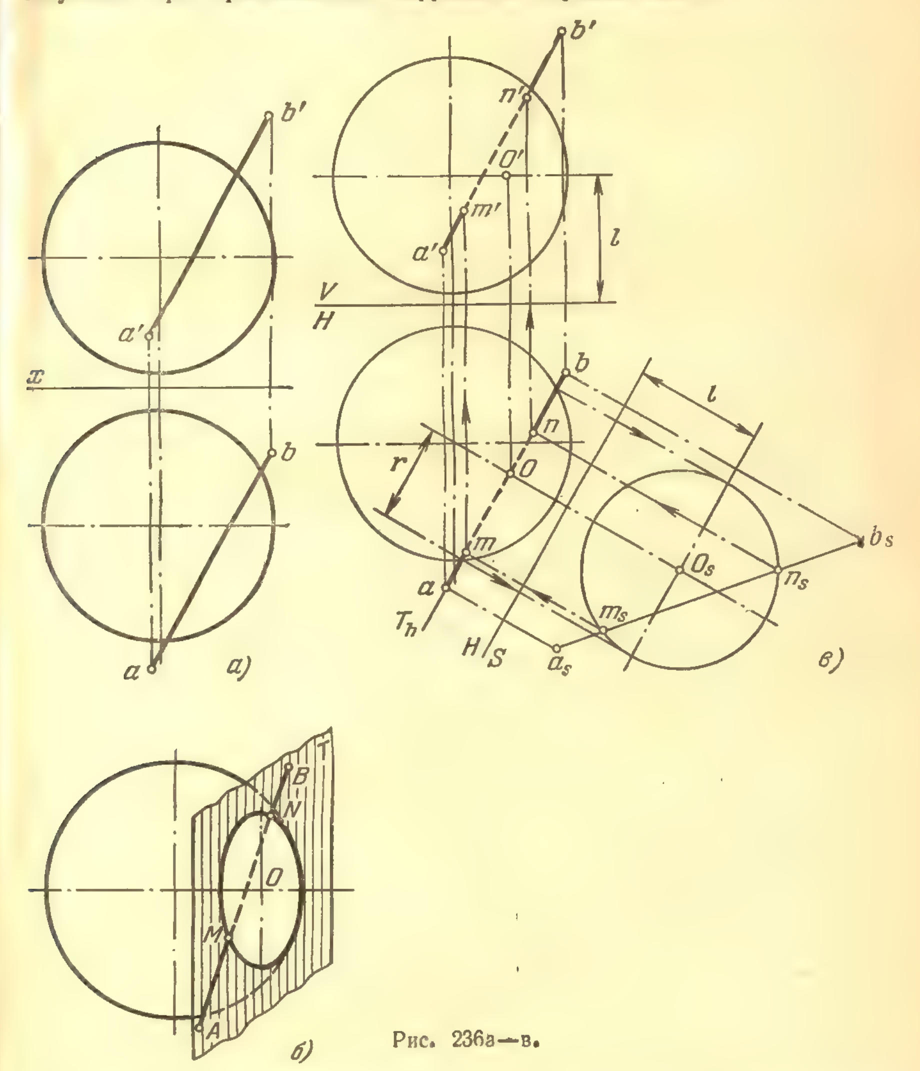


Рис. 236а—в.

На рис. 236, *в* показаны графические построения с помощью способа перемены пл. пр.

Дополнительная плоскость *S* перпендикулярна к пл. *H* и параллельна вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости *T*, проведенной через прямую *AB*.

На пл. *S* изображаем не данную поверхность сферы, а лишь получаемую на ней окружность от пересечения плоскостью *T*. Получив также проекцию $a_s b_s$, находим точки m_s и n_s, а по ним *m* и *n* и далее *m'* и *n'*.

254. Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью сферы (рис. 237, *а* и *б*).

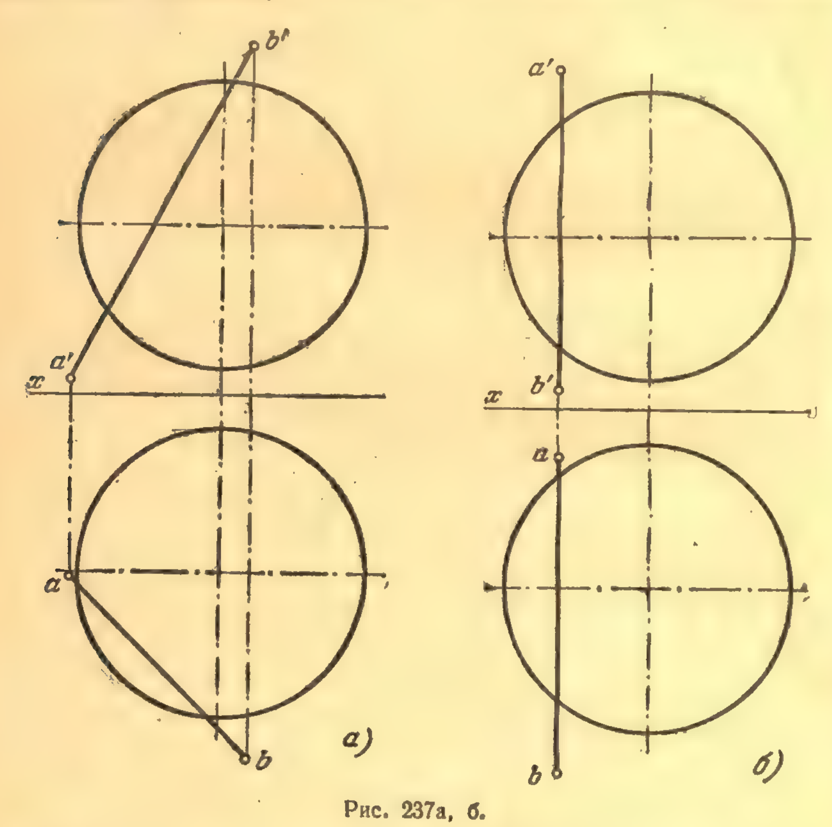


Рис. 237а, б.

255*. Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения (рис. 238, *а*).

Решение. Проводим через прямую *AB* (рис. 238, *б*) горизонтально-проецирующую плоскость *R* и строим линию пересечения ею данной поверхности. Точки этой линии находим при помощи параллелей поверхности. Например, проведя дугу окружности радиуса *s—3*, получаем на фронт. проекции главного меридиана точку $3'_1$, определяющую уровень соответствующей параллели, и по точке *3* находим *3'*. Точки *4'* и *5'* получаем по точкам *4* и *5*. Высшую точку кривой *1'* находим по ее горизонт. проекции *1*.

Построив фронт. проекцию кривой, находим точки ее пересечения с фронт. проекцией *a'b'*, а именно точки *m'* и *n'* — фронт. проекции искомых точек пересечения прямой *AB* с заданной поверхностью. По точкам *m'* и *n'* строим *m* и *n*.

Если через *AB* в качестве вспомогательной плоскости провести фронтально-проецирующую (рис. 238, *в*), то также придется построить кривую линию. Теперь сначала найдем точки *m* и *n*, а по ним *m'* и *n'*.

Оба рассмотренных решения по существу друг от друга не отличаются. Но можно представить себе другую схему построения, когда проведение плоскости через

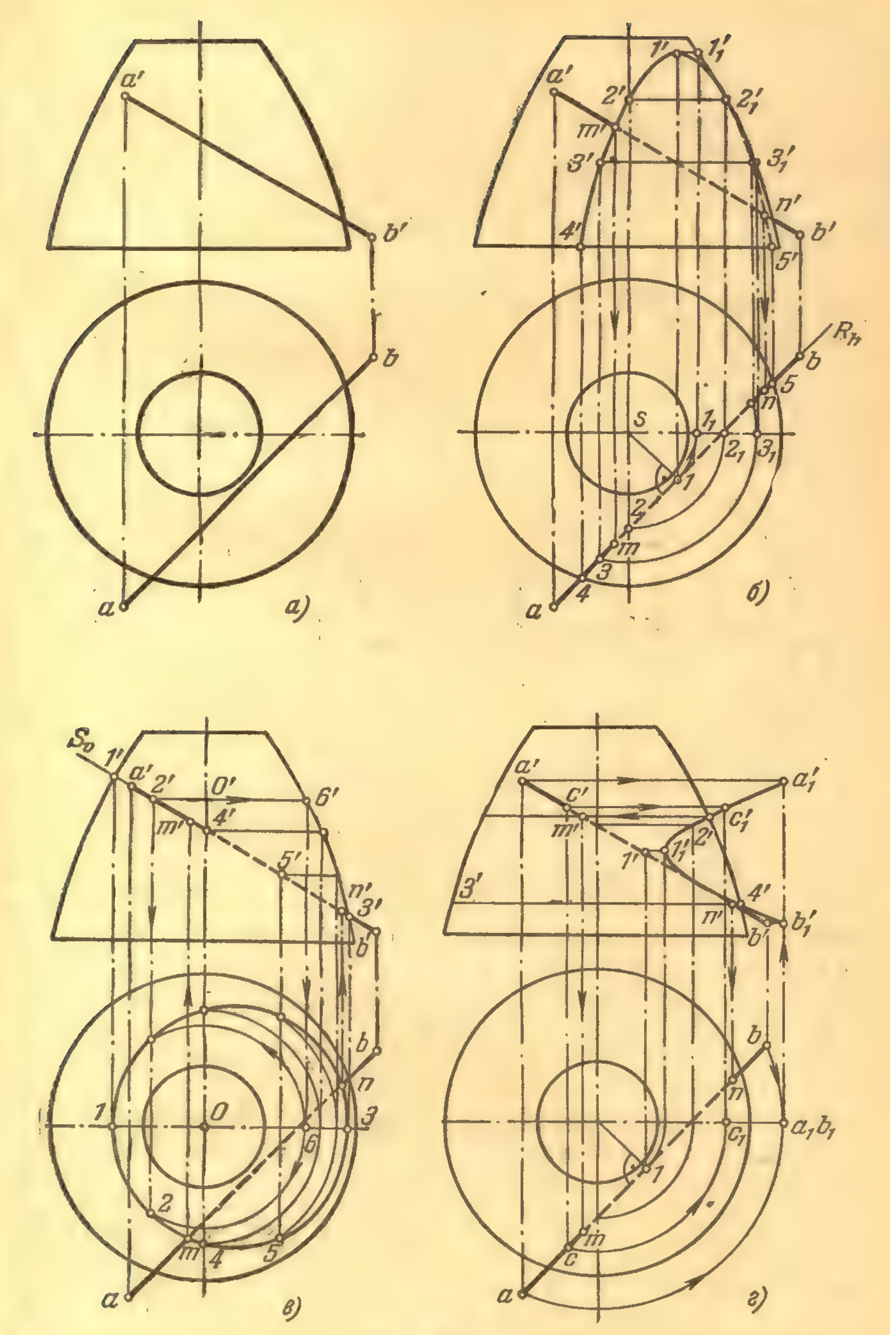

a'
b'
b
a
a)
1'
$1_1'$
2'
$2_1'$
m'
3'
$3_1'$
n'
4'
5'
R_h
s
1_1
2_1
3_1
5
n
1
2
m
3
4
б)
S_0
a'
2'
0'
6'
m'
4'
5'
$3'$
b'
O
6
в)
a_1'
c'
c_1'
$1_1'$
b_1'
c_1
a_1b_1
c
г)

Рис. 238а—г.

7*

заданную прямую отпадает. Дело в том, что заданная прямая может играть роль образующей однополостного гиперболоида вращения при той же оси, что и у заданной поверхности (рис. 238, *г*). Так как обе поверхности вращения соосны, то они пересекутся по окружностям. Искомые точки пересечения прямой с поверхностью вращения получаются на этих окружностях. Предоставляем выполнить такое построение читателю.

Отрицательным моментом в построениях, показанных на рис. 238, *б* и *в*, является необходимость пользоваться кривой; это снижает точность определения положения точек M и N. Но и в случае использования гиперболоида вращения приходится строить по крайней мере одну ветвь гиперболы, т. е. опять кривую. Это также снижает качество такого приема решения разобранной задачи.

256. Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения (рис. 239, *а* и *б*).

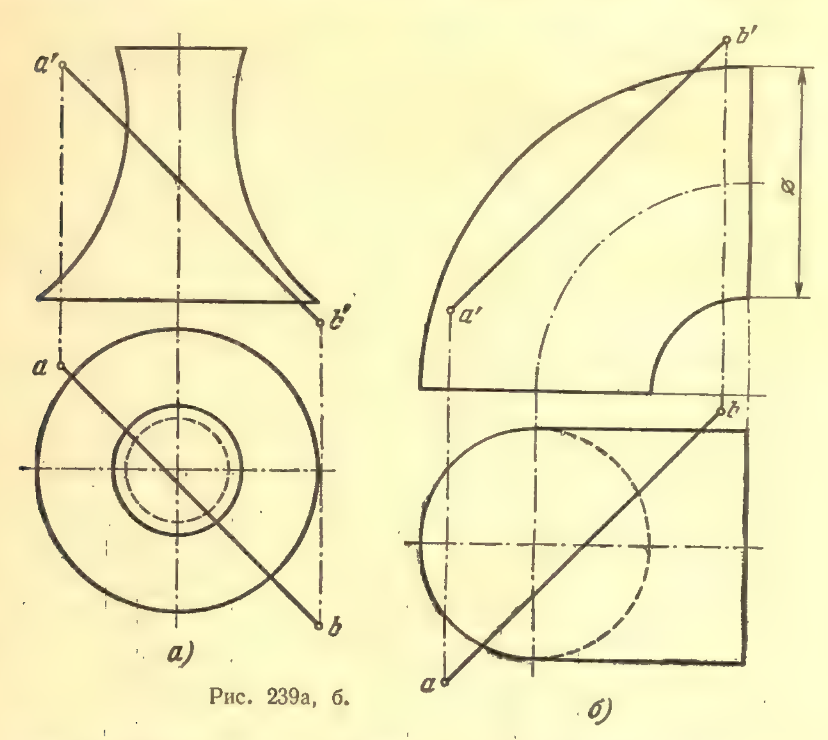


Рис. 239а, б.

257*. Найти точку пересечения прямой AB с поверхностью коноида, заданного направляющими CD и EF и плоскостью параллелизма H (рис. 240, *а*).

Решение. Через прямую AB проводим (рис. 240, *б*) фронтально-проецирующую плоскость R и строим кривую MN пересечения этой плоскости с коноидом. Задавая на кривой CD ряд точек, проводим через них образующие параллельно пл. H; горизонт. проекции этих образующих проходят через точку $e(f)$. Находим точки их пересечения с плоскостью R.

Точка k пересечения кривой mn и прямой ab является горизонт. проекцией искомой точки; по k находим k' на $a'b'$.

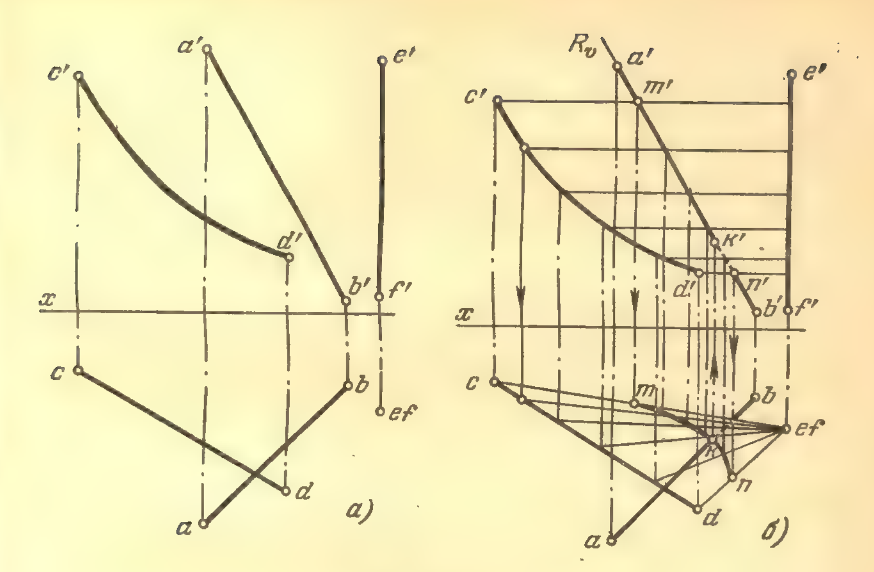


Рис. 240а, б.

Рис. 241.

Рис. 242.

258. Найти точку пересечения прямой *AB* с поверхностью коноида, заданного направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма *V* (рис. 241).

259. Найти точку пересечения прямой *AB* с поверхностью коноида, заданного направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма — фронтально-проецирующей плоскостью *P* (рис. 242).

260*. Найти точку пересечения прямой *AB* (рис. 243, *а*) с косой плоскостью, заданной направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма — фронтально-проецирующей плоскостью *P*.

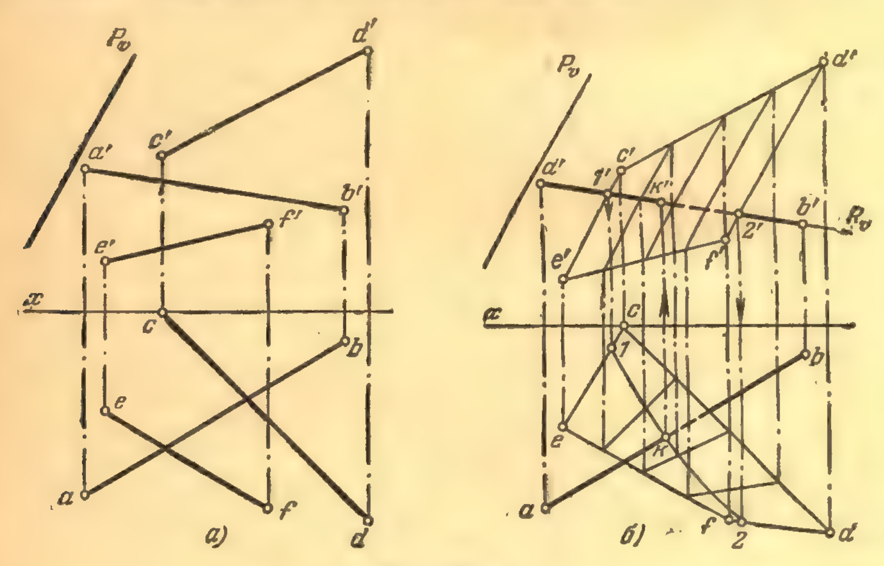


Рис. 243а, б.

Решение. Через прямую *AB* (рис. 243, *б*) проводим фронтально-проецирующую плоскость *R* и находим кривую пересечения ее с заданной поверхностью. Так же, как в задаче 257, берем на прямой *CD* ряд точек, проводим через них образующие (параллельно плоскости параллелизма *P*) и строим точки пересечения этих образующих с плоскостью *R*. Получаем кривую с проекциями *1'2'*, *1—2* и точку пересечения проекций *1—2* и *ab* — точку *k*. Это горизонт. проекция искомой точки. По *k* находим *k'* на *a'b'*.

261. Найти точку пересечения прямой *AB* с косой плоскостью, заданной направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма *H* (рис. 244).

262. Найти точки пересечения прямой *AB* с косой плоскостью, заданной направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма *V* (рис. 245).

263*. а) Разбить поверхность заданного на рис. 246, *а* тела вращения на зоны различных по своему виду поверхностей; б) построить фронтальную и профильную проекции данного тела вращения, усеченного плоскостями P_1 и P_2.

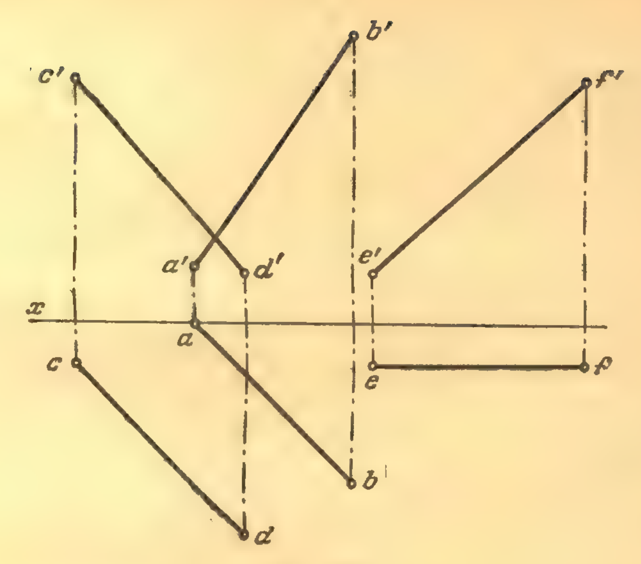


Рис. 244.

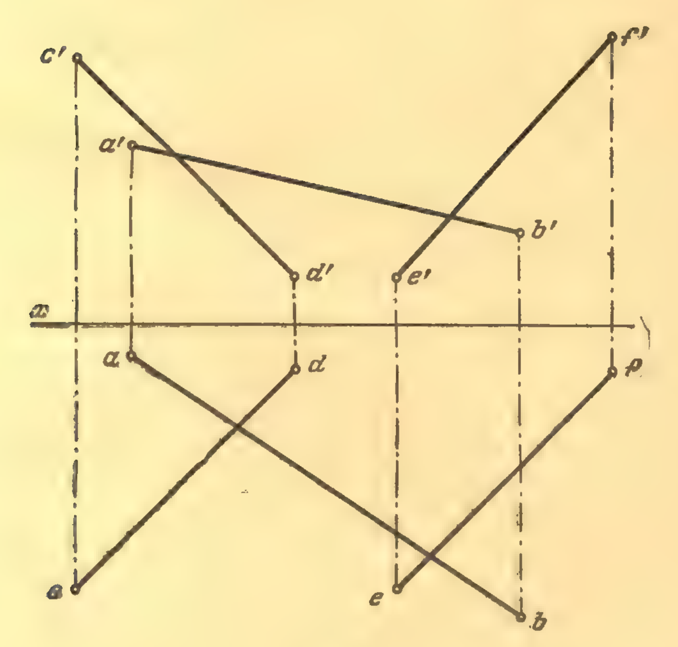


Рис. 245.

Р е ш е н и е. Заданное тело вращения состоит из конуса, цилиндра, кругового кольца и сферического сегмента. Соответственно поверхность тела содержит зоны: *I* — коническую, *II* — цилиндрическую, *III* — кругового кольца, *IV* — сферическую (рис. 246, *б*).

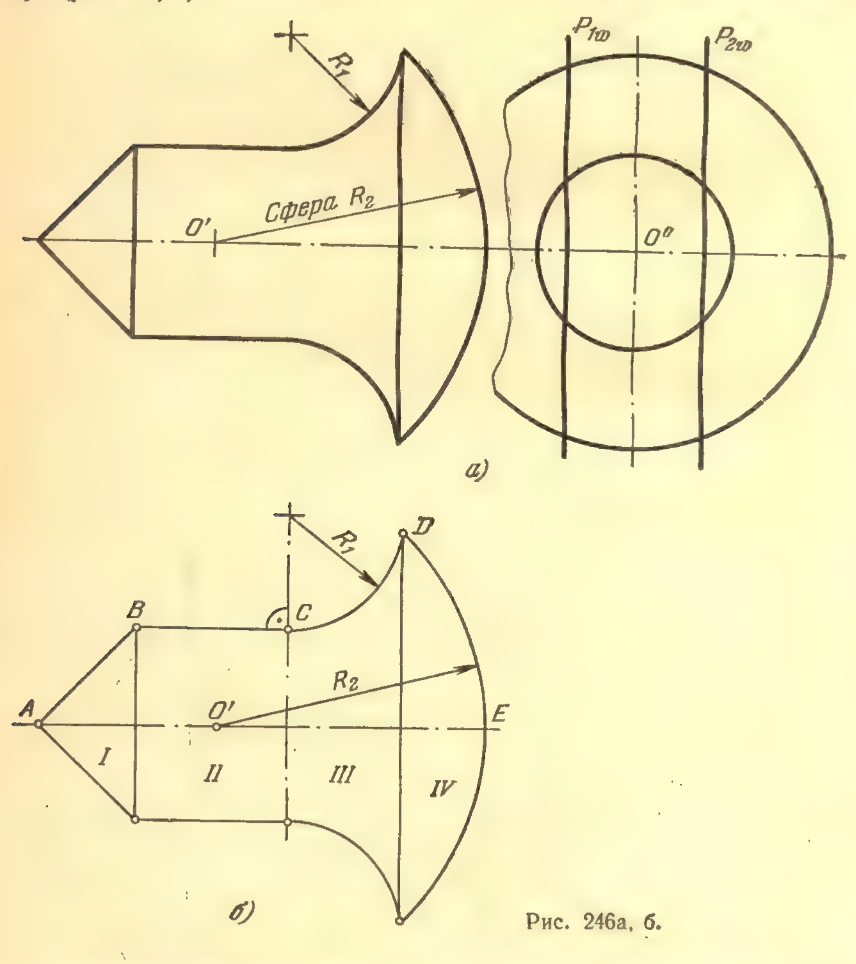


Рис. 246а, б.

Коническая поверхность образована отрезком AB, цилиндрическая — отрезком BC, поверхность кругового кольца — дугой CD радиуса R_1, сферическая — дугой DE радиуса R_2.

Каждая из этих зон граничит с соседней по окружности. Окружности проходят соответственно через точки B, C и D.

Плоскость P_2 пересекает (рис. 246, *в*) коническую поверхность по гиперболе *5—1—4—9*, цилиндрическую — по образующим, проходящим через точки *5* и *9*, поверхность кругового кольца — по кривой *5—7—8* и сферу — по окружности радиуса $R=O'1'$. Линии, образуемые на поверхности тела секущей плоскостью P_1, такие же, как от плоскости P_2, и на рис. 246, *в* их проекции совпадают с построенными, так как плоскости P_2 и P_1 параллельны и отстоят на равные расстояния от плоскости симметрии заданного тела.

Взяв, например, секущую плоскость S_1, получаем окружность радиуса $O''3''$. Эта окружность дает в пересечении с пл. P_2 точку $4''$, по которой получаем на фронт. проекции точку $4'$, принадлежащую гиперболе. Чтобы получить вершину гиперболы, отмечаем точку $1''$ — профильную проекцию этой вершины — и строим соответствующую ей проекцию $1'$ на поверхности конуса.

На рис. 246, *в* показан также пример построения фронт. проекции одной из точек (7) кривой, по которой пл. P_2 срезает тело в зоне кругового кольца.

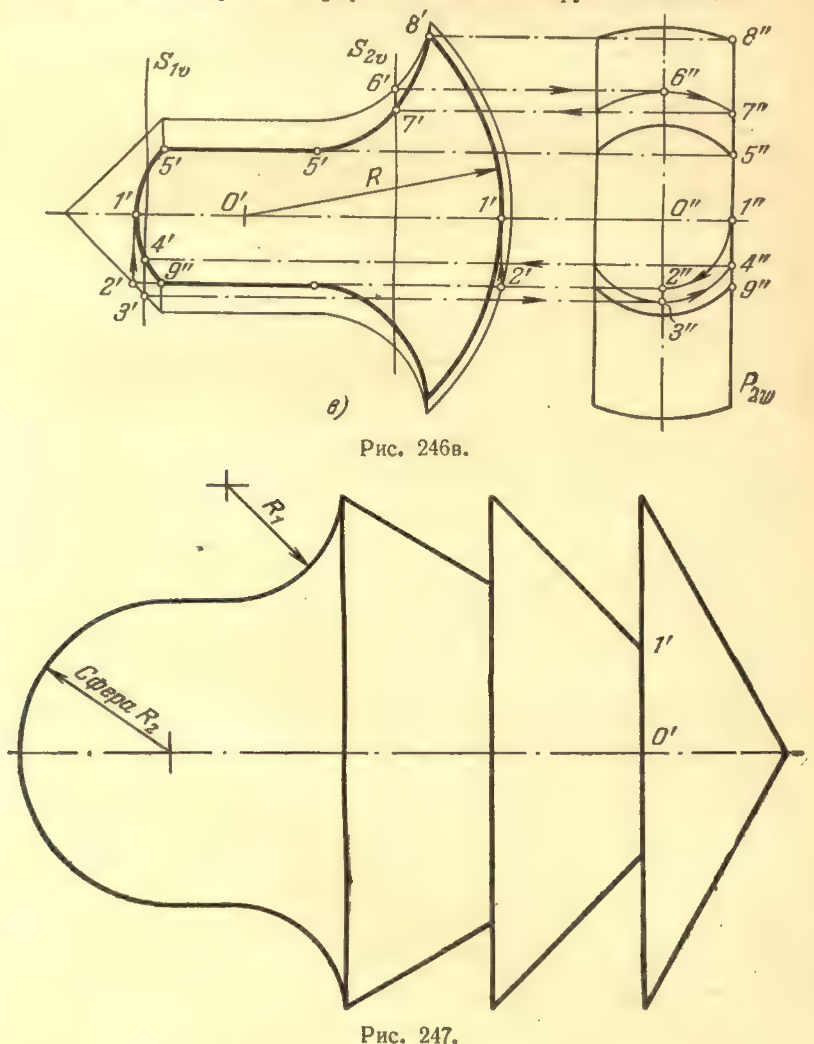


Рис. 246в.

Рис. 247.

264. Построить линию среза на поверхности тела вращения (рис. 247). Секущую плоскость взять параллельной плоскости проекций V и отстоящей от оси тела вращения на расстояние, равное $1'O'$. Назвать полученные линии, входящие в состав линии среза.

265*. Построить: а) проекции линии взаимного пересечения поверхностей призмы и сферы; б) натуральный вид сечения $A—A$ (рис. 248, *а*).

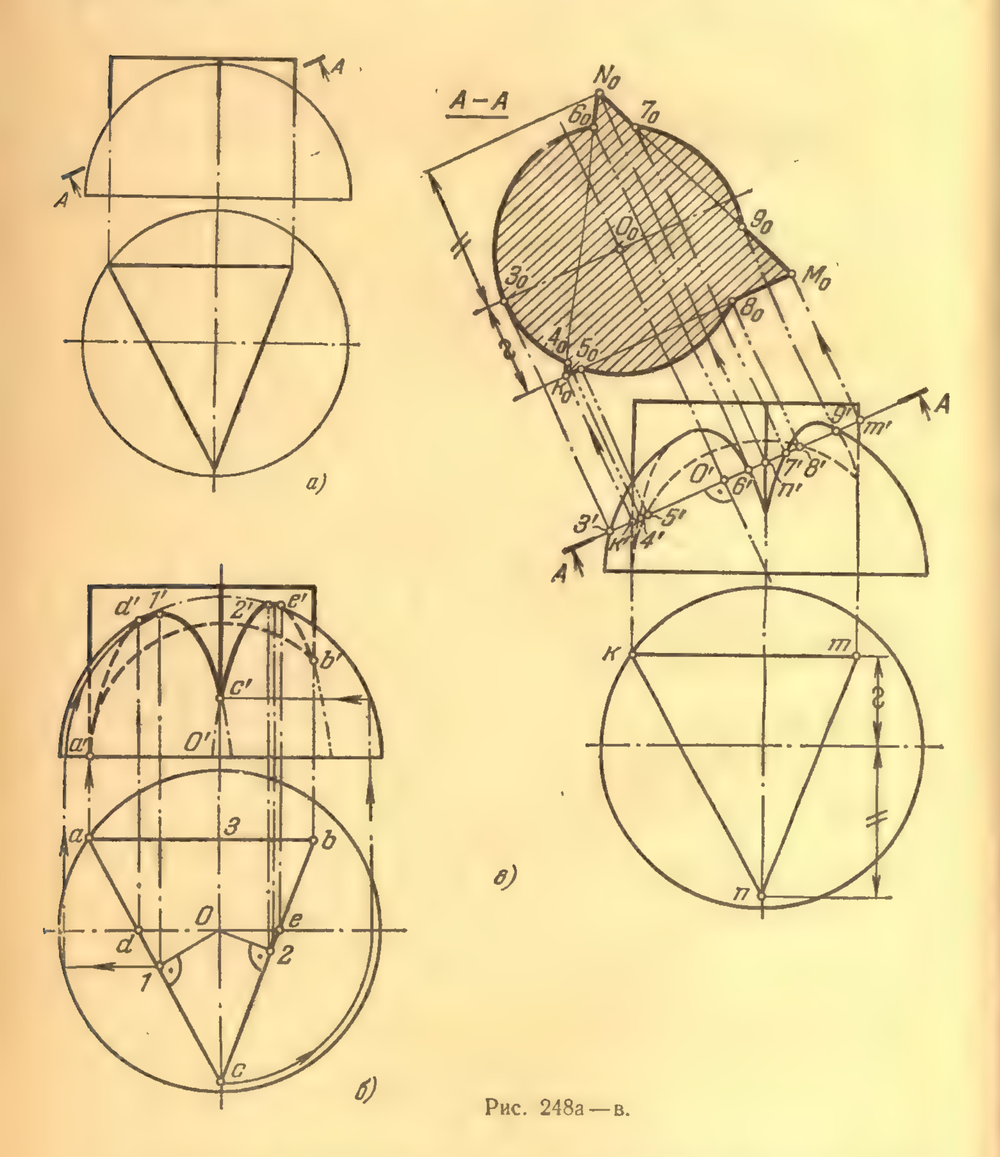


Рис. 248а—в.

Решение. В данном случае одна из проекций линии пересечения, а именно горизонтальная, известна, так как сливается с горизонт. проекцией боковой поверх-

ности призмы. Это значительно упрощает построение: оно сводится к нахождению фронт. проекций точек, принадлежащих поверхности сферы, по их горизонт. проекциям. Так, проекция c' (рис. 248, *б*) найдена при помощи горизонтали на поверхности сферы: эта горизонталь имеет радиус Oc. Точки d' и e' получены на фронт. проекции главного меридиана сферы по проекциям d и e, точка a' — на фронт. проекции экватора.

Другим обстоятельством, имеющим большое значение в построении, является то, что получаемая линия пересечения известна: каждая боковая грань призмы пересекает поверхность сферы по дуге окружности. Из этих дуг одна, лежащая на задней грани, проецируется на пл. V без искажения; ее радиус равен a—3. Две другие дуги проецируются на пл. V в виде дуг эллипсов.

Проведя перпендикуляры O—1 и O—2, мы определяем горизонт. проекции вершин эллипсов — точки 1 и 2; по ним находим проекции $1'$ и $2'$. На рис. 248, *б* дуги эллипсов показаны за точками c' и b' штрих-пунктирными линиями. Тело на рис. 248, *б* представлено как монолит (например, отливка). Поэтому сечение на рис. 248, *в* представлено в виде одной фигуры, что подчеркивается и штриховкой.

266. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и цилиндра; б) натуральный вид сечения A—A (рис. 249).

Указание. Горизонт. проекция линии пересечения в задачах 266 и 267 совпадает с частью соответствующей проекции тела.

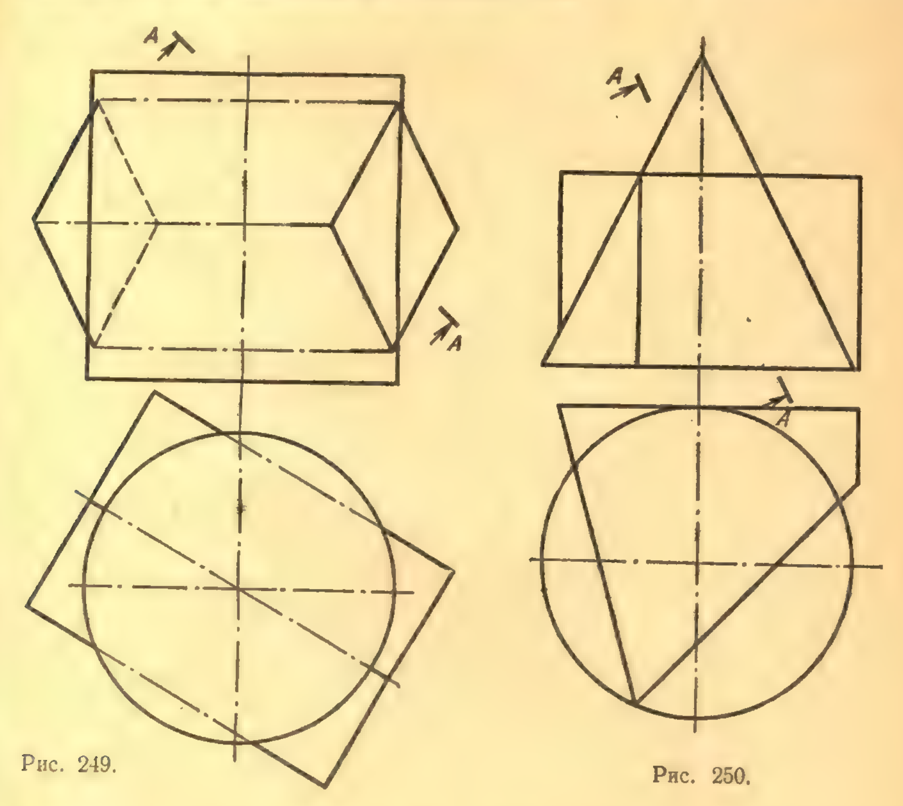


Рис. 249.

Рис. 250.

267. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и конуса; б) натуральный вид сечения A—A (рис. 250).

268. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и кругового кольца; б) натуральный вид сечения $A—A$ рис. 251).

Указание. Фронт. проекция линии пересечения совпадает с частью соответствующей проекции призмы.

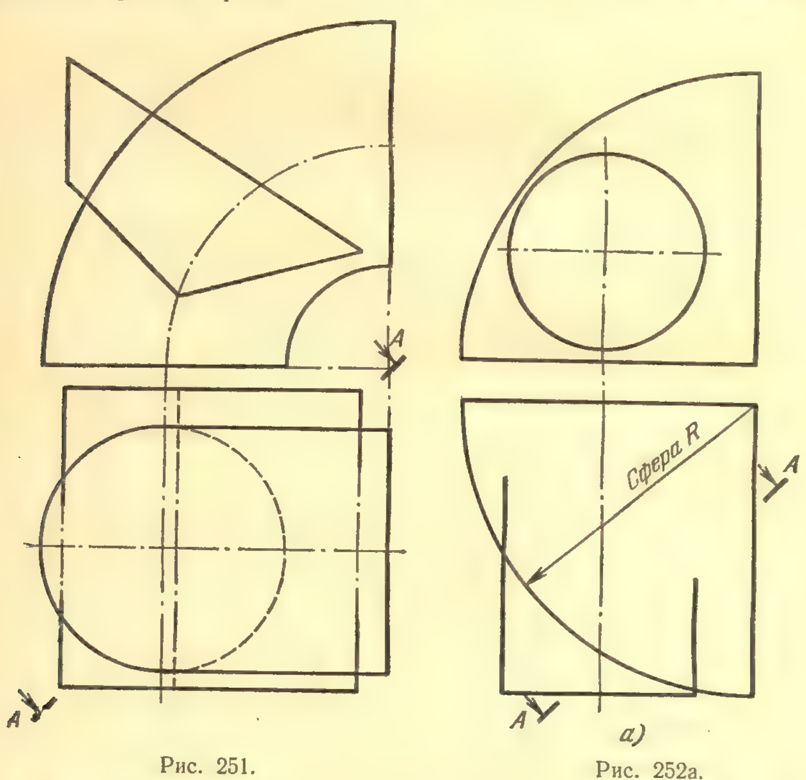


Рис. 251. Рис. 252а.

269*. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы; б) натуральный вид сечения $A—A$ (рис. 252, *а*).

Решение. Все точки фронт. проекции цилиндра (рис. 252, *б*) могут быть приняты за фронт. проекции точек, принадлежащих искомой линии пересечения. А отсюда легко найти, например, проекции d, m, n на горизонт. проекциях соответствующих параллелей сферы, проекции a, b, k на горизонт. проекциях дуг окружностей, проводимых на фронт. проекции сферы радиусами $c'a'$, $c'b'$, $c'k'$. Точки a и b представляют собою горизонт. проекции характерных точек линии пересечения, наименее и наиболее удаленных от пл. V. Проекции m', m и n', n определяют точки пересечения очерковых образующих цилиндра со сферой.

Изображенное тело — сочетание части сферы и цилиндра — рассматривается как монолитное. При построении сечения $A—A$ получено сечение части сферы, ограниченное дугой окружности радиуса $O_0 1_0$ и двумя отрезками прямых, по которым плоскость $A—A$ пересекает «четвертинки» кругов, ограничивающих справа и снизу рассматриваемую часть сферы. Затем получена часть эллипса (на рис. 252, *в* он показан целиком) как сечение цилиндра. Отрезок $2_0 2_{10}$ получен от пересечения плоскости, ограничивающей цилиндр.

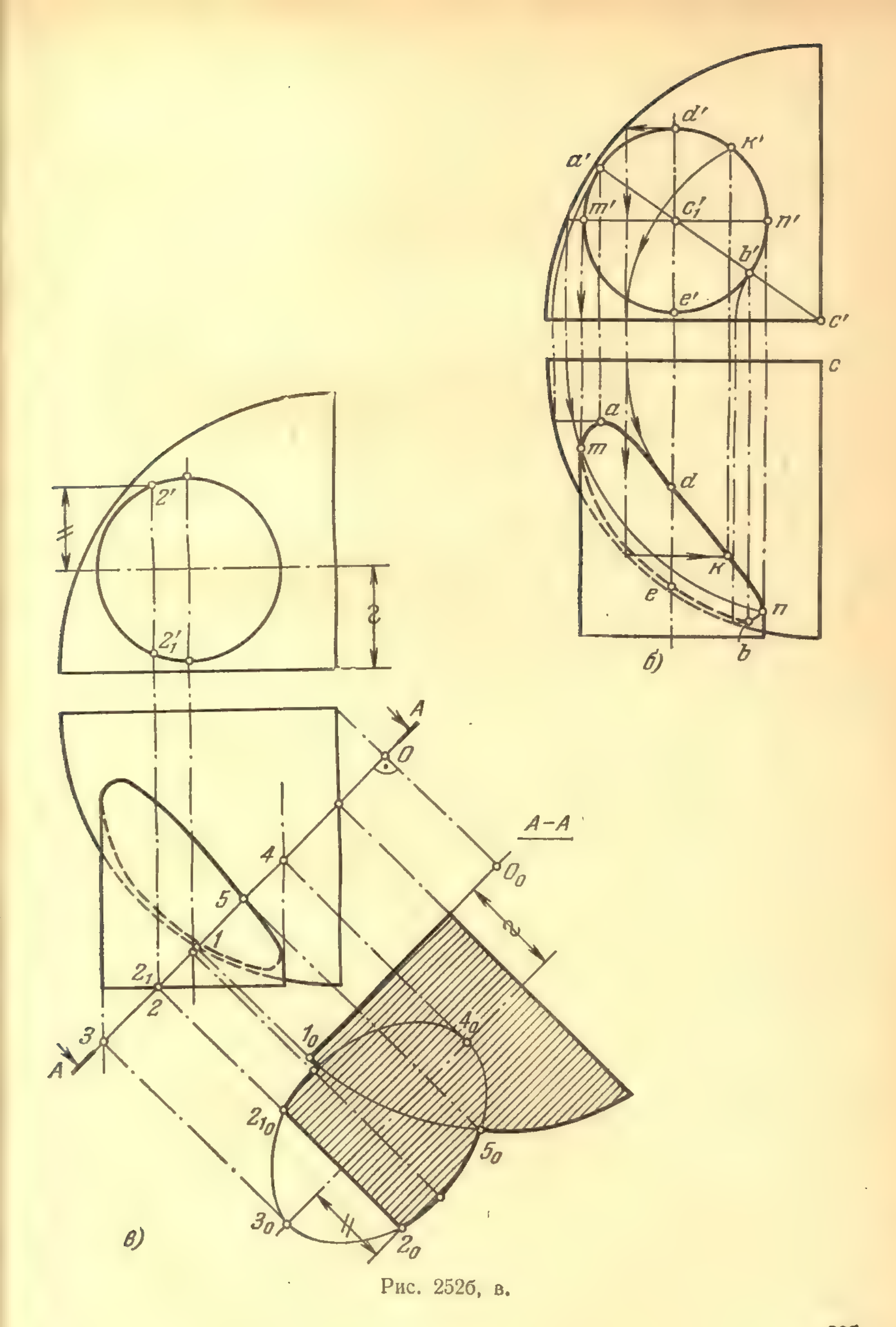

d'
k'
a'
m'
c_1'
n'
b'
e'
c'
c
a
m
d
k
e
n
b
б)
2'
$2_1'$
A
O
A–A
O_0
4
5
1
2_1
2
3
A
1_0
4_0
2_{1_0}
5_0
3_0
2_0
в)

Рис. 252б, в.

270. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса; б) натуральный вид сечения $A - A$ (рис. 253).

Указание. Фронт. проекция линии пересечения совпадает с частью соответствующей проекции цилиндра.

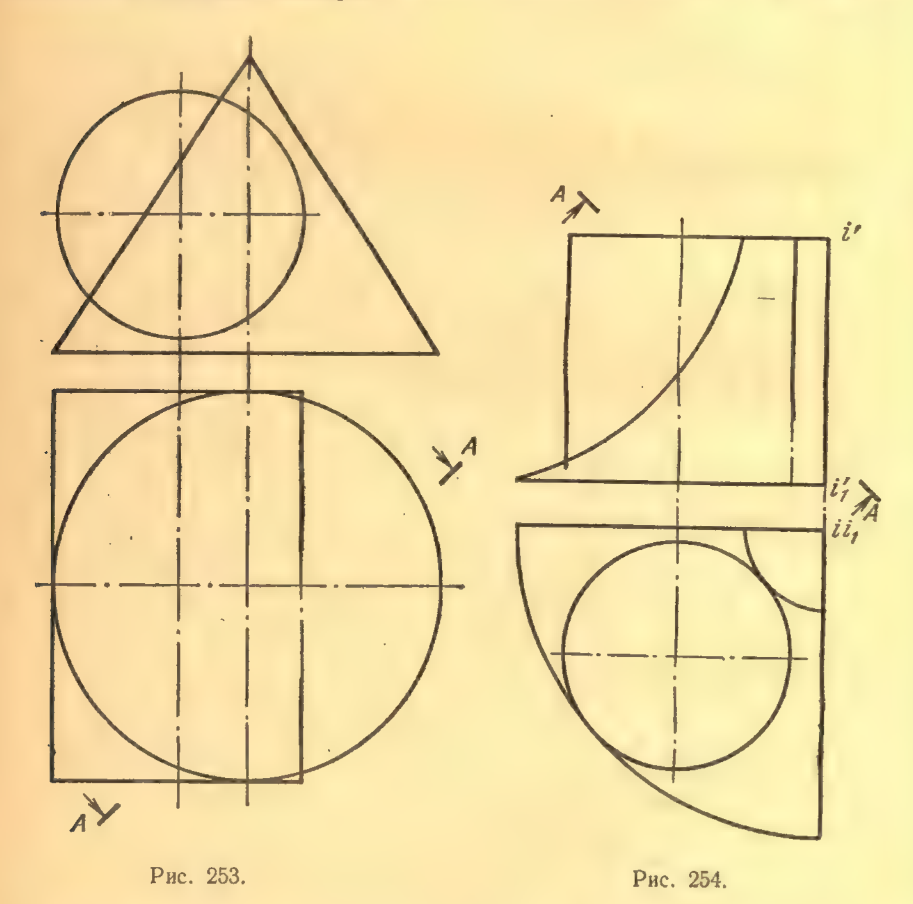


Рис. 253. Рис. 254.

271. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и тела вращения (с осью II_1, перпендикулярной к пл. H); б) натуральный вид сечения $A - A$ (рис. 254).

Указание. Горизонт. проекция линии пересечения совпадает с соответствующей проекцией цилиндра.

272*. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей конуса и сферы; б) натуральный вид сечения $A - A$ (рис. 255, *а*).

Решение. В этом случае ни одна из проекций ни одного из данных тел не совпадает полностью или частично с проекциями искомой линии пересечения. Мы не можем исходить из того, что положение проекций ее точек нам известно, как это было в задачах 265 и 269. Поэтому мы используем здесь общий прием построения

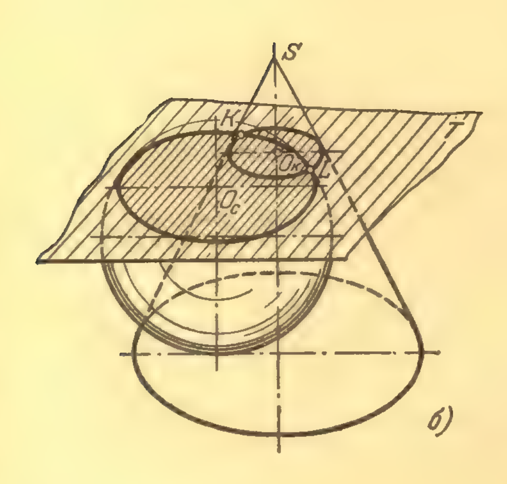


Рис. 255а—в.

точек взаимного пересечения поверхностей, а именно введение вспомогательных секущих плоскостей (рис 255, *б*), пересекающих каждую из заданных поверхностей по некоторым линиям, и определение точек, общих для этих поверхностей, в пересечении линий, полученных на них.

Учитывая свойство и положение заданных поверхностей, применим в данном случае серию секущих плоскостей, параллельных пл. H. Каждая такая плоскость пересекает поверхности конуса и сферы по окружностям (рис. 255, *в*). Например,

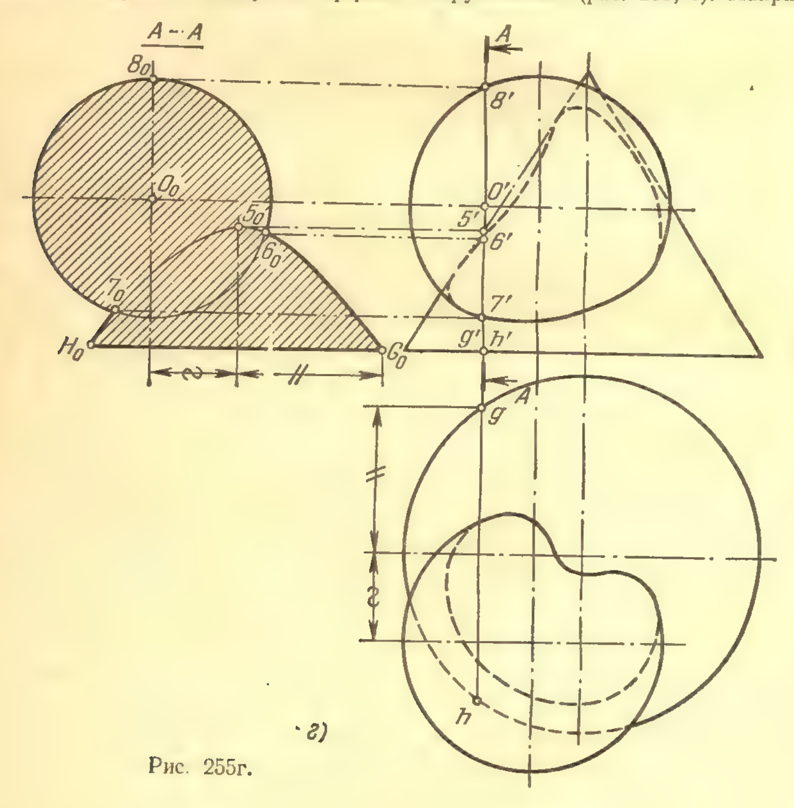


Рис. 255г.

пл. R на конусе дает окружность радиуса $s—2$, а на сфере окружность радиуса $c—3$. Эти окружности в своем пересечении определяют точки D и E, общие для поверхностей конуса и сферы.

Но кроме точек, получаемых подобным образом, надо построить еще некоторые характерные точки, положение которых уточняет искомую линию. Это прежде всего высшая и низшая точки на фронт. проекции. Для их нахождения мы также используем некоторую пл. S: она проходит через ось конуса и через центр сферы и является для этих тел общей плоскостью симметрии. Пл. S пересекает поверхность конуса по образующим, а поверхность сферы по окружности; повернув пл. S вместе с полученными в ней линиями вокруг оси конуса до положения, параллельного пл. V, получим точки a_1' и b_1', а по ним сначала a' и b', затем a и b.

Имеют значение точки f', f и i', i на главном меридиане конуса, так как в них определяются точки пересечения крайней образующей $s'\,l_1'$, $s—l_1$ с поверхностью сферы; для нахождения этих точек взята вспомогательная пл. U, соответствующая

главному меридиану конуса и рассекающая поверхность сферы по окружности радиуса $c'4'$.

Также следует найти точки на экваторе сферы, для чего в серии горизонтальных секущих плоскостей надо взять пл. P: в точках m и n горизонт. проекция экватора смыкается с видимой частью проекции линии пересечения на пл. H.

Сечение $A—A$ (рис. 255, *г*) очерчено дугой окружности (от пересечения поверхности сферы), частями гиперболы (от пересечения конической поверхности) и отрезком H_0G_0 (от пересечения основания конуса). Надо обратить внимание на смещение центра кругового сечения сферы относительно оси гиперболы.

273. Построить проекции линий пересечения: а) поверхностей тора и эллипсоида вращения (рис. 256, *а*); б) поверхностей тора и сферы (рис. 256, *б*). В обоих случаях построить сечения $A—A$.

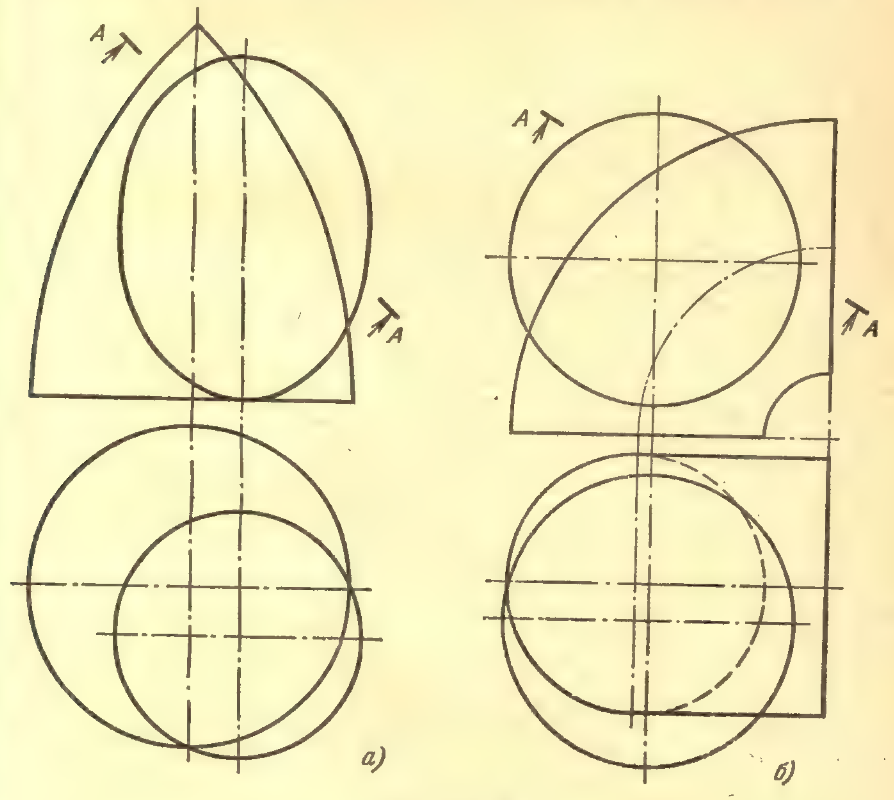
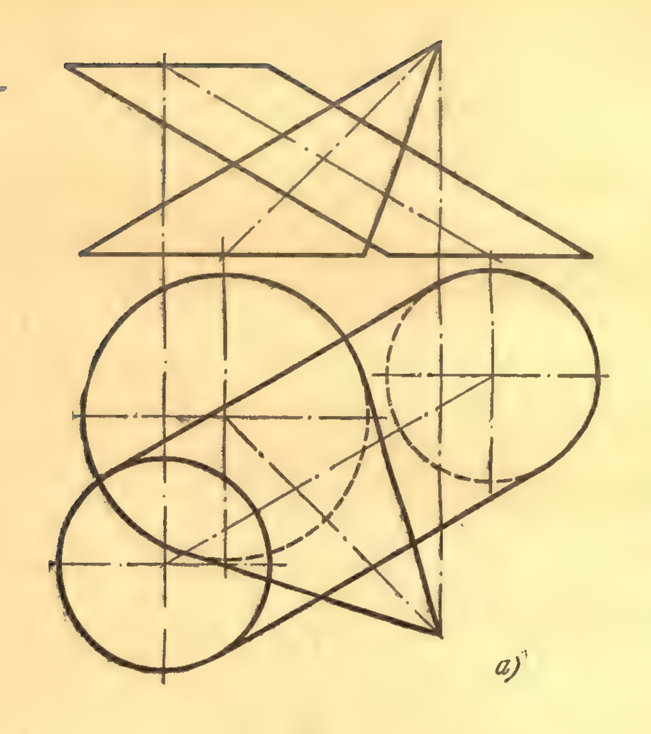


Рис. 256а, б.

274*. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра (рис. 257, *а*).

Решение. Здесь так же, как и в задаче 272, приходится прибегать к вспомогательным секущим плоскостям. Какие же плоскости наиболее удобны в данном случае? Это плоскости, проходящие через вершину конуса и параллельные образующим цилиндра (рис. 257, *б*). Такие плоскости (например, пл. P) пересекают обе поверхности по прямым—образующим, положение которых определяется точками



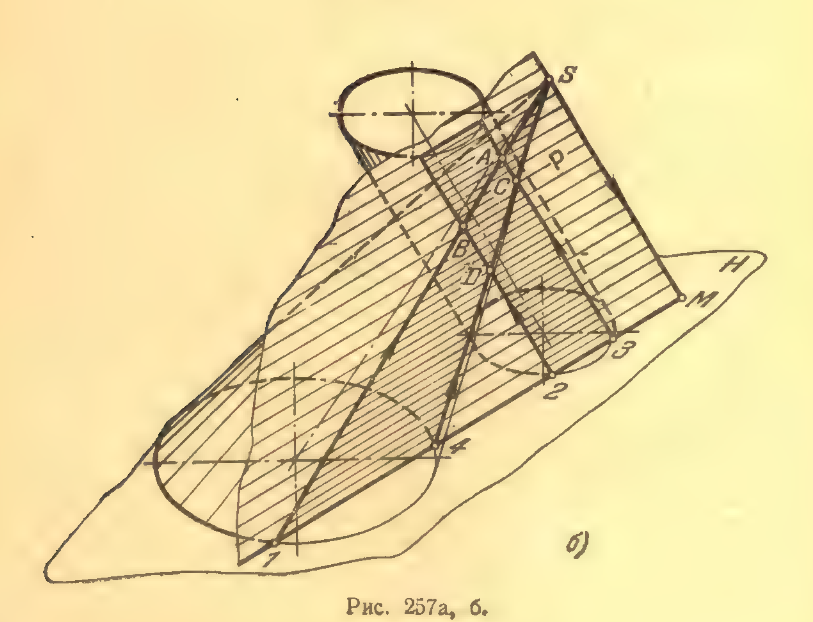


Рис. 257а, б.

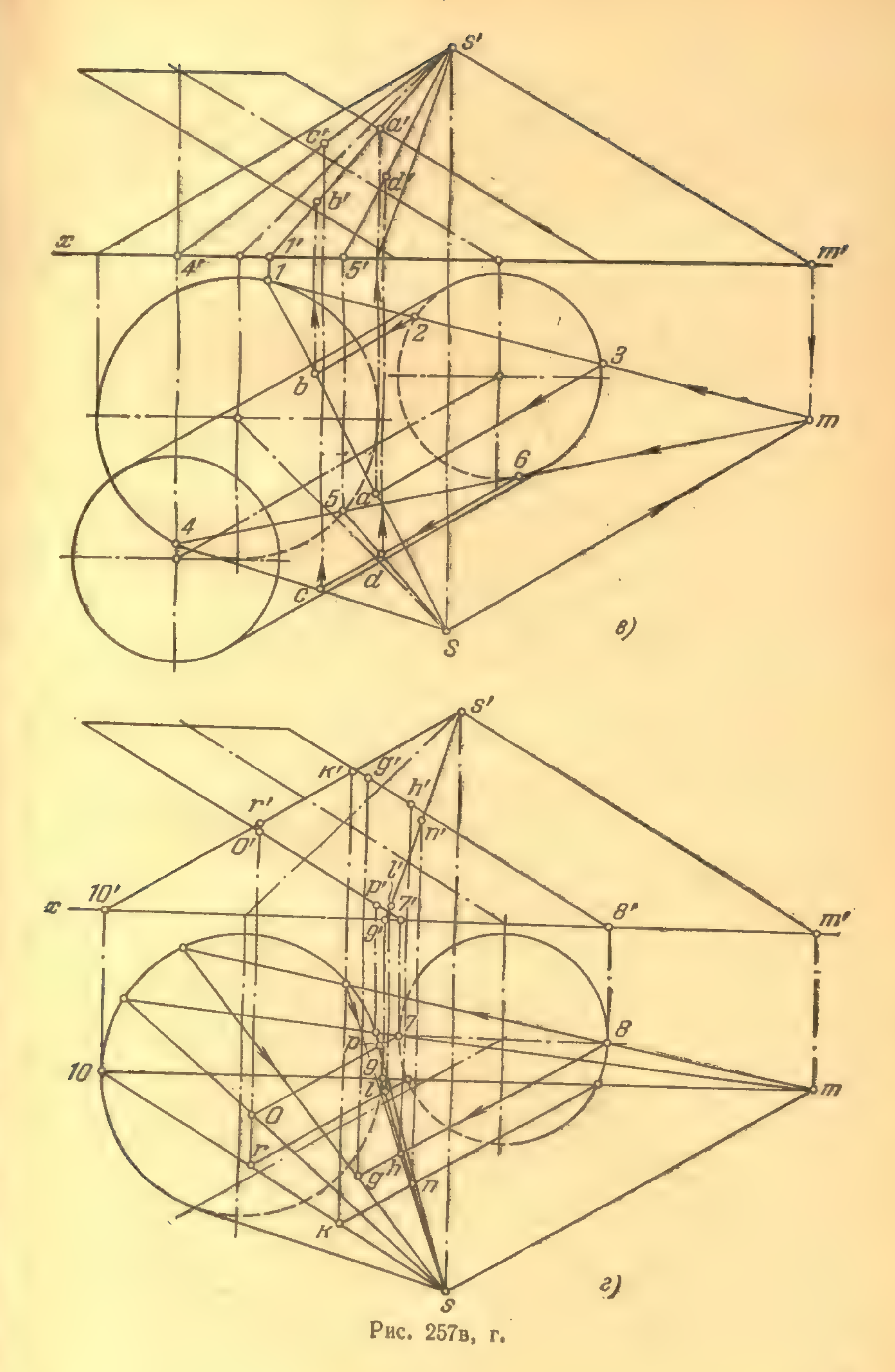

s'
c'
a'
d'
b'
x
4'
1'
1
5'
m'
2
3
b
m
6
5
a
4
c
d
s
в)
s'
k'
g'
h'
r'
n'
O'
l'
10'
p'
7'
8'
m'
9'
7
8
p
10
9
l
m
O
r
g
h
n
k
s
г)

Рис. 257в, г.

пересечения оснований данных тел со следом секущей плоскости на плоскости оснований. Построение показано на рис. 257, *в*.

Через точку *s′*,*s* проведена прямая параллельно образующей цилиндра; найдены проекции *m′* и *m* горизонт. следа этой прямой.

Если горизонт. следы секущих плоскостей проводить через точку *m* так, чтобы каждый из них пересекал или касался оснований конуса и цилиндра, то на поверхностях цилиндра и конуса обнаруживаются образующие, в пересечении которых получаются точки искомой линии. Сначала займемся точками на образующих, являющихся очерковыми на горизонт. проекции. Проводим следы плоскостей по направлениям *m—6* и *m—1* касательно к окружностям оснований, получаем на каждой из поверхностей по три образующих: на конусе образующие *s—1*, *s—5* и *s—4*, на цилиндре образующие из точек *6*, *2* и *3*.

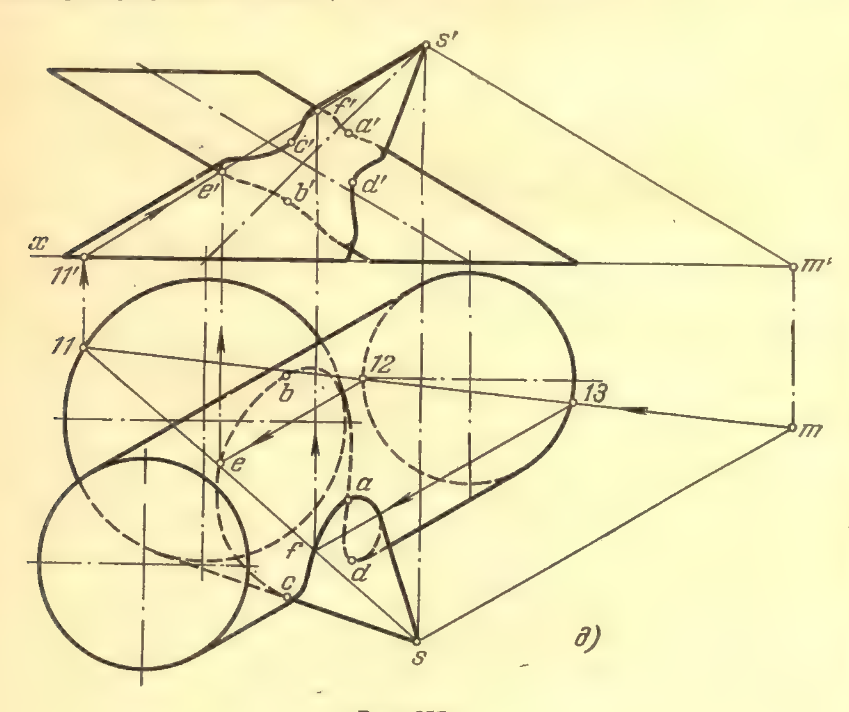


Рис. 257д.

Остается взять точки пересечения образующих — на горизонт. проекции точки *a*, *b*, *c*, *d* и на фронт. проекции *a′*, *b′*, *c′*, *d′*.

Теперь для нахождения точек, лежащих на очерковых образующих фронт. проекций тел, проводим следы секущих плоскостей через горизонт. проекции концов соответствующих образующих — точки *7*, *8*, *9* и *10* (рис. 257, *г*).

Таким образом, находим точки *g*, *h*, *k*, *l*, *n*, *o*, *p*, а по ним фронтальные проекции.

На рис. 257, *д* показан пример нахождения промежуточных точек (*E* и *F*) и проведены обе проекции искомой линии.

275. Построить проекции линий пересечения: а) двух цилиндрических поверхностей (рис. 258, *а*); б) двух конических поверхностей (рис. 258, *б*).

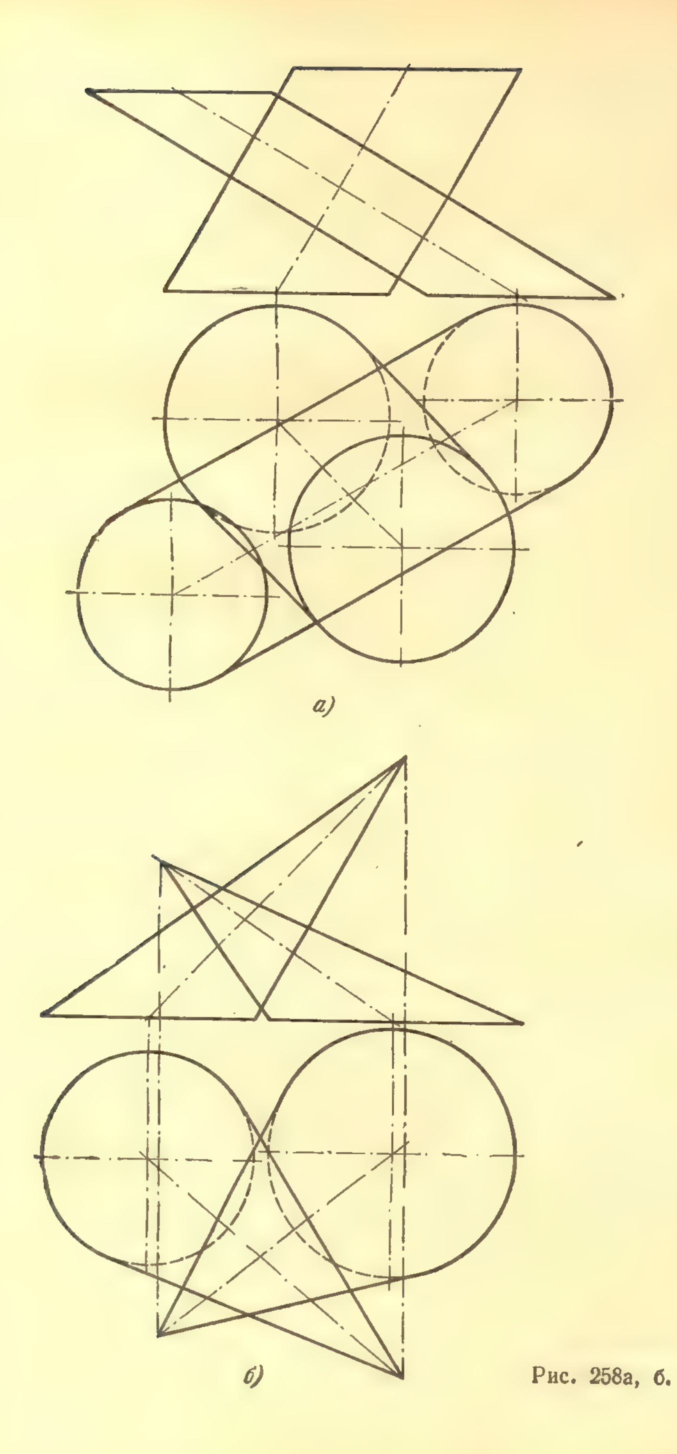


Рис. 258а, б.

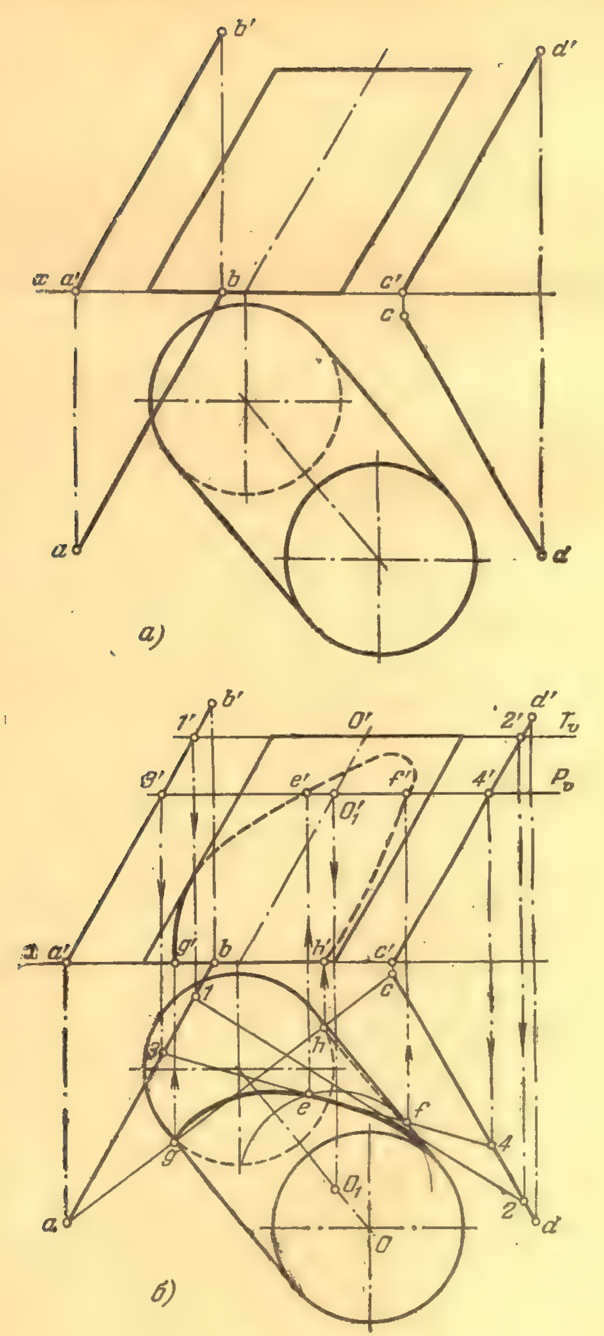


Рис. 259а, б.

276*. Построить проекции линии пересечения цилиндрической поверхности с косой плоскостью. Косая плоскость задана направляющими AB и CD при пл. H как плоскости параллелизма (рис. 259, *а*).

Решение. Учитывая свойства и положение заданных поверхностей, а именно то, что цилиндр имеет ряд круговых сечений в плоскостях, параллельных пл. H, и что образующие косой плоскости параллельны той же пл. H, берем серию вспомогательных плоскостей (T, P и т. д.), параллельных пл. H (рис. 259, *б*).

Они пересекают цилиндрическую поверхность по окружностям с центрами O, O_1 и т. д., а косую плоскость — по прямым *1—2*, *3—4* и т. д. Горизонт. проекции искомых точек (e, f и др.) лежат на пересечении соответствующих проекций этих окружностей и прямых. По горизонт. проекциям находим фронт. проекции — e', f' и др. Искомая линия пересечения проходит через найденные точки.

На рис. 259, б показаны результат пересечения косой плоскости с цилиндром и самый цилиндр, а косая плоскость не изображена.

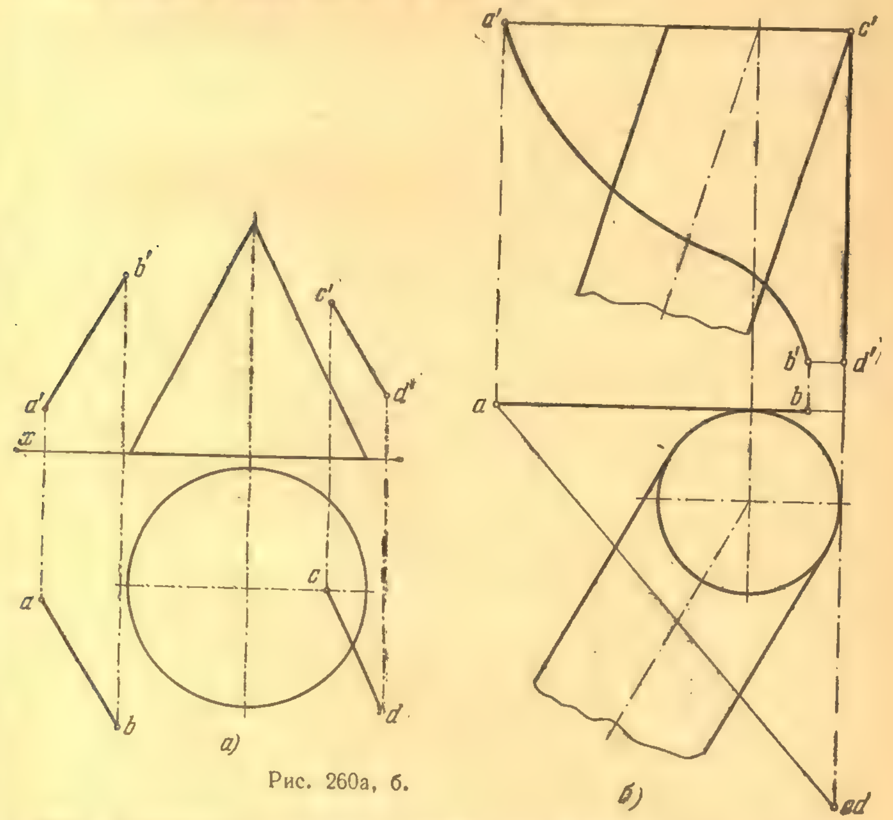


Рис. 260а, б.

277. Построить проекции линии пересечения: а) конической поверхности с косой плоскостью, направляющими которой являются прямые AB и CD, а плоскостью параллелизма — пл. H (рис. 260, *а*); б) коноида, направляющими которого являются кривая AB и прямая CD, а плоскостью параллелизма — пл. H, с цилиндрической поверхностью (отверстие) (рис. 260, *б*).

278*. Построить проекции линии пересечения поверхности конуса с поверхностью тора, ограничивающей отверстие в конусе (рис. 261, *а*).

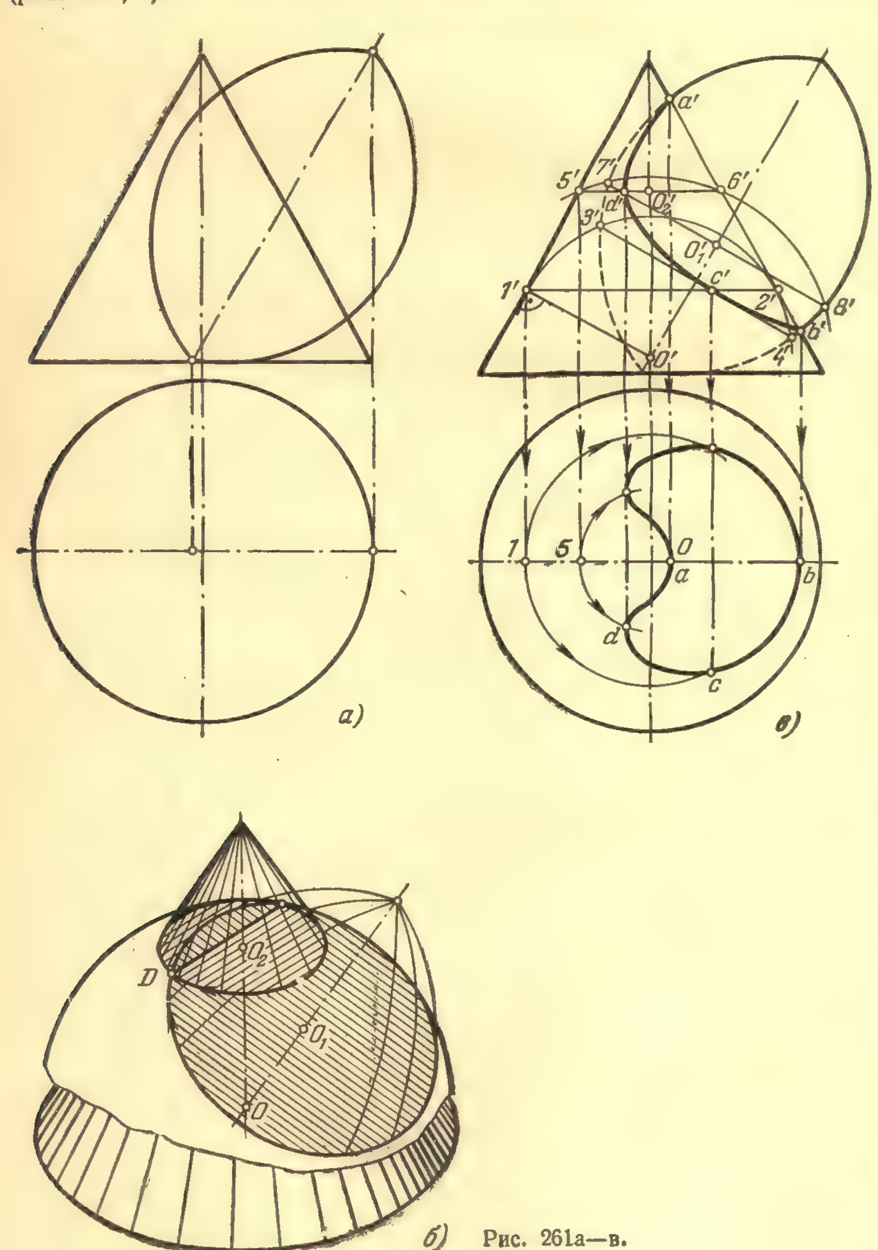
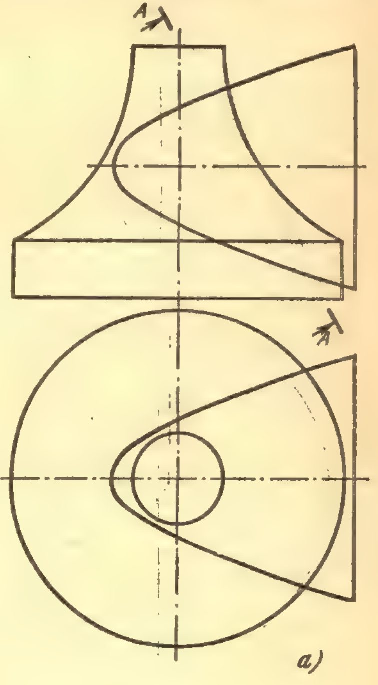


Рис. 261а—в.

Решение. В данной задаче мы имеем случай взаимного пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются и расположены в плоскости, параллельной пл. V. В подобных случаях наиболее простым является применение вспомогательных сфер, проводимых из точки пересечения осей обеих поверхностей (рис. 261, *б*). Эти сферы пересекают данные поверхности по окружностям, в пересечении которых получаются точки, общие для обеих поверхностей.



На рис. 261, *в* показано применение двух сфер. Фронт. проекция одной из них проведена как окружность с центром O' радиусом $O'5'$. Отрезок $5'6'$ является фронт. проекцией окружности, по которой сфера пересекает коническую поверхность, а отрезок $7'8'$ — фронт. проекцией окружности, по которой эта сфера пересекает поверхность тора. Получается точка d' — фронт. проекция одной из точек, общей для поверхности тора и конуса. По точке d' находим на параллели конуса проекцию d и ей симметричную.

Сфера радиуса $O'1'$ лишь касается конической поверхности по окружности, но поверхность тора пересекает. Поэтому точка c', полученная с помощью этой сферы, имеет особое значение: если брать сферы с радиусом меньшим, чем $O'1'$, то общих точек для данных поверхностей мы с помощью таких сфер не получим. В точке c' фронт. проекция линии пересечения лишь коснется прямой $3'4'$, но ее не пересечет.

Положение точек a' и b' очевидно.

Радиусы вспомогательных сфер следует брать в данном случае в пределах от $O'1'$ до $O'a'$.

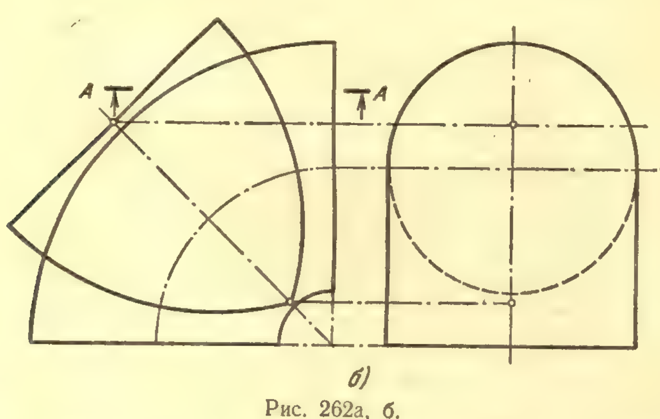


Рис. 262а, б.

279. Построить проекции линии пересечения: а) поверхности вращения с поверхностью гиперболоида вращения (рис. 262, *а*); б) поверхностей двух торов (рис. 262, *б*), и в обоих случаях сеч. $A - A$.

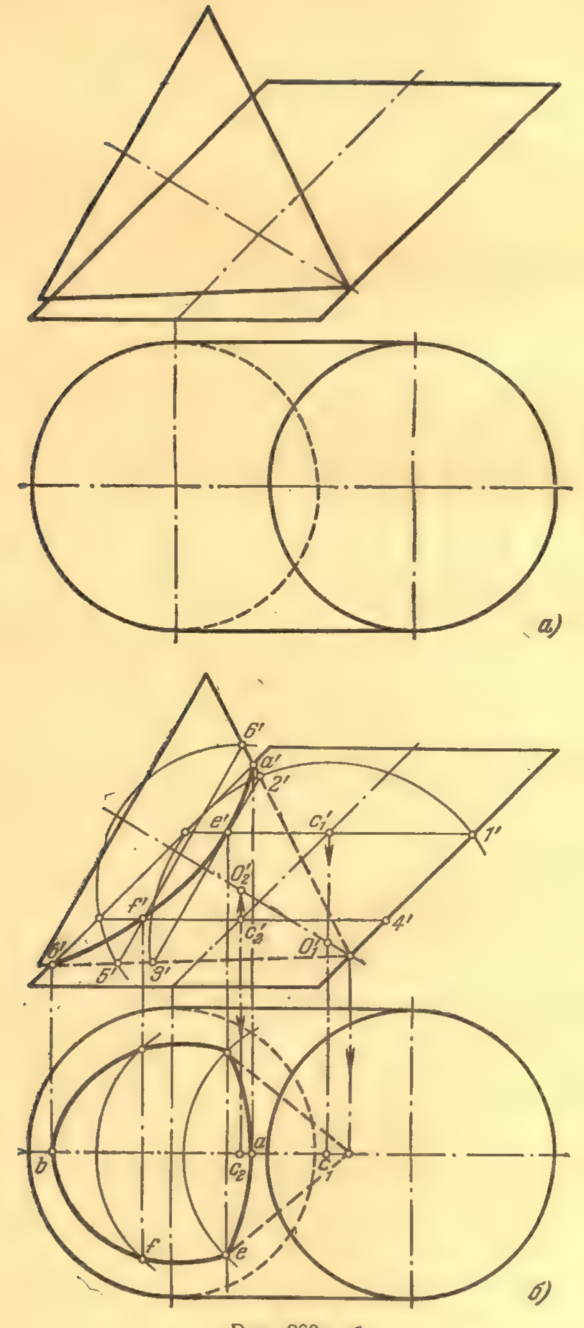
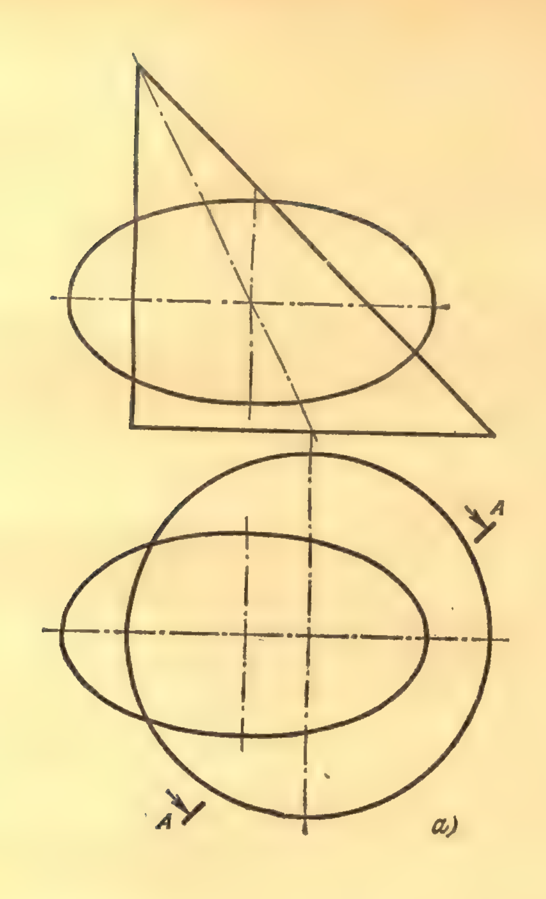


Рис. 263а, б.



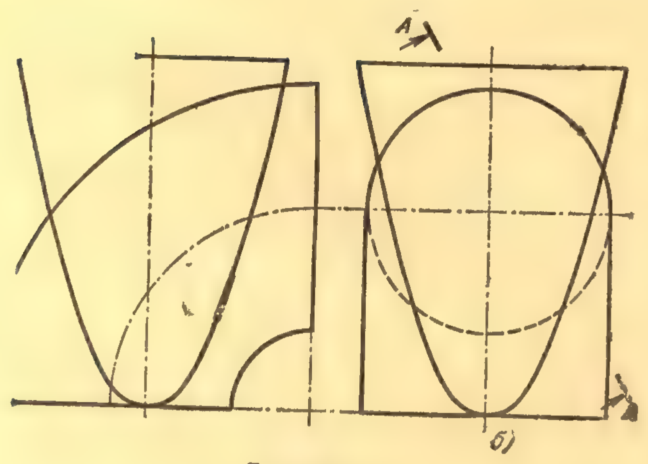


Рис. 264а, б.

280*. Построить проекции линии пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью конуса вращения, ограничивающей отверстие в цилиндре (рис. 263, *а*).

Решение. Из двух заданных поверхностей лишь одна поверхность вращения— коническая. Другая же поверхность не является поверхностью вращения. Это цилиндр, называемый наклонным круговым,— круговым, так как он имеет ряд круговых параллельных между собою сечений. В данном случае такие сечения параллельны пл. *H*. Кроме того, имеется общая для конуса и цилиндра плоскость симметрии, параллельная пл. *V*.

Эти обстоятельства подсказывают использование вспомогательных сфер, но не с постоянным центром, как в задаче 278.

Действительно, круговое сечение цилиндра можно принять за параллель некоторой сферы. Например, окружность радиуса $c_1'1'$ (рис. 263, *б*) может быть параллелью многих сфер, центры которых располагаются на прямой, проведенной через c_1' перпендикулярно к плоскости параллели. Если же мы на этом перпендикуляре возьмем точку в пересечении с осью конуса, то такую точку (с фронт. проекцией O_1') можно принять за центр сферы с радиусом $O_1'1'$, пересекающей цилиндр по окружности радиуса $c_1'1'$, а конус вращения — по окружности с диаметром $2'3'$. Отсюда мы получаем точки, фронт. проекции которых сливаются в одну точку e' (одна из этих точек — на обращенной к нам части линии пересечения, другая — на ей симметричной).

На рис. 263, *б* дан еще один пример подобного построения. Задавшись на цилиндре окружностью радиуса $c_2'4'$, находим фронт. проекцию центра сферы в точке O_2' и радиус сферы, равный $O_2'4'$. При помощи этой сферы получены точки, общие для поверхностей конуса и цилиндра, с фронт. проекциями в точке f'.

Положение точек a' и b' очевидно.

Горизонт. проекции точек по найденным их фронт. проекциям строим на окружностях — горизонт. проекциях окружностей, взятых на поверхности цилиндра.

281. Построить проекции линии пересечения: а) конической поверхности с поверхностью эллипсоида вращения (рис. 264, а); б) поверхности тора с поверхностью параболоида вращения (рис. 264, б).

В обоих случаях построить сечения *А—А*.

ГЛАВА VII

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВСЕМУ КУРСУ

§ 24. Задачи с решенными прототипами

282*. Определить расстояние от точки A до ближайшей точки на поверхностях: а) конуса (рис. 265, *а*); б) сферы (рис. 265, *б*); в) тора (рис. 265, *в*).

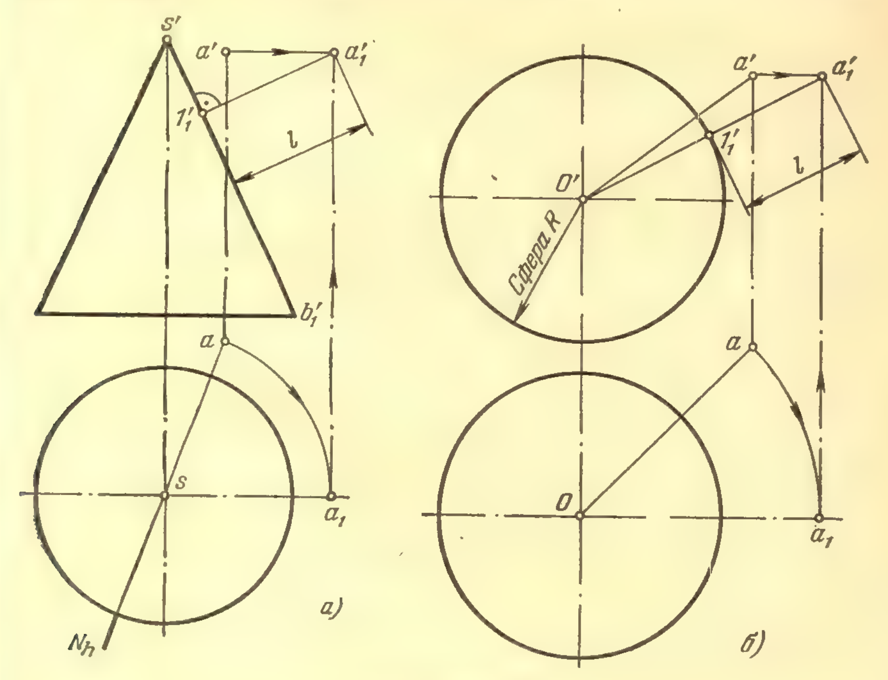


Рис. 265а, б.

Решение. а) Искомое расстояние (рис. 265, *а*) равно расстоянию от данной точки до ближайшей к ней образующей. Эта образующая лежит в пл. N, проходящей через точку A и ось конуса.

Поворачиваем эту плоскость вокруг оси конуса до положения, параллельного пл. V. Точка A займет положение $A_1(a_1, a_1')$, и искомое расстояние выразится отрезком $a_1' 1_1'$, перпендикулярным к $s'b_1'$.

б) На рис. 265, *б* показано, что искомое расстояние измеряется по прямой AO. Повернув прямую AO вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к пл. H, так, чтобы AO стала параллельна пл. V, получим $l = A_1O - R = a_1'O' - R$.

в) Расстояние от точки A до поверхности тора (рис. 265, *в*) измеряется величиной отрезка нормали к поверхности тора в плоскости, проходящей через точку A и ось тора. Повернув эту плоскость вокруг оси тора до положения, параллельного пл. V, и проведя прямую $a_1'O'$, получим точку $1_1'$ и отрезок $a_1' 1_1'$. Это и есть нормаль к поверхности тора, проходящая через точку A_1, а до поворота — через точку A.

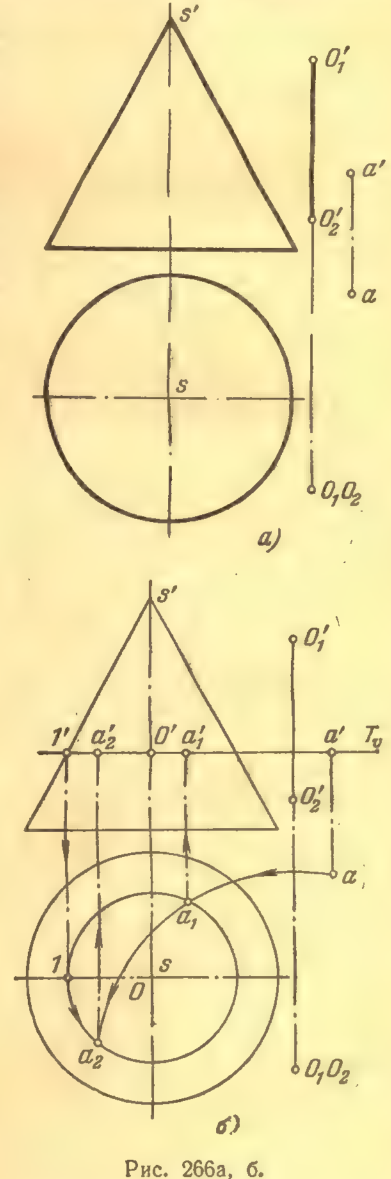
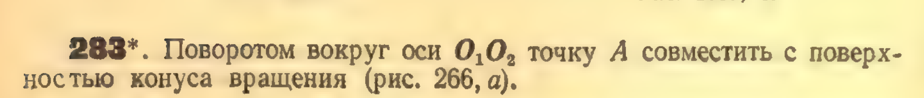


Рис. 265в.

Рис. 266а, б.


283*. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить с поверхностью конуса вращения (рис. 266, *а*).

Решение. Поворот точки A вокруг оси O_1O_2 происходит в пл. T (рис. 266, *б*), перпендикулярной к O_1O_2. Центр дуги окружности, по которой перемещается точка A, находится в точке пересечения оси O_1O_2 с плоскостью вращения T. Горизонт. проекция этого центра совпадает с точками O_1 и O_2. Итак, проведя из точки $O_1(O_2)$ дугу радиуса O_1a, получим на этой дуге горизонт. проекцию точки A в любом ее положении в пл. T при повороте вокруг оси O_1O_2. Но чтобы точка A оказалась при этом на поверхности данного конуса вращения, надо, очевидно, взять параллель конической поверхности на уровне пл. T, т. е. окружность радиуса $O'1'$. На этой окружности и находим точку A, когда она при повороте вокруг оси O_1O_2 оказывается на поверхности заданного конуса. По горизонт. проекциям a_1 и a_2 находим проекции a'_1 и a'_2. В положении A_1 точка A окажется невидимой относительно пл. V, а в положении A_2— видимой. Точка A в положениях A_1 и A_2 относительно пл. H будет видимой.

284. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить: а) с шаровой поверхностью (рис. 267, *а*); б) с поверхностью тора (рис. 267, *б*).

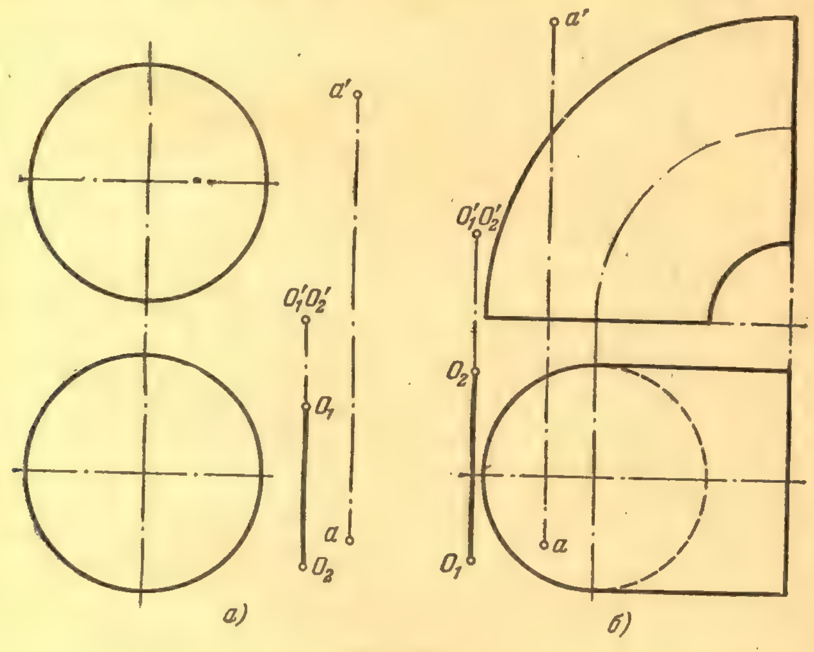


Рис. 267а, б.

285*. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить с винтовой поверхностью (рис. 268, *а*).

Решение. Заданная косая винтовая поверхность имеет ось, параллельную оси O_1O_2. В указанном на чертеже положении поворот точки A происходит в пл. R (рис. 268, *б*), параллельной пл. H и пересекающей данную поверхность по дуге спирали Архимеда. Строим горизонт. проекцию этой дуги, проводя для нахождения точек *3* и *6* плоскости P_1 и P_2 через ось поверхности. Они пересекают поверхность по ее образующим *1—2* и *4—5*. Находим точки *3'* и *6'* в пересечении следа R_v с *1'2'*

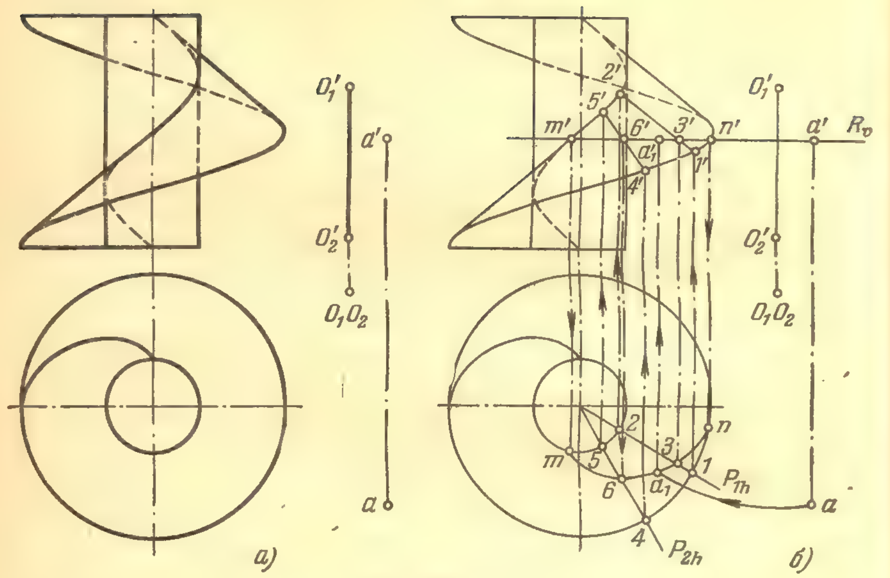


Рис. 268а, б.

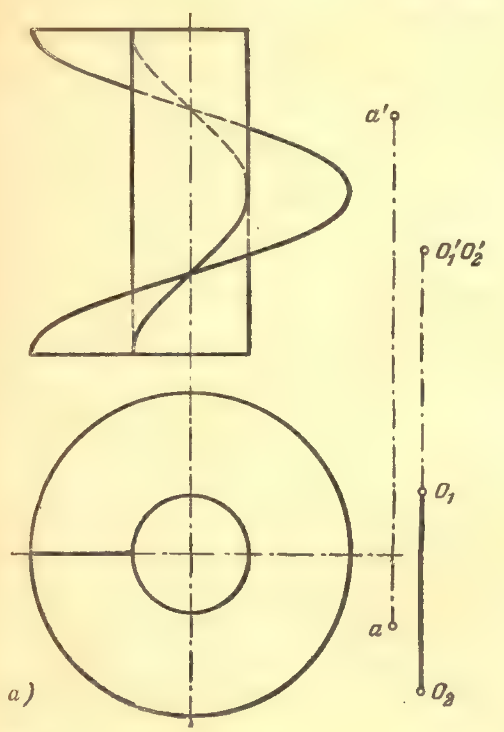


Рис. 269а.

и $4'5'$, по ним строим проекции 3 и 6. Проводим через точки m, 6, 3 и n кривую и находим точку пересечения (a_1) этой кривой с горизонт. проекцией окружности, описываемой точкой A. По a_1 находим a'_1; a_1 и a'_1 служат проекциями точки A в искомом положении.

286. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить: а) с винтовой поверхностью (рис. 269, *а*); б) с косой плоскостью (рис. 269,*б*),

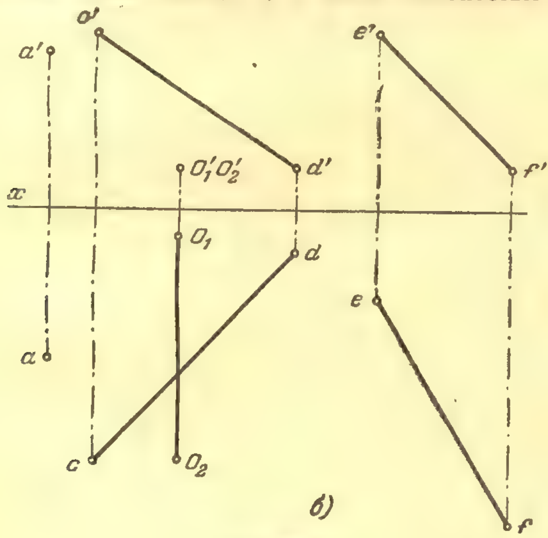


Рис. 269б.

заданной направляющими прямыми CD и EF и плоскостью параллелизма H.

287*. Указать положения осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно ввести точку A на заданную поверхность вращения (рис. 270, *а*).

Р е ш е н и е. В отличие от задач 283 и 285 в данной задаче ось для поворота точки не задается; оговаривается лишь то, что эта ось должна быть перпендикулярна к пл. H. Однако нельзя взять любую прямую, перпендикулярную к пл. H, и принять ее за ось, пригодную для решения этой задачи.

На рис. 270, *б* показано, что имеется такая область, в которой было бы бесцельным брать точки в качестве горизонт. проекций осей вращения. Например, приняв точку O_4 за горизонт. проекцию оси, мы получим радиус вращения точки A равным O_4a, но O_4a меньше расстояния точки a до ближайшей точки на окружности радиуса R, и, следовательно, дуга радиуса O_4a даже не коснется этой окружности. Или точка O_5: совершенно очевидно, что дуга радиуса O_5a не может иметь общих точек с окружностью радиуса R.

Но если взять точку O_1 так, чтобы $O_1a=O_11$, или точку O_3 так, чтобы $O_3a=O_33$, то в положениях 1 и 3 точка a окажется на окружности радиуса R. Взяв оси, проходящие через точки O_1 и O_3 перпендикулярно к пл. H, мы можем решить задачу о введении точки A на заданную поверхность вращения. Легко видеть, что решение сводится к построению гиперболы, у которой фокусами служат точки a и c, а вершинами — точки O_1 и O_3. Эта гипербола определяет область (на рис. 270, *б* она заштрихована), в которой любая точка может быть принята за горизонт. проекцию оси, при повороте вокруг которой точка A окажется в двух положениях на данной

поверхности вращения. Если же точку взять на одной из ветвей гиперболы, то такая точка определяет ось, при повороте вокруг которой точка A окажется на поверхности вращения лишь в единственном положении. Например, точка O_3: дуга радиуса O_3a лишь коснется в точке 2 окружности радиуса R.

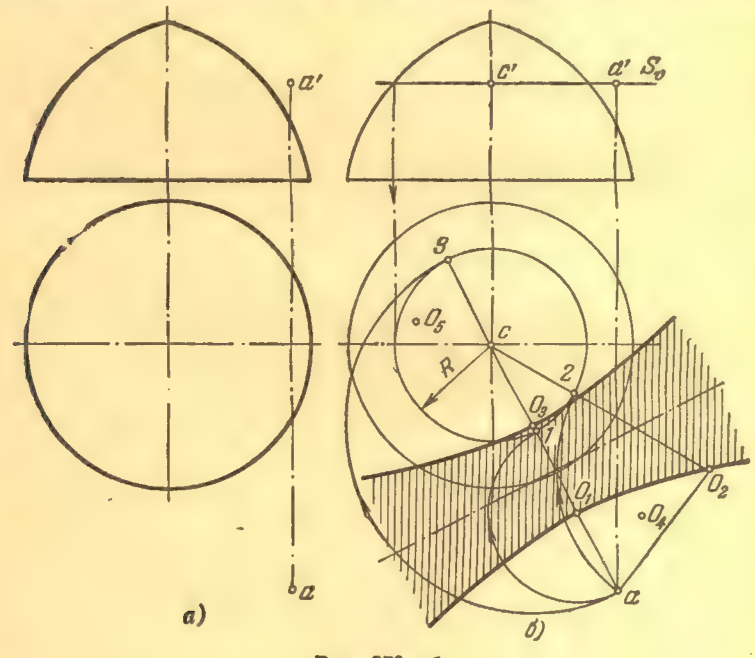


Рис. 270а, б.

288. Указать положение осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 271).

289*. Указать положение осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 272, *а*).

Р е ш е н и е. Отличие этой задачи от задачи 287* в том, что точка задана внутри поверхности вращения. Здесь также вопрос выбора положения осей решается при рассмотрении взаимного положения точки A и окружности радиуса R (параллели) на поверхности вращения (рис. 272, *б*). Очевидно, что горизонт. проекция оси вращения (какая-либо точка O) должна быть расположена так, чтобы радиус Oa был не меньше расстояния точки O до ближайшей точки на окружности радиуса R. Предельные положения точки O (например, O_1, O_2 и др.) расположатся как точки эллипса с фокусами в точках a и c, с большой осью O_1O_3 на прямой *1—3*. Точка O_1 делит пополам отрезок *a—1*, а точка O_3— отрезок *a—3*. Если взять точки внутри этого эллипса и принять их за горизонт. проекции осей вращения, то вращением вокруг таких осей нельзя данную точку совместить с поверхностью вращения. Горизонт. проекции осей надо брать или на эллипсе, или вне его.

290. Указать положения осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 273).

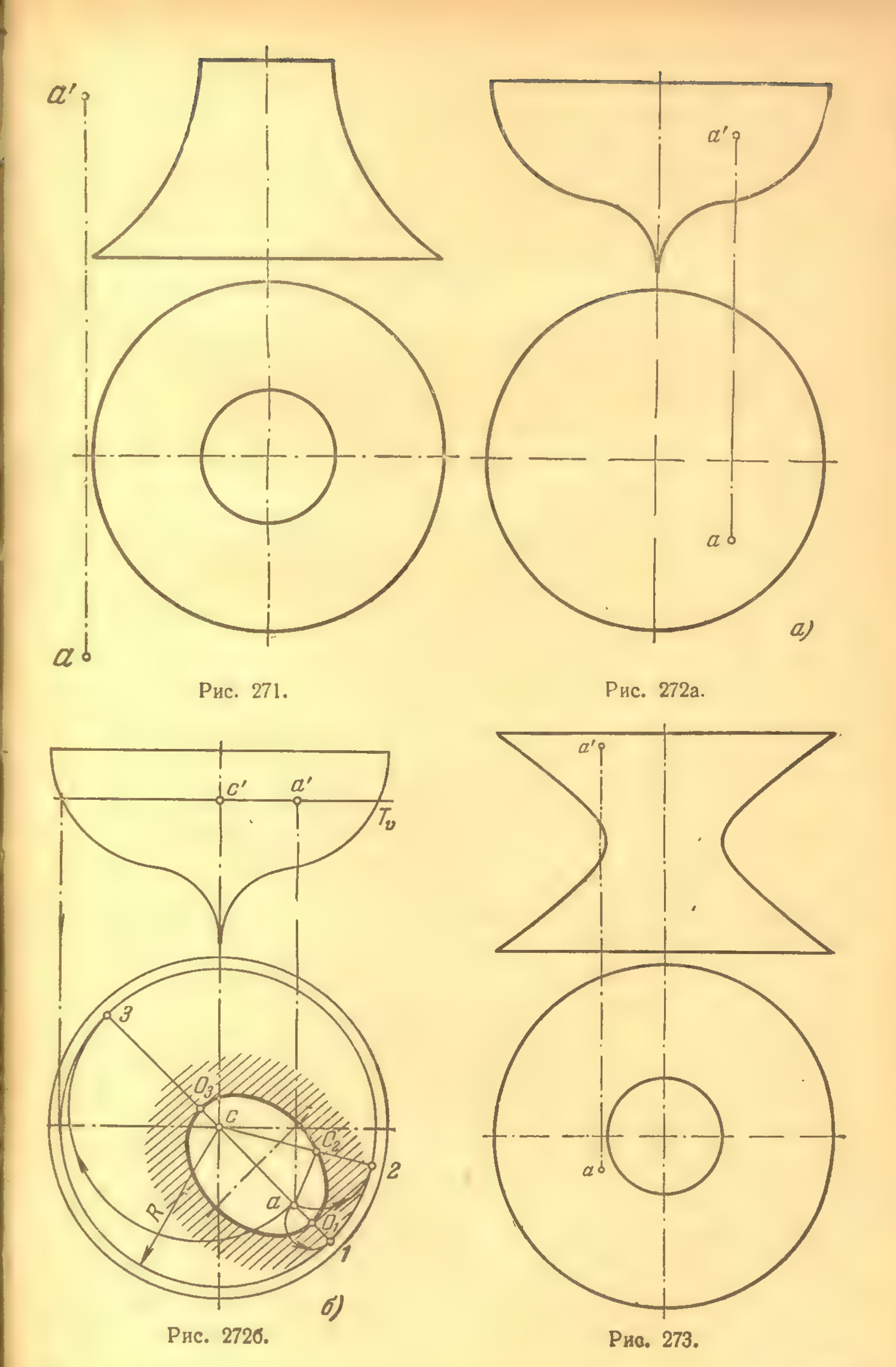


Рис. 271.

Рис. 272а.

Рис. 272б.

Рис. 273.

291*. На прямой CD найти точки, отстоящие от прямой AB на расстояние l (рис. 274, *а*).

Р е ш е н и е. Геометрическим местом точек пространства, отстоящих от прямой AB на расстояние l, является цилиндрическая поверхность с осью AB и радиусом l

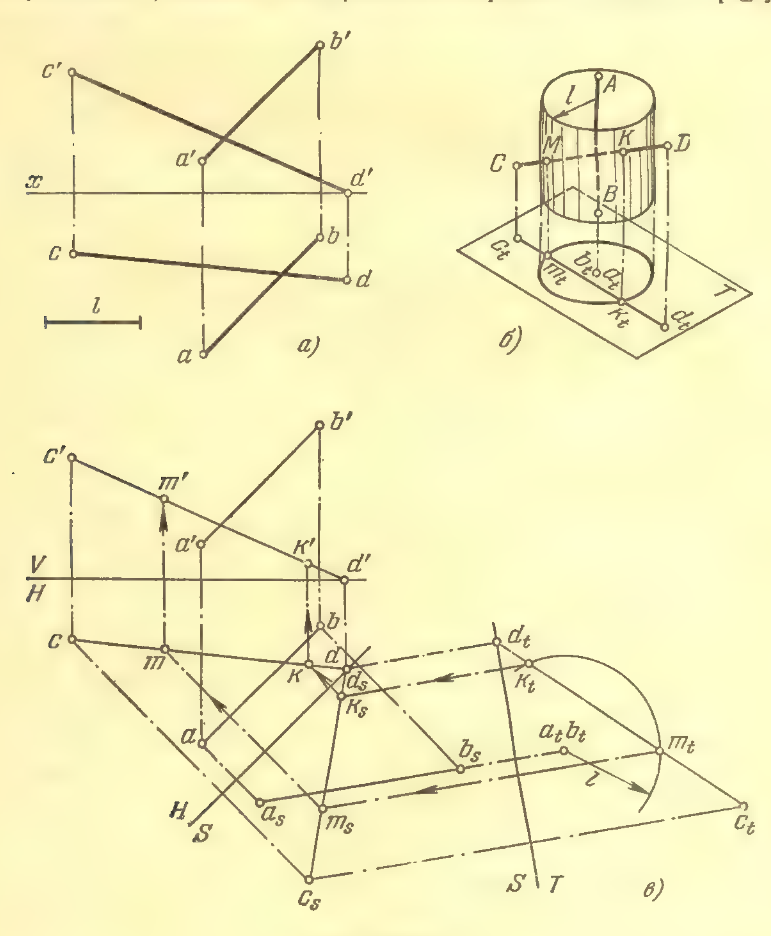


Рис. 274а—в.

(рис. 274, *б*). Искомые точки M и K являются точками пересечения прямой CD с этой поверхностью.

Очевидно, для упрощения построения надо сделать так, чтобы ось цилиндрической поверхности оказалась перпендикулярной к какой-либо плоскости, принятой за плоскость проекций. Сначала (рис. 274, *в*) вводим пл. $S \perp H$ и параллельно AB, затем пл. $T \perp S$ и $\perp AB$. В системе T, S прямая AB перпендикулярна к пл. T. Проекция цилиндрической поверхности на этой плоскости — окружность радиуса l с центром в точке $a_t(b_t)$. Точки пересечения (m_t и k_t) окружности с проекцией $c_t d_t$ являются проекциями искомых точек на пл. T. По m_t и k_t находим m_s и k_s, затем m и k, а по ним — m' и k'.

292. На прямой AB найти точки, отстоящие от оси x на расстояние l (рис. 275).

293*. Построить недостающую проекцию прямой CD, параллельной прямой AB, если расстояние между ними равно l (рис. 276, *а*).

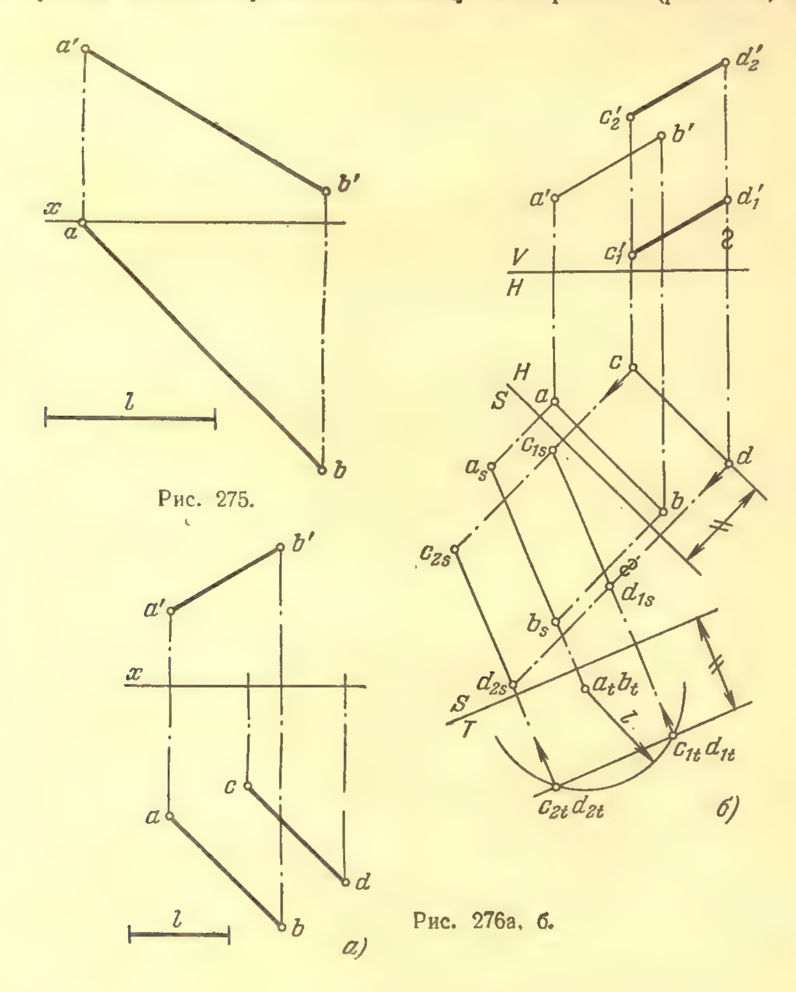


Рис. 275.

Рис. 276а, б.

Решение. Прямые линии, параллельные AB и находящиеся от нее на расстоянии l, являются образующими цилиндра, осью которого служит прямая AB, а радиусом нормального сечения — отрезок l. Исходя из этого, следует добиться того, чтобы прямая AB оказалась перпендикулярной к некоторой плоскости: цилиндр с осью AB изобразится на этой плоскости в виде окружности, на которой окажется соответствующая проекция прямой CD.

Построение показано на рис. 276, *б*. Последовательно введены дополнительные плоскости $S \perp H$ и $T \perp S$, причем $S \| AB$ и $T \perp AB$. Найдя точку $a_t(b_t)$ — проекцию AB на пл. T, очерчиваем дугу радиуса l. Это проекция на пл. T цилиндра, одной из образующих которого должна быть прямая CD. Проекцией этой прямой на пл. T

должна быть точка на проведенной дуге окружности на расстоянии от оси T/S, равном расстоянию проекции cd от оси S/H. Получаем две точки: c_{1t} (d_{1t}) и c_{2t} (d_{2t}), т. е. два ответа: обе прямые отвечают условиям задачи. Найдя проекции $c_{1t}(d_{1t})$ и $c_{2t}(d_{2t})$, проводим $c_{1s}d_{1s}\|a_sb_s$ и $c_{2s}d_{2s}\|a_sb_s$, а затем $c'_1d'_1\|a'b'\|c'_2d'_2$.

294. Построить горизонт. проекцию прямой CD, параллельной прямой AB и отстоящей от нее на расстояние l (рис. 277).

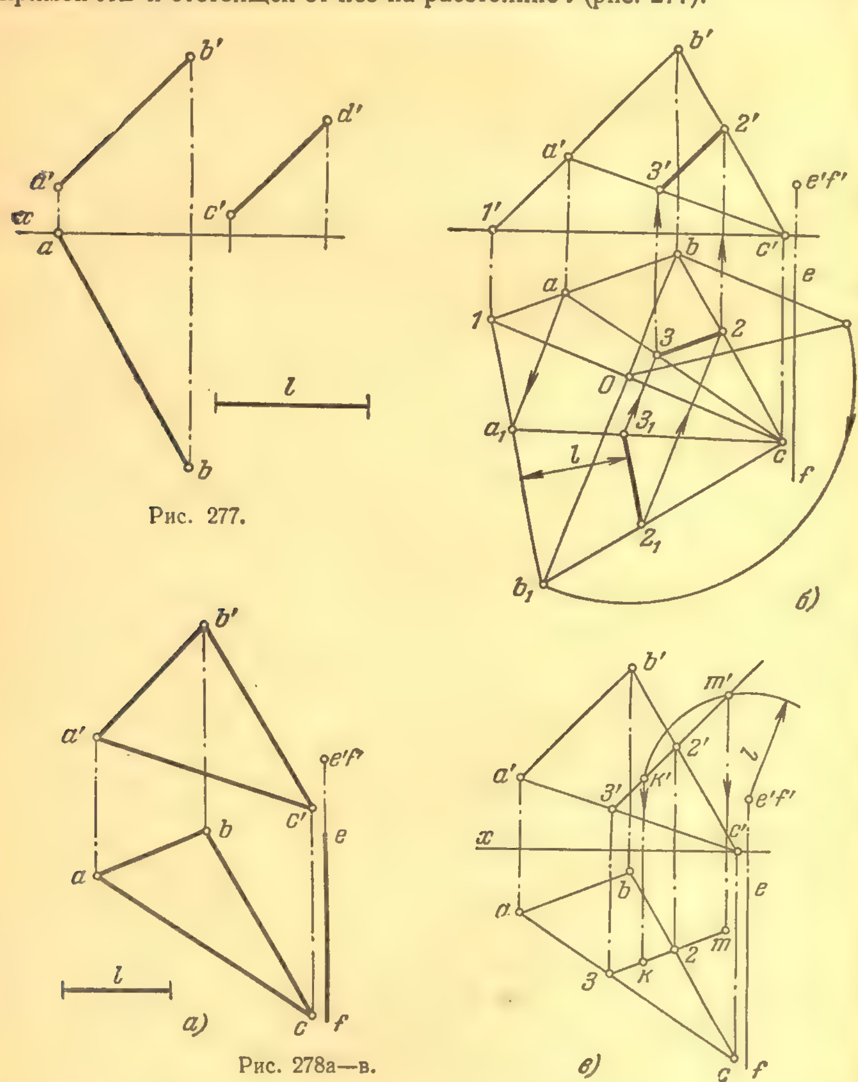


Рис. 277.

Рис. 278а—в.

295*. В треугольнике ABC найти точку, отстоящую от прямых AB и EF на расстояние l (рис. 278, a).

Р е ш е н и е. Геометрическим местом точек на плоскости треугольника, отстоящих на расстояние l от прямой AB, является прямая, ей параллельная и проведенная от нее на расстоянии l. Таких прямых может быть две; ограничимся той, которая находится в пределах треугольника ABC. На рис. 278, *б* треугольник ABC повернут вокруг горизонтали до параллельности пл. H. Горизонталь проведена через точку C. Найдена натуральная величина радиуса вращения точки B — отрезок $\overline{OB}$ и положение A_1B_1C треугольника ABC, когда его плоскость параллельна пл. H.

Проведя прямую $2_1 3_1$ параллельно $a_1 b_1$ на расстоянии l, находим точки 2 и 3, а по ним $2'$ и $3'$ на проекциях соответствующих сторон треугольника.

Переходим ко второму условию, связанному с прямой EF.

Геометрическим местом точек пространства, отстоящих от прямой EF на расстояние l, служит цилиндрическая поверхность с осью EF и радиусом l. Точка пересечения этой поверхности с прямой $2—3$ является искомой точкой. Таких точек может быть две. Но в пределах данного треугольника, как это следует из рассмотрения рис. 278, *в*, получится лишь одна точка — точка K.

Так как $EF \perp V$, то получаем непосредственно фронт. след цилиндрической поверхности в виде дуги окружности с центром $e'(f')$ и радиусом l. В пересечении этой дуги с проекцией $2'3'$ получается точка k' — фронт. проекция искомой точки, отстоящей от AB и от EF на расстояние l.

На рис. 278, *в* показана также точка M, отвечающая условиям задачи о равноудаленности от AB и EF (на l). Точка M находится в плоскости, заданной треугольником ABC, но вне его пределов. В условии же задачи сказано: «В данном треугольнике...». Поэтому полностью отвечает условиям задачи только точка K.

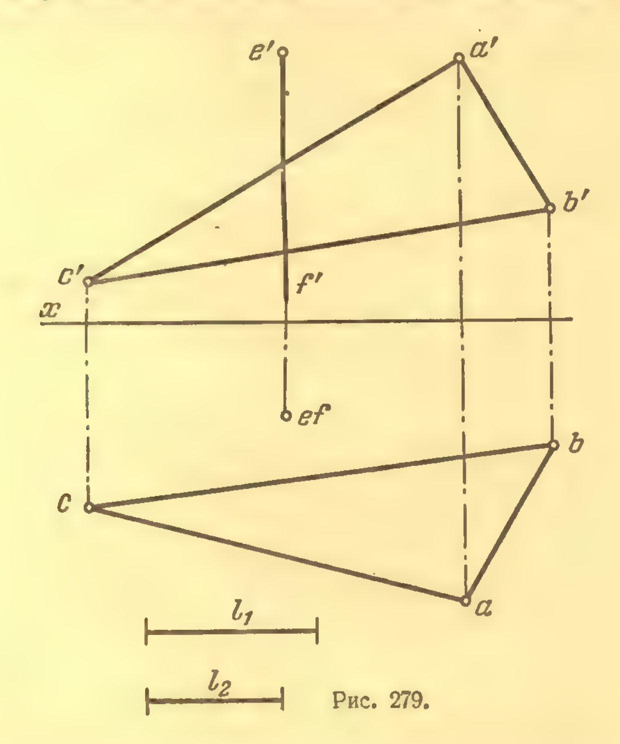
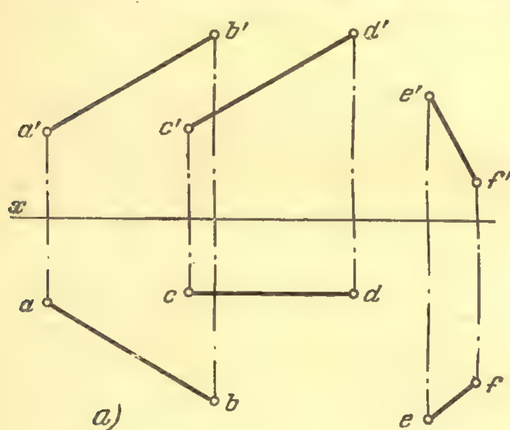


Рис. 279.

296. В данном треугольнике ABC найти точку, отстоящую от прямой AB на расстояние l_1, а от прямой EF на расстояние l_2 (рис. 279).

297*. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную одной из них, а именно прямой CD (рис. 280, *а*).



Решение. Представим себе, что прямая CD расположена перпендикулярно к некоторой плоскости проекций; тогда каждая прямая, параллельная CD, также будет перпендикулярна к этой плоскости, в том числе и искомая. В данном случае прямая CD параллельна пл. V; поэтому можно сразу ввести плоскость S, перпендикулярную к прямой CD, взяв ось $S/V \perp c'd'$ (рис. 280, *б*). Построим проекции a_sb_s, $c_s(d_s)$ и e_sf_s. Проекция искомой прямой MN на пл. S представляет собой точку $m_s(n_s)$, равноудаленную от прямых a_sb_s и e_sf_s и точки $c_s(d_s)$, т. е. является центром окружности,

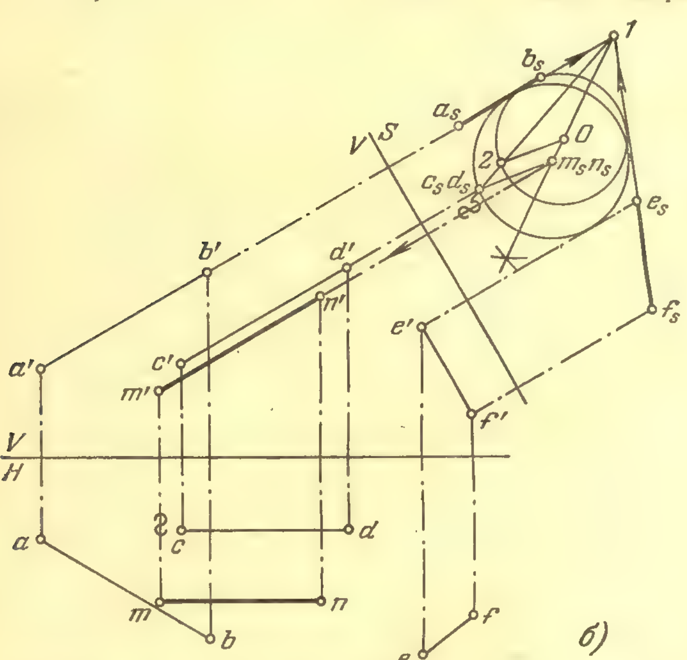


Рис. 280а, б.

проходящей через точку $c_s(d_s)$ и касающейся прямых a_sb_s и e_sf_s. Для ее построения проводим биссектрису угла a_s1f_s и через какую-либо точку o на ней проводим окружность, касающуюся этих прямых. Соединяем точки *1* и $c_s(d_s)$ прямой линией и находим точку *2* пересечения ее с проведенной окружностью. Теперь проводим прямую через точки *O* и *2*. Искомая точка $m_s(n_s)$ лежит на пересечении упомянутой выше биссектрисы с прямой, параллельной прямой *2—O* и проходящей через точку $c_s(d_s)$. По проекции $m_s(n_s)$ находим $m'n'$ ($\| c'd'$) и $mn \| cd$.

298. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой CD (рис. 281).

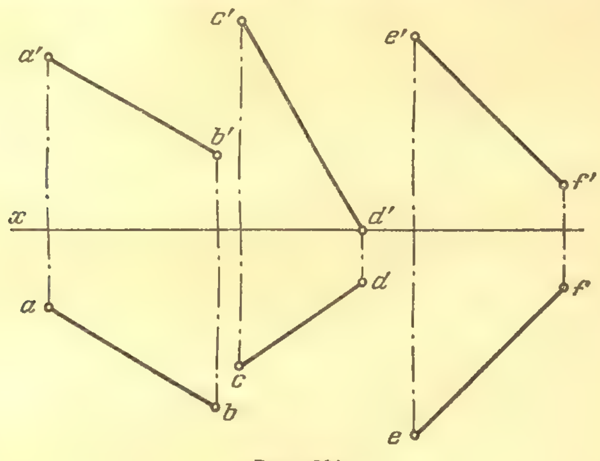


Рис. 281.

299*. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой GK (рис. 282, *а*).

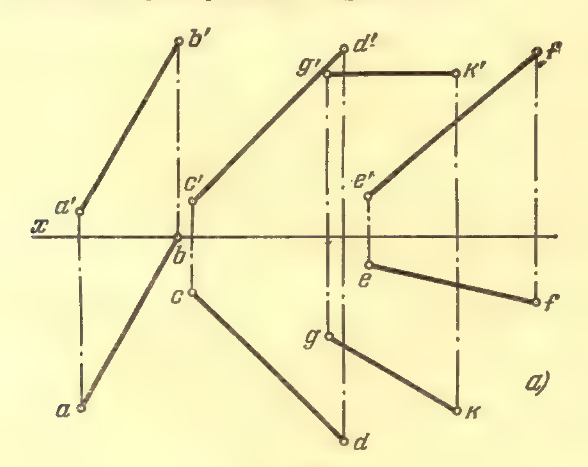


Рис. 282а.

Решение. И в этой задаче, очевидно, надо сделать так, чтобы прямая CD, а следовательно, и искомая параллельная ей прямая MN оказались перпендикулярными к некоторой плоскости проекций. Так как по заданию GK параллельно пл. H, то сразу можно ввести пл. S (рис. 282, *б*), перпендикулярную к пл. H и к GK.

Теперь строим проекции $a_s b_s$, $c_s d_s$ и $e_s f_s$. Проекция искомой прямой на пл. S должна быть точкой. Очевидно, надо отыскать точки, равноудаленные от проекций $a_s b_s$, $c_s d_s$ и $e_s f_s$. Проведя биссектрисы углов $a_s 1 e_s$ и $c_s 2 b_s$, получим в их пересечении

точку $m_s(n_s)$. Это и будет проекция на пл. S искомой прямой, находящейся на равных расстояниях от AB, CD и EF и параллельной прямой GK.

Здесь дано одно из четырех возможных решений.

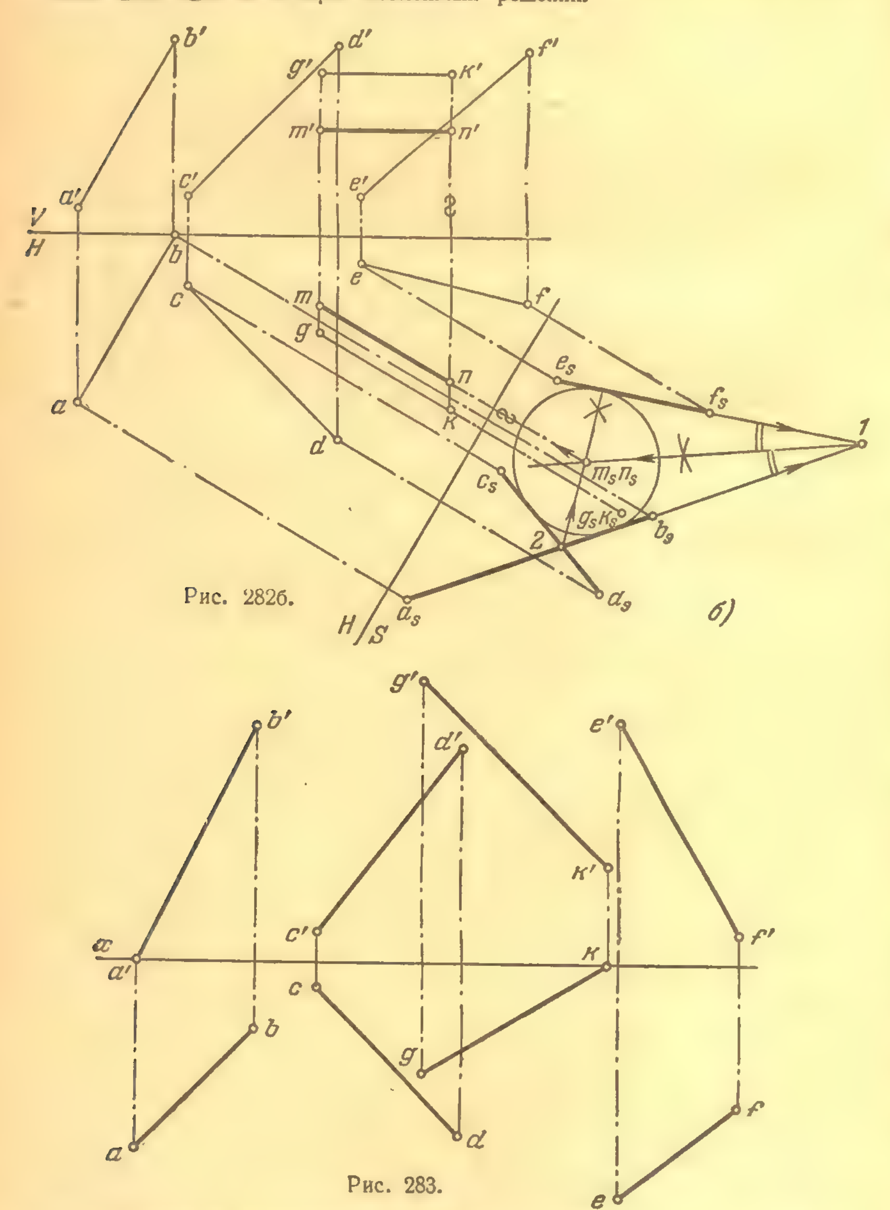


Рис. 282б.

Рис. 283.

300. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой GK (рис. 283).

Указание. В задаче 300, для того чтобы прямая *GK* оказалась перпендикулярной к некоторой плоскости проекций, требуется введение двух дополнительных плоскостей.

301*. Провести прямую, равноудаленную от четырех заданных точек *A*, *B*, *C* и *D* (рис. 284, *а*).

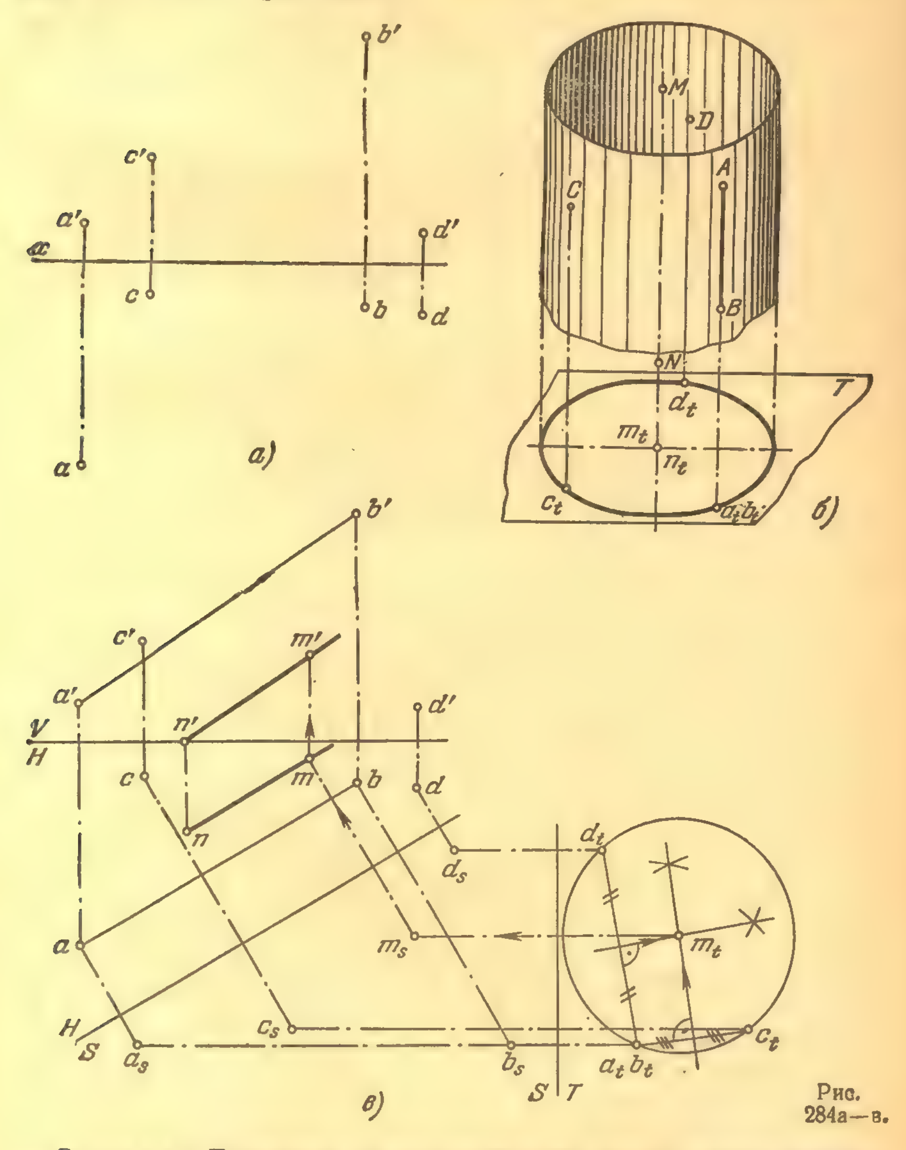


Рис. 284а—в.

Решение. Представляя себе пространственную картину, можно заключить, что искомая прямая является осью цилиндрической поверхности, образующие которой проходят через заданные точки (рис. 284, *б*).

Для построения этой поверхности проведем через любые две заданные точки, например A и B, прямую и примем ее за образующую цилиндрической поверхности. Теперь проведем пл. T перпендикулярно к прямой AB и найдем проекции $a_t(b_t)$, c_t, d_t. Проекция цилиндрической поверхности на пл. T является окружностью, проходящей через точки c_t, d_t и $a_t(b_t)$. Центр этой окружности — точка $m_t(n_t)$ — является проекцией искомой прямой.

Построение показано на рис. 284, *в*. Вводим пл. $S \perp H$ и $\parallel AB$, а затем пл. T, перпендикулярную к пл. S и к AB. Построив проекцию $a_t(b_t)$, c_t и d_t, находим m_t— проекцию одной из точек (M) искомой прямой MN.

Затем находим m_s, m и m'. Проводим $m'n' \parallel a'b'$ и $mn \parallel ab$.

Можно было бы соединить точки A и C, A и D, B и C, B и D, C и D и получить еще пять решений.

302. Провести прямую MN, равноудаленную от четырех заданных точек A, B, C и D (см. рис. 284, *а*). Дать два варианта решения: а) $MN \parallel BD$ и б) $MN \parallel AC$.

303*. Построить фронт. проекцию треугольника ABC, если даны его горизонт. проекция abc и горизонталь DC, а также известно расстояние l от точки K до плоскости этого треугольника (рис. 285, *а*).

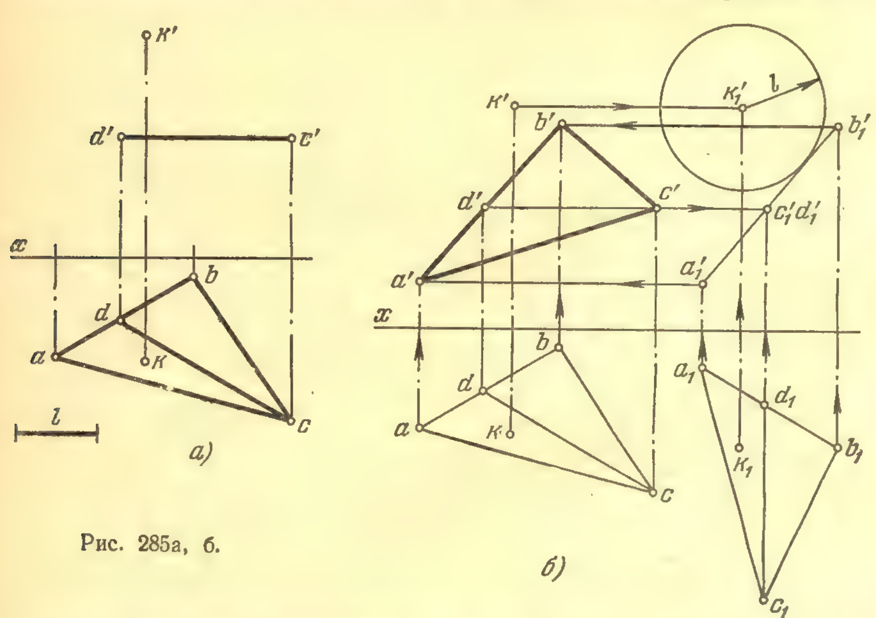


Рис. 285а, б.

Решение. Если представить себе сферу радиуса l как геометрическое место точек, удаленных на расстояние l от точки K, то искомая плоскость будет одной из плоскостей, касательных к этой сфере. При этом, если плоскость окажется фронтально-проецирующей, то ее фронт. след будет касательной прямой к фронт. проекции сферы — окружности радиуса l, и фронт. проекция треугольника ABC совпадет с этой касательной.

Поэтому преобразуем заданный чертеж так, чтобы плоскость треугольника ABC стала фронтально-проецирующей. Для этого применим поворот треугольника и точки K вокруг оси, перпендикулярной к пл. H, но положение этой оси не покажем (способ параллельного перемещения). При таком повороте (рис. 285, *б*) горизонт. проекция в целом лишь изменит положение относительно оси x. А чтобы

плоскость треугольника ABC стала фронтально-проецирующей, надо горизонталь DC расположить перпендикулярно к пл. V, т. е. проекцию dc вывести в положение $d_1c_1 \perp$ оси x.

Теперь, очертив из точки k_1' окружность радиуса l, мы можем провести через точку c_1' (d_1') касательную к окружности. На рис. 285, *б* проведена одна касательная, хотя можно провести еще одну, т. е. дать второе решение. Но так как методика построения не изменяется, то ограничиваемся одним решением, принимая в качестве фронт. проекции треугольника отрезок $a_1'b_1'$. Точки a_1' и b_1' определяются по точкам a_1 и b_1.

В заключение остается возвратиться к заданным проекциям abc, k и k', и получить проекции a' и b', исходя из построенных проекций a_1' и b_1', т. е. получить фронт. проекцию $a'b'c'$.

304. Построить горизонт. проекцию треугольника ABC, если даны его фронт. проекция $a'b'c'$ и фронталь AD, а также известно расстояние l от точки K до плоскости этого треугольника (рис. 286). Дать оба решения.

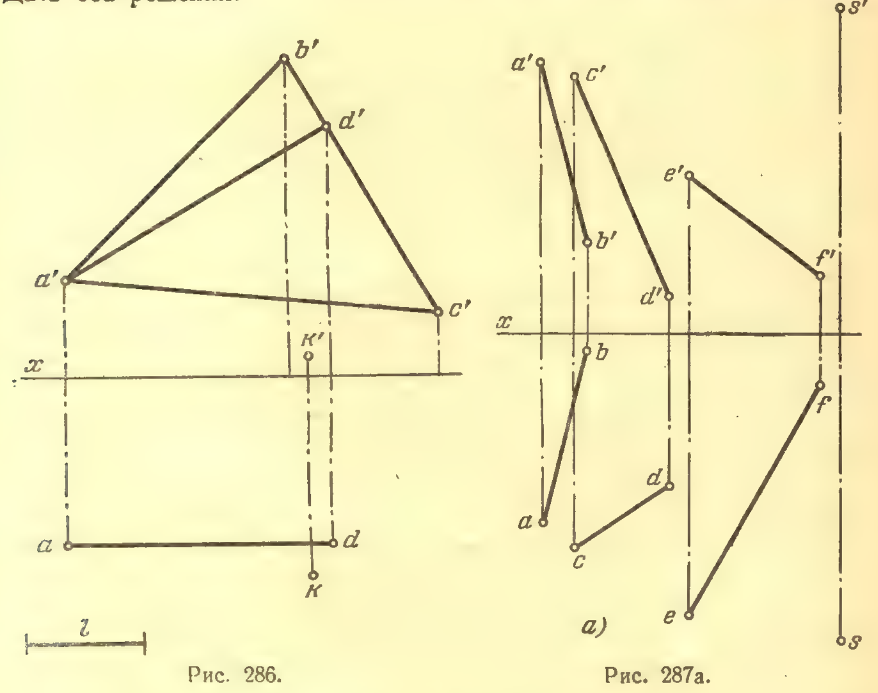


Рис. 286. Рис. 287а.

305*. Через точку S провести прямую, равнонаклоненную к заданным прямым AB, CD и EF (рис. 287, *а*).

Решение. Искомая прямая является осью конуса с вершиной S, три образующих которого параллельны соответственно прямым AB, CD и EF (рис. 287, *б*).

Через s' и s (рис. 287, *в*) проводим проекции прямых, параллельных данным прямым (например, $s'1' \parallel a'b'$, $s—1 \parallel ab$, $s'2' \parallel c'd'$ и т. д.).

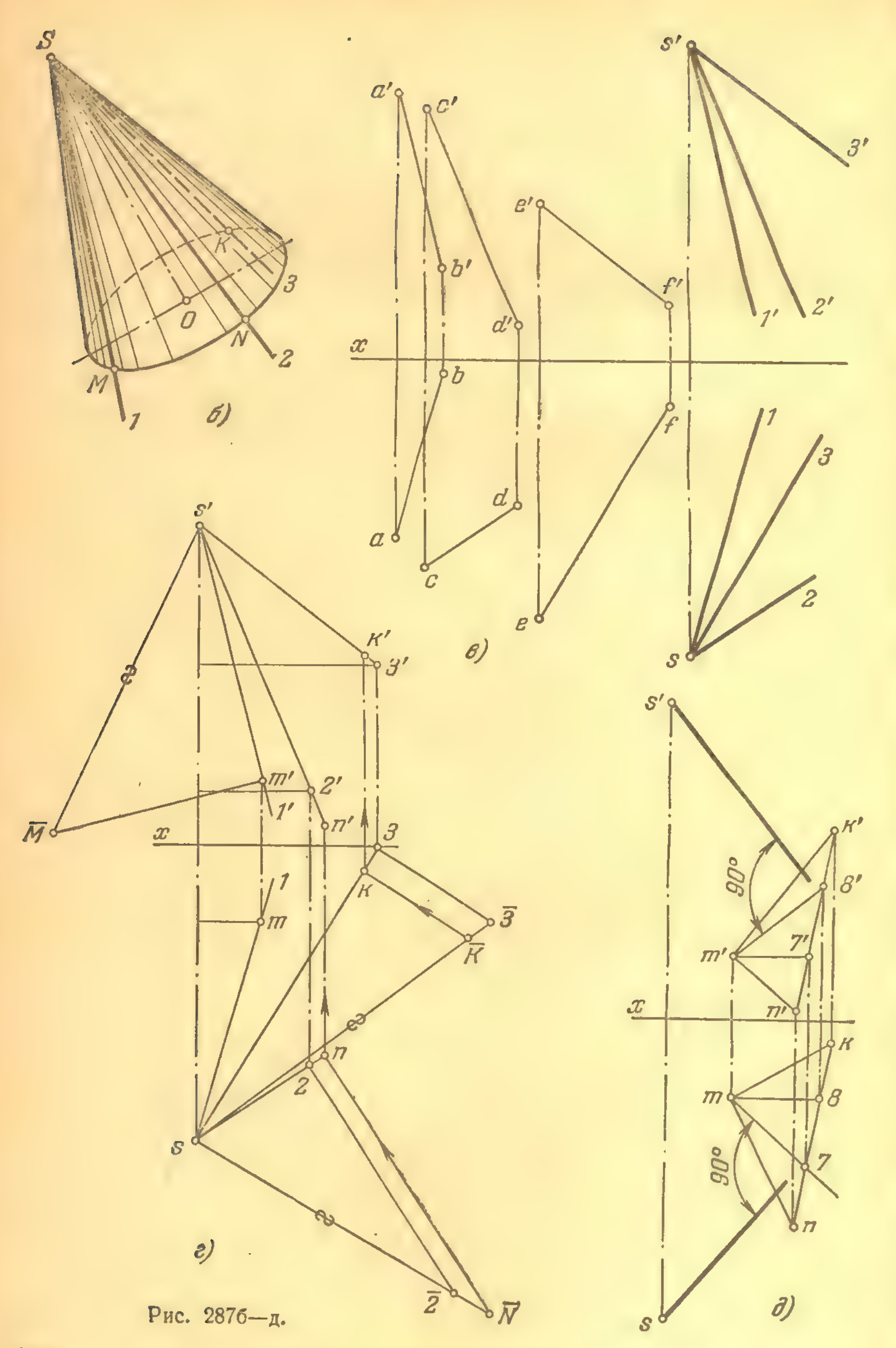

S
K
3
O
N
2
M
1
б)
a'
c'
b'
d'
e'
f'
x
b
f
a
c
d
e
в)
s'
3'
1'
2'
1
3
2
s
s'
K'
3'
M̄
m'
2'
1'
n'
x
3
K
1
m
3̄
K̄
n
2
s
2̄
N̄
г)
s'
K'
8'
90°
m'
7'
x
n'
K
m
8
7
90°
n
s
д)

Рис. 287б—д.

Взяв на прямой $S—1$ некоторый отрезок SM (рис. 287, *г*), откладываем на двух других прямых отрезки $SK=SN=SM$.

Точки K, M и N задают (рис. 287, *б*) сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси.

Получив точки k, k'; m, m'; n, n', строим треугольники kmn и $k'm'n'$ — проекции треугольника KMN, в плоскости которого надо найти точку, равноудаленную от точек K, M и N, т. е. центр окружности, описанной вокруг этого треугольника. Проведя через эту точку и через точку S прямую, можно получить требуемый ответ. Но достаточно будет только провести перпендикуляр из точки S на плоскость, определяемую треугольником KMN, что и сделано на рис. 287, *д* при помощи горизонтали $M—7$ и фронтали $M—8$.

306*. Ввести прямую AB в пл. P вращением вокруг оси, перпендикулярной к пл. H (рис. 288, *а*).

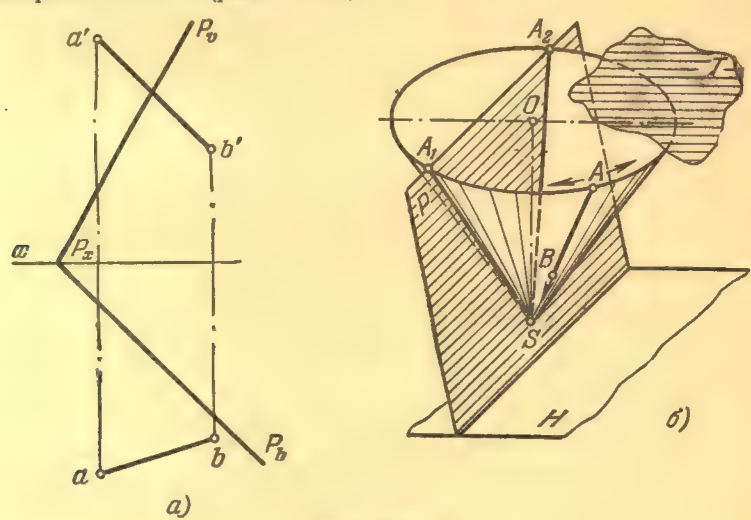


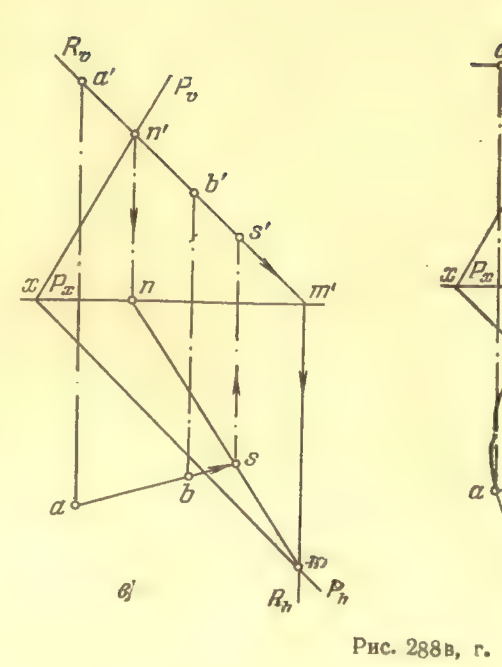
Рис. 288а, б.

Решение. Если найти точку пересечения прямой AB с пл. P, то останется повернуть только одну точку прямой так, чтобы эта точка оказалась в пл. P. Поэтому начинаем с того, что находим точку S пересечения прямой AB с пл. P (рис. 288, *б*), а далее проводим ось вращения через S перпендикулярно к пл. H. При вращении вокруг этой оси точка S остается в пл. P, а прямая AB описывает коническую поверхность. Линии пересечения (SA_1 и SA_2) этой поверхности с пл. P (P проходит через вершину конуса) представляют собой искомые положения прямой AB в пл. P.

Построение показано на рис. 288, *в*. Для нахождения точки S через прямую AB проведена фронтально-проецирующая пл. R. Точка A при повороте вокруг оси OS (рис. 288, *г*) описывает окружность радиуса Oa, лежащую в пл. T, которая пересекается с пл. P по горизонтали. Эта горизонталь пересекает окружность в точках с проекциями a_1 и a_1', a_2 и a_2'. Проведя прямые $s'a_1'$ и $s'a_2'$, sa_1 и sa_2, находим на этих прямых положение точек b_1', b_2', b_1 и b_2. A_1B_1 и A_2B_2 — искомые положения прямой AB.

307. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к пл. H (рис. 289), совместить данную прямую AB с а) гранью SDE, б) гранью SCE.

Указание. Начать с нахождения точки пересечения AB с соответствующей гранью.



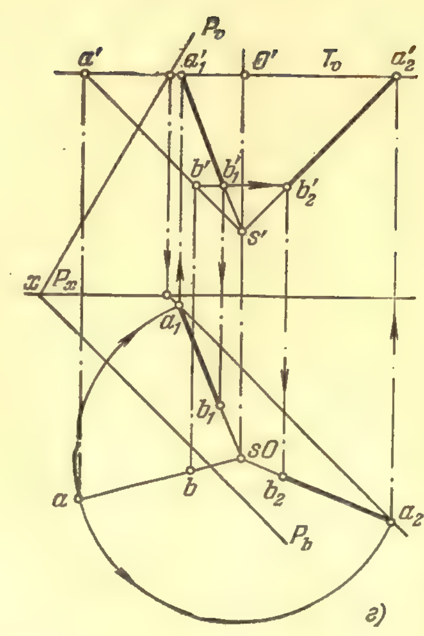


Рис. 288в, г.

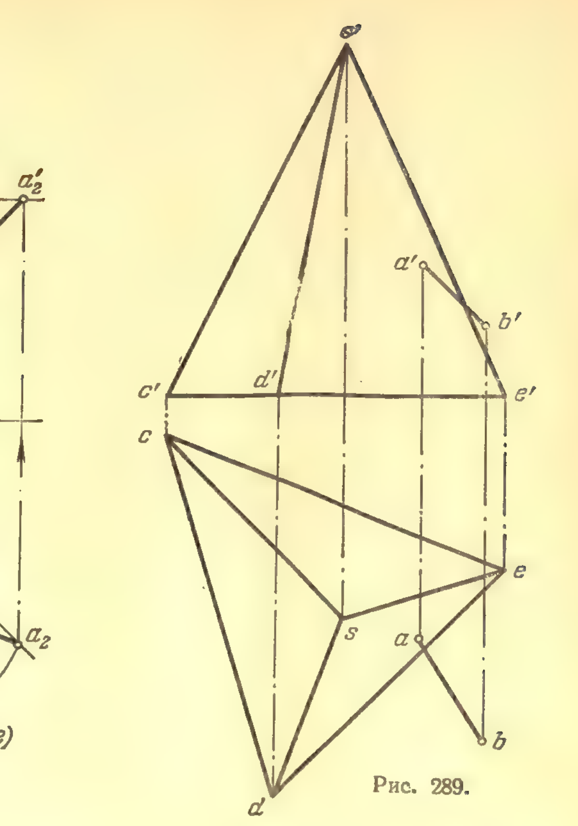
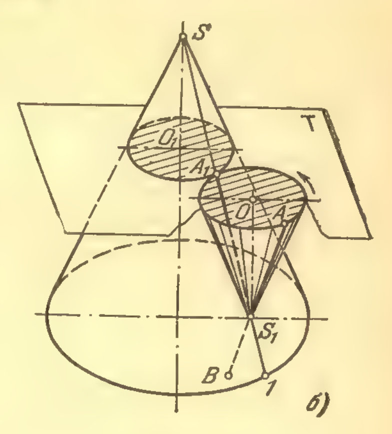
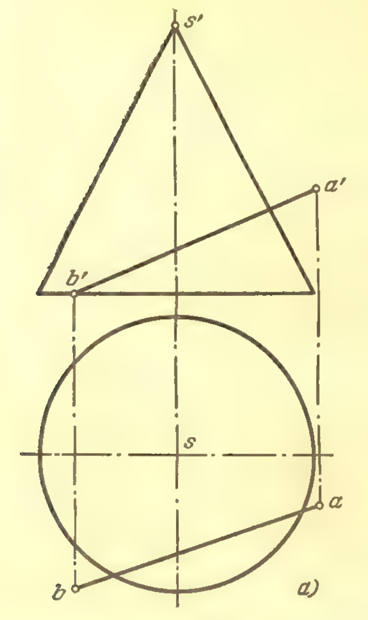


Рис. 289.

308*. Определить, можно ли прямую AB совместить с поверхностью конуса вращения поворотом ее вокруг оси, перпендикулярной к плоскости основания конуса (рис. 290, *а*).

Решение. На рис. 290, *б* показано, что прямая AB совпадает с поверхностью конуса вращения в том случае, если совпадет с его образующей в одном из ее положений. Это положение образующей получим, найдя точку S_1 пересечения прямой AB с поверхностью конуса. Образующая $S—1$, определяемая точками S и S_1, и есть та, с которой должна совпасть прямая AB, если она может быть совмещена с поверхностью конуса. Но чтобы такое совмещение получилось, должны оказаться равными между собой углы, составляемые образующей конуса и данной прямой AB с осью конуса или с прямой, проведенной через точку S_1 параллельно этой оси. Так как в данном случае ось конуса перпендикулярна к пл. H, проверку можно





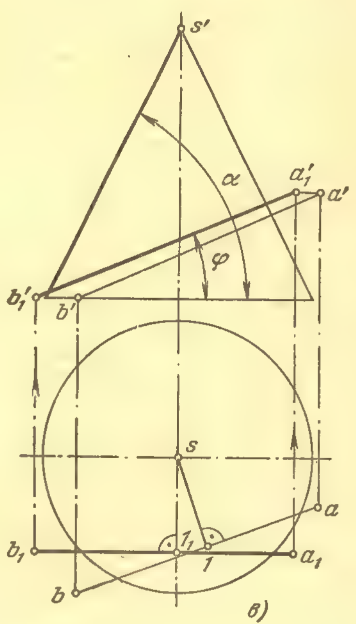
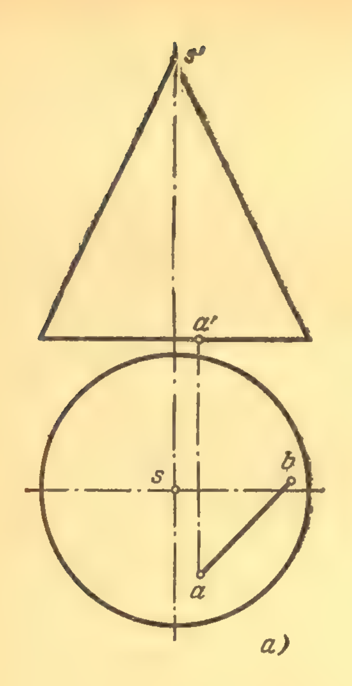
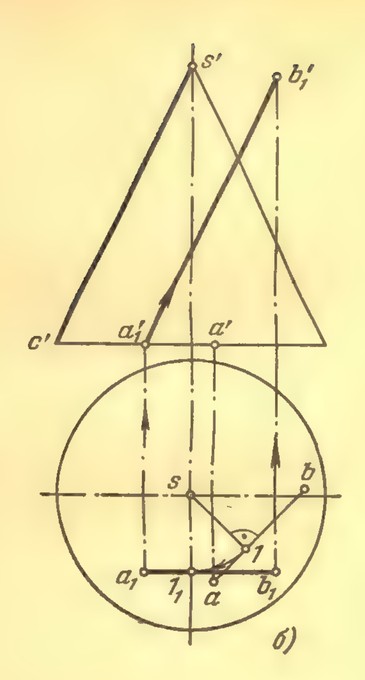


Рис. 290а—в.

свести к определению угла между AB и пл. H (рис. 290, *в*): приняв ось конуса за ось вращения для всей системы «конус и прямая», поворачиваем прямую AB до параллельности пл. V. Так как углы α и φ не равны между собой, то прямая AB не может быть введена на поверхность данного конуса поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания.





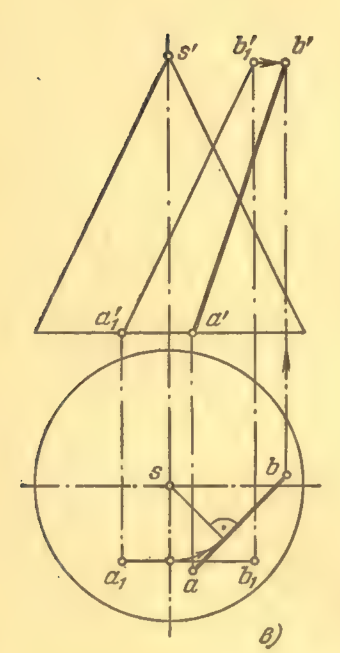


Рис. 291а—в.

309*. Найти фронт. проекцию прямой AB, исходя из условия, что эта прямая может быть совмещена с боковой поверхностью заданного конуса вращения поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания (рис. 291, *а*).

Решение. Повернем систему «конус и прямая» вокруг оси конуса с тем, чтобы прямая AB стала параллельной пл. V (рис. 291, *б*). Получив точку a'_1 — фронт. проекцию точки A после поворота, проведем $a'_1 b'_1 \| s'c'$, т. е. получим равные углы между осью конуса и а) его образующей, б) прямой AB. Выводя конус и прямую в начальное положение, получим фронт. проекцию $a'b'$ (рис. 291, *в*) в соответствии с условиями задачи.

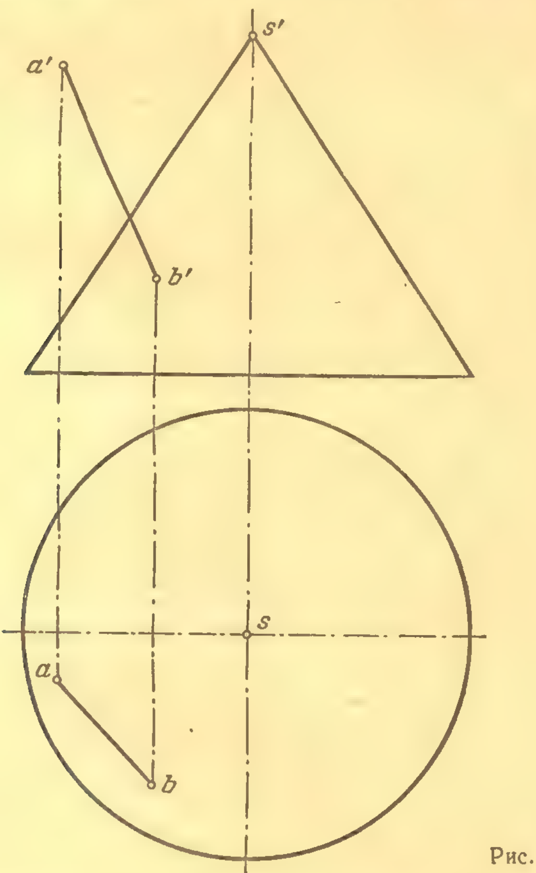


Рис. 292.

310. Ввести прямую AB на поверхность данного конуса (рис. 292) поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания.

Указание. Произведя проверку и убедившись в том, что задача может быть решена, надо найти точку пересечения прямой AB с боковой поверхностью конуса. Эта точка вместе с вершиной конуса определяет его образующую в том ее положении, когда прямая AB совпадает с ней.

311*. Построить фронт. проекцию угла AKB, натуральная величина которого равна его горизонт. проекции akb (рис. 293, *а*).

Р е ш е н и е. Известно, что проекция острого (или тупого) угла может равняться проецируемому углу не только в случае параллельности плоскости угла и плоскости проекций. На рис. 293, *б* показано, что, например, все углы, стороны которых соответственно расположены в пл. P и Q, перпендикулярных к пл. H, имеют своей

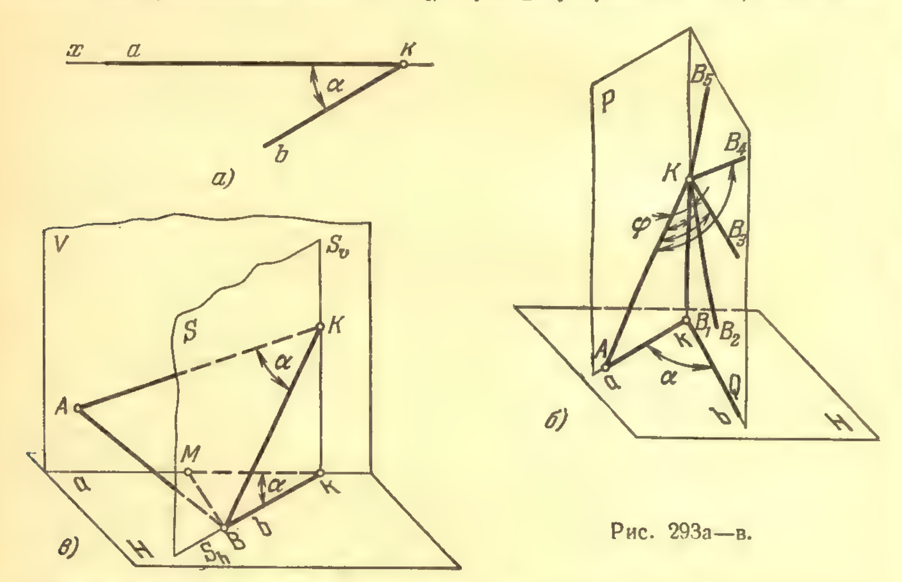


Рис. 293а—в.

горизонт. проекцией угол, равный углу akb. Очевидно, среди различных углов имеется угол, равный этой проекции.

Далее показано построение фронт. проекции угла, равного в натуре его заданной горизонт. проекции. Сделано это тремя способами.

1. Через стороны ak и bk угла akb (рис. 293, *в*), лежащего в пл. H, проводим две плоскости — пл. V и горизонтально-проецирующую пл. S. Угол α является линейным углом двугранного, образованного этими плоскостями. Стороны угла, равного его горизонт. проекции, должны лежать — одна в пл. V, другая в пл. S. Этот угол построен при помощи треугольника AKB, подобного некоторому треугольнику MkB, взятому на пл. H. Построение проводится так, чтобы стороны AB и BM были сходственными.

Задаемся некоторым коэффициентом подобия λ. На ребре двугранного угла выбираем точку K так, чтобы $BK=\lambda \cdot Bk$. Если теперь построить точку A с тем, чтобы $AK=\lambda \cdot Mk$ и $AB=\lambda \cdot BM$, то треугольники AKB и MkB окажутся подобными, и угол AKB будет равен α.

Для построения точки A используем два геометрических места точек: геометрическое место точек в пл. V, удаленных от точки K на расстояние $AK=\lambda \cdot Mk$ (т. е. окружность, проведенная из точки K радиусом $\lambda \cdot Mk$), и геометрическое место точек, отстоящих от точки B на расстояние $AB=\lambda \cdot BM$ (т. е. сфера радиуса AB с центром в точке B). Точка A должна лежать в пл. V, т. е. должна быть на окружности, по которой пл. V пересекает указанную сферу и центром которой является фронт. проекция точки B.

В пересечении обеих окружностей, расположенных в пл. V, получаем две точки, из которых на рис. 293, *в* показана одна — точка A.

Соответствующий чертеж приведен на рис. 293, *г*. Принимаем $\lambda=2$. Из точки b_0 (построение ее ясно из чертежа) проводим дугу радиуса $R_1=2kb$ до пересечения в точ-

ке k' с линией связи, проходящей через точку k. Из точки k' проводим дугу радиуса $R_2=2km$. Если теперь из точки b радиусом $R_3=2bm$ провести окружность, то получим проекцию упомянутой выше сферы.

Окружность, по которой эта сфера пересекается плоскостью V, имеет центр в точке b' и радиус, равный cb'. Точка a' лежит на пересечении дуг радиуса R_2 и радиуса, равного cb', точка a — на оси x. Угол $a'k'b'$ — искомая фронт. проекция угла, равного своей горизонт. проекции.

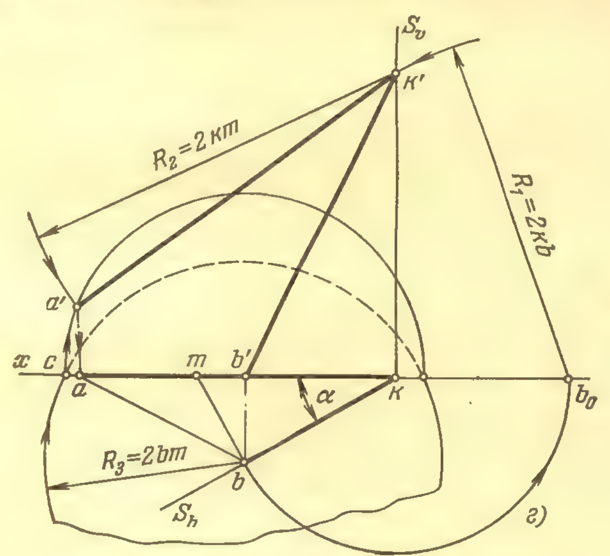


Рис. 293г.

2. Возьмем точку k (рис. 293, *д*) на ребре двугранного угла, образованного плоскостями V и P, проведенными через стороны ak и bk угла akb. Из этой точки проведем в пл. V прямые AK и A_1K, образующие между собой угол, равный α, и повернем прямую A_1K вокруг прямой AK. При этом образуется коническая поверхность с образующей A_1K и осью AK. Линия KB пересечения конической поверхности плоскостью P будет стороной угла AKB, в натуре равного α. Чтобы найти эту линию пересечения, надо построить прямую $1—2$ пересечения пл. P с пл. T основания конуса. Тогда точки C и B пересечения окружности основания с прямой $1—2$ определят образующие, по которым пл. P пересекает коническую поверхность.

Чертеж показан на рис. 293, *е*, причем плоскости V и P изображены прямоугольниками I и II. Через точку k' в прямоугольнике I проведены прямые $a'k'$ и $a_1'k'$ так, чтобы угол между ними был равен α. Через точку a_1' перпендикулярно к $a'k'$ проведен след T_v плоскости T — основания конуса. Точка $O'O$ — центр окружности основания конуса. Прямая с проекциями $1'2'$ и $1—2$ — линия пересечения плоскостей T и P.

Введя дополнительную пл. $S \perp V$ и $\perp AK$, построим проекции O_s и a_{1s}, а также $1_s 2_s$. Окружность, проведенная из точки o_s радиусом $o_s a_{1s}$, пересекает прямую $1_s 2_s$ в точках c_s и b_s— проекциях точек, принадлежащих образующим KB и KC. На рис. 293, *е* показано построение фронт. проекции только точки B: по точке b_s построена точка b'. Угол $a'k'b'$ является фронт. проекцией угла, в натуре равного углу α.

3. В этом случае использовано совмещение плоскости искомого угла с пл. H (рис. 293, *ж*).

Проводим прямую ab — горизонт. след плоскости, в которой лежит рассматриваемый угол, и поворачиваем вокруг него точку K до совмещения ее с пл. H. Чтобы

при этом угол aK_0b оказался равным α, надо вписать угол aK_0b в окружность, проведенную через точки a, b и k. Тогда углы akb и aK_0b, как вписанные, опирающиеся на

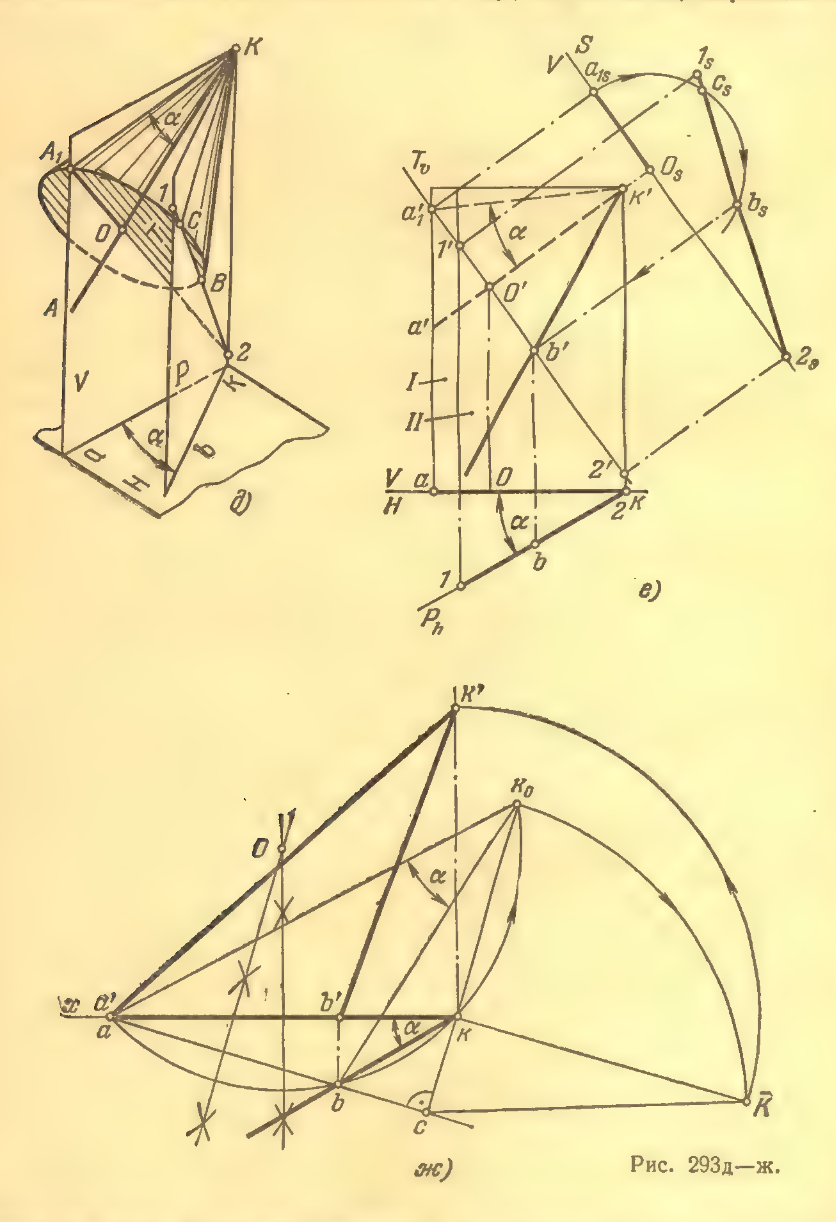


Рис. 293д—ж.

одну и ту же дугу, будут равны между собою. Остается найти точку K_0 в пересечении окружности, проведенной через точки a, b и k, со следом плоскости вращения точки K вокруг прямой ab. Зная натуральную величину $c\overline{K}$ радиуса вращения точки K

и его горизонт. проекцию ck, находим отрезок $k\overline{K}$ — превышение точки K над пл. H, а это дает нам возможность получить точку k'. Угол $a'k'b'$ является искомой фронт. проекцией угла AKB, равного своей горизонт. проекции. Во всех примерах мы ограничились показом построения лишь одного угла, хотя углов, натуральная величина которых равна заданной горизонт. проекции, множество.

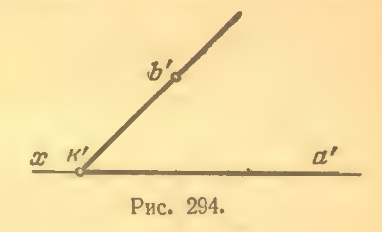


Рис. 294.

312. Построить горизонт. проекцию угла AKB, равного в натуре своей фронт. проекции $a'k'b'$ (рис. 294). Решить всеми тремя способами.

313*. Найти направление фронт. следа фронтально-проецирующей плоскости, пересекающей заданный конус вращения так, чтобы профильная проекция эллипса сечения оказалась окружностью (рис. 295, *а*).

Решение. В общем случае профильная проекция эллипса, получаемого при пересечении конуса вращения, представленного на рис. 295, *а*, фронтально-

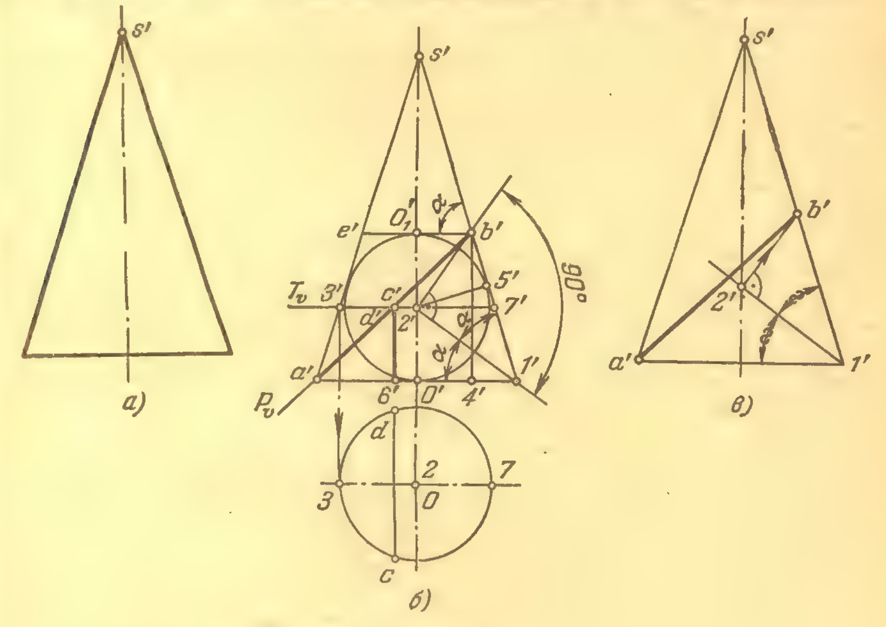


Рис. 295а—в.

проецирующей плоскостью P, является эллипсом (рис. 295, *б*), оси которого равны величинам отрезков $b'4'$ и cd.

Если окажется, что $b'4' = cd$, то эллипс сечения изобразится на пл. W окружностью. Этого можно достичь, если след P_v искомой плоскости направить по диагонали равнобочной трапеции $a'e'b'1'$ (рис. 295, *б*), в которую вписывается окружность с центром в точке $2'$. Для построения такой трапеции проводим биссектрису угла $a'1'b'$ до пересечения с осью симметрии трапеции в точке $2'$. Проводим из этой точки перпендикуляр к биссектрисе и находим точку b' (рис. 295, *в*).

314. Дан след P_h фронтально-проецирующей пл. P, пересекающей конус вращения по эллипсу. Построить фронт. след этой плоскости из условия, что профильная проекция эллипса является окружностью (рис. 296).

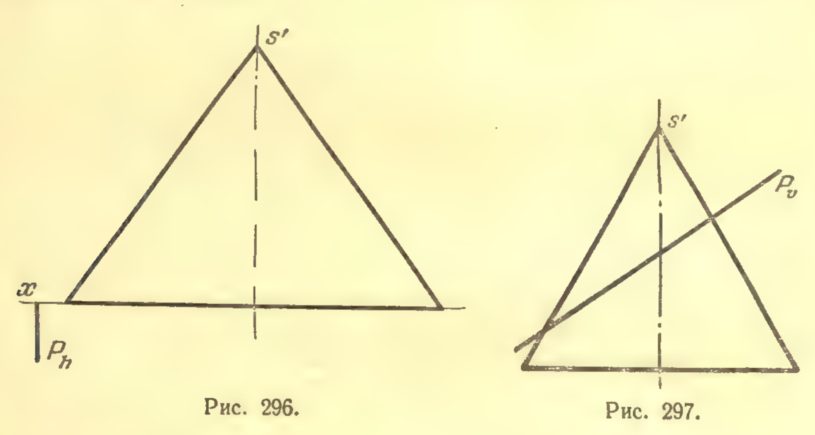


Рис. 296. Рис. 297.

315. Будет ли (рис. 297) проецироваться на пл. W в виде окружности эллипс, получаемый при пересечении данного конуса вращения фронтально-проецирующей пл. P?

§ 25. Задачи для самостоятельного решения

316. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, лежащего в плоскости (рис. 298), заданной линией ската AM и точкой B (дана ее горизонт. проекция).

317. Пересечь две скрещивающиеся прямые AB и CD прямой KM, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником EFG (рис. 299).

318. Косая плоскость задана направляющими AB и CD и плоскостью параллелизма — горизонтально-проецирующей пл. P (дан горизонт. след P_h). Построить профильную проекцию линии пересечения косой плоскости профильной плоскостью S (рис. 300).

319. Построить фронт. и горизонт. проекции точки K, принадлежащей поверхности сжатого эллипсоида вращения (дана проекция k'', точка видима), и натуральный вид сечения A—A (рис. 301).

320. Построить проекции сферы, касательной к данной сфере в точке K, расположенной на ее передней стороне (дана фронт. проекция точки). Радиус искомой сферы $R_1 = {}^2/_3\ R$ (рис. 302).

321. Построить проекции прямого кругового конуса, касательного к данному в заданной на его боковой поверхности видимой точке K (дана горизонт. проекция этой точки). Вершина S искомого конуса должна быть на пл. H. Высота и диаметр основания обоих конусов одинаковы (рис. 303).

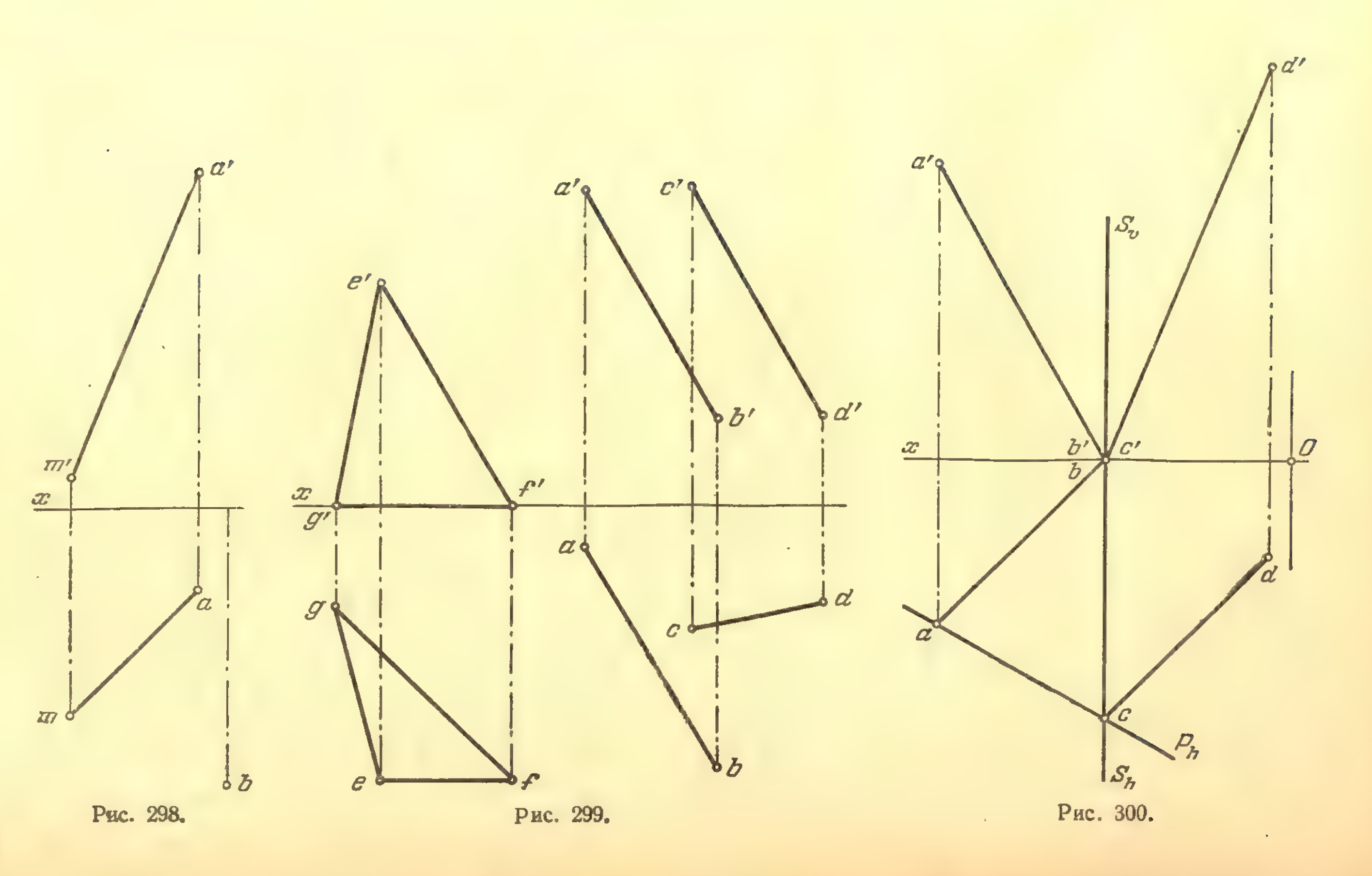


Рис. 298.

Рис. 299.

Рис. 300.

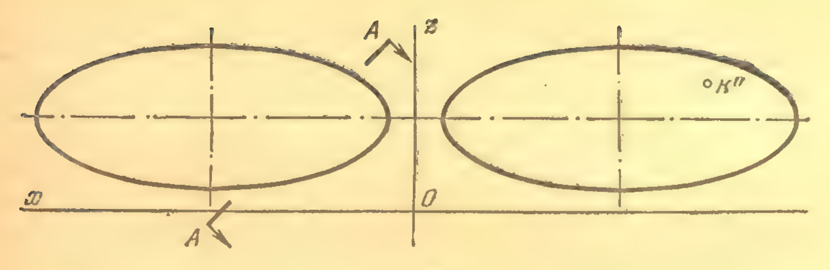


Рис. 301.

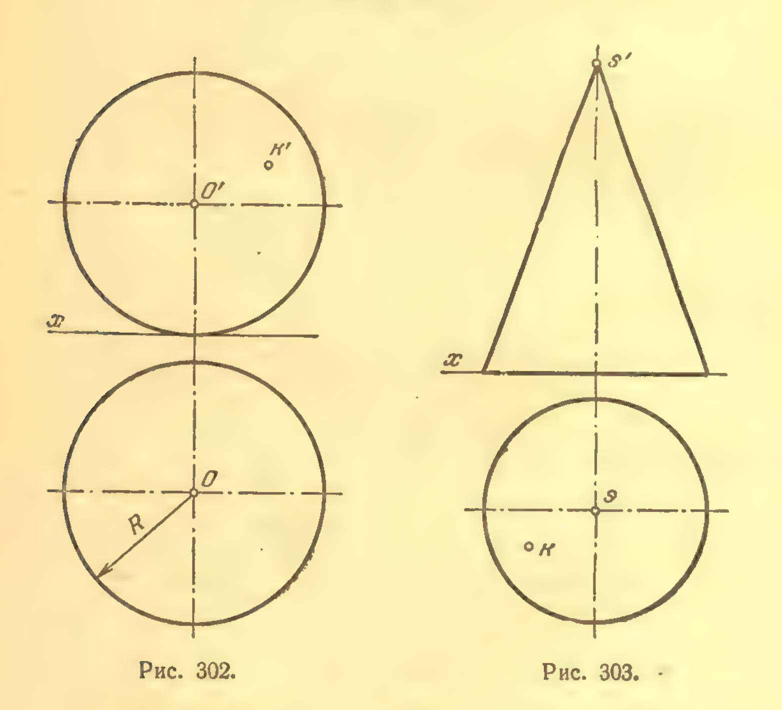


Рис. 302.

Рис. 303.

322. Через точку A (дана ее фронт. проекция), принадлежащую поверхности вращения (рис. 304), провести нормаль к поверхности; отложить на нормали отрезок AK длиной l.

323. Даны призма и отрезок AB на ее грани. Пересечь призму плоскостью, проходящей через прямую AB, так, чтобы в сечении получился равнобедренный треугольник ABC с основанием AB (рис. 305).

324. Вращением вокруг фронт. следа P_v ввести прямую AB ($AB \parallel$ пл. V) в пл. P (рис. 306).

325. Построить на пл. P геометрическое место точек, равноудаленных от ближайших точек двух скрещивающихся прямых AB и CD (рис. 307).

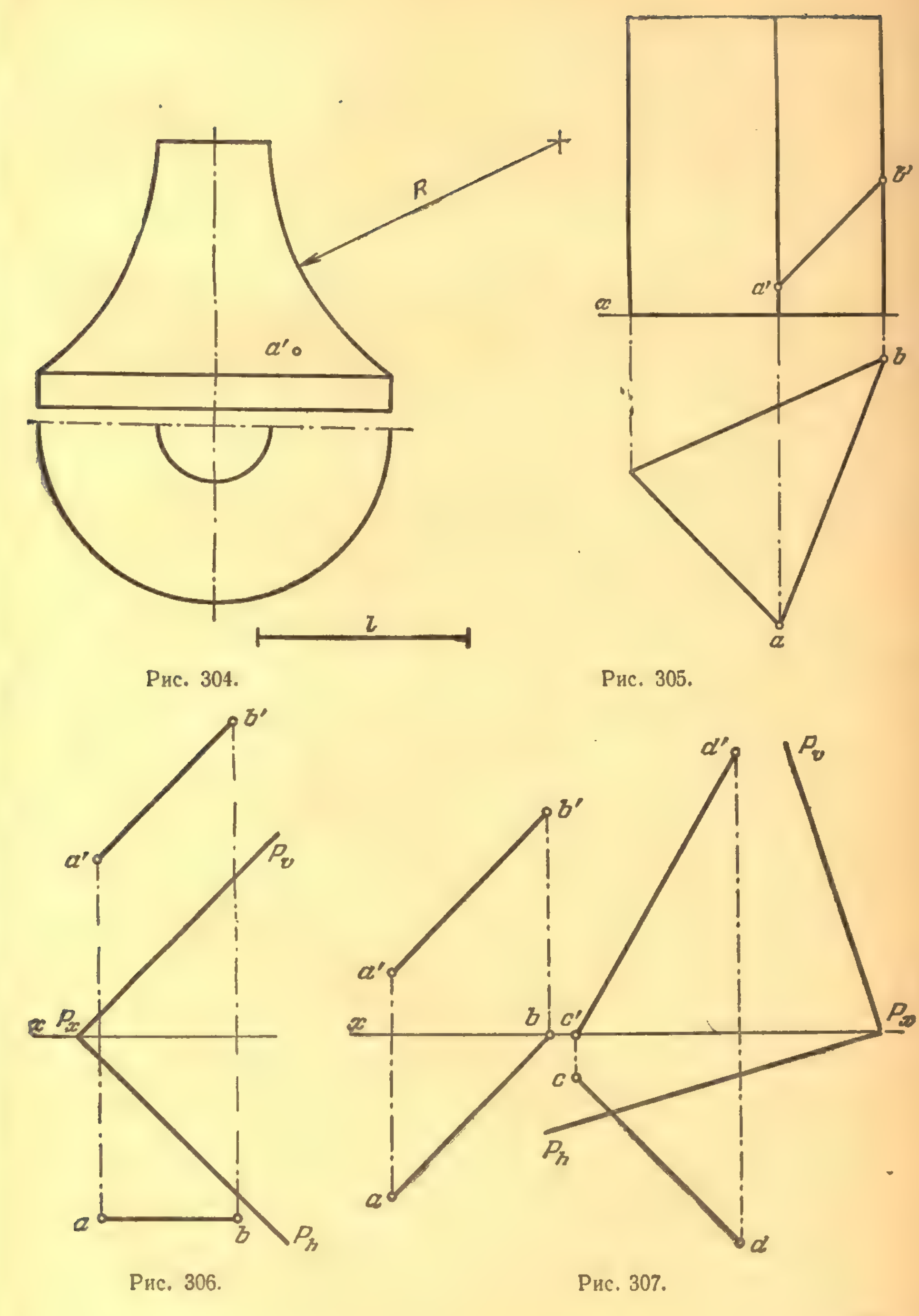


Рис. 304.

Рис. 305.

Рис. 306.

Рис. 307.

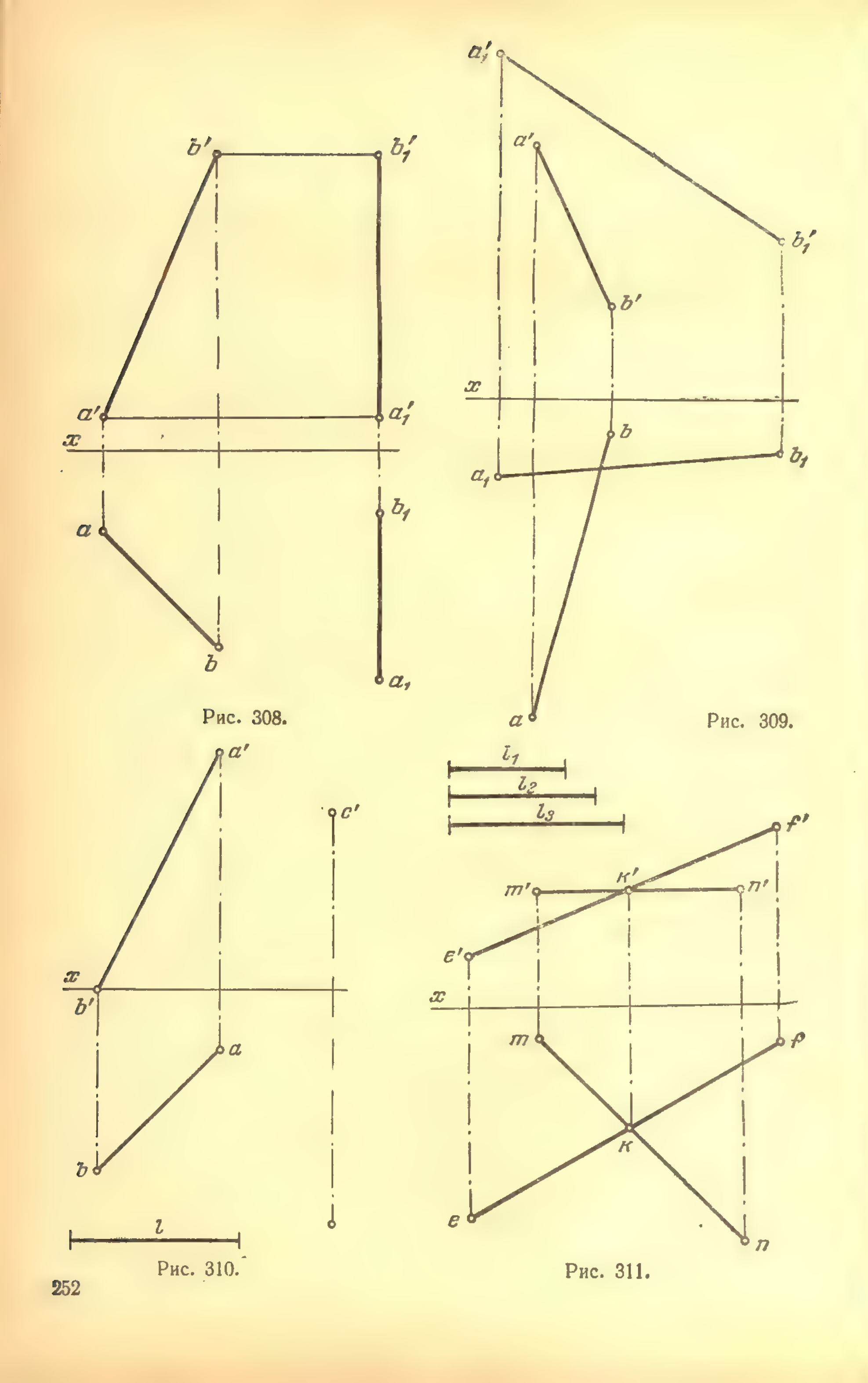


Рис. 308.

Рис. 309.

Рис. 310.

Рис. 311.

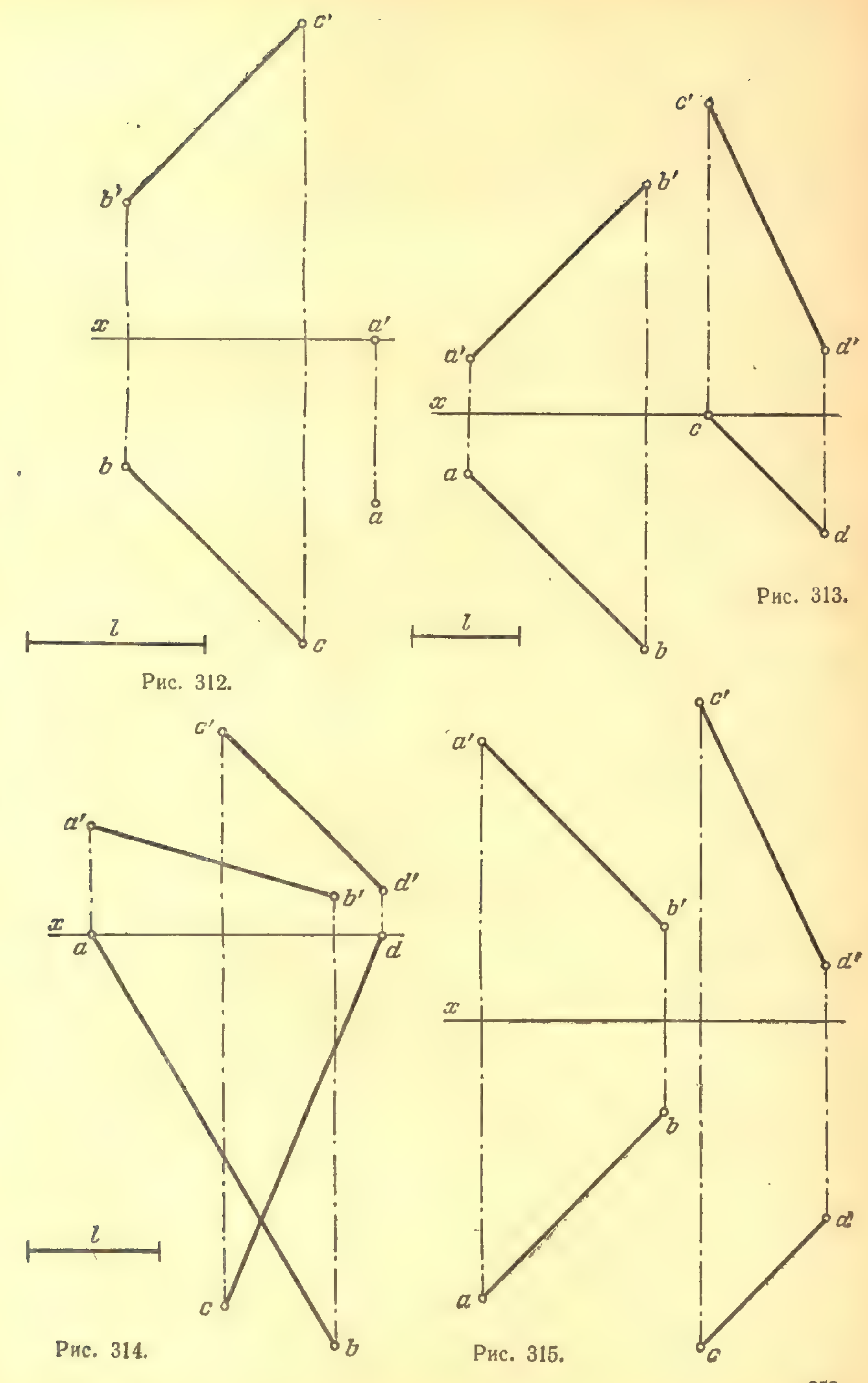


Рис. 312.

Рис. 313.

Рис. 314.

Рис. 315.

326. Даны два положения прямой AB, повернутой вокруг некоторой прямой CD. Определить положение этой прямой и величину угла поворота α (рис. 308).

327. Даны два положения прямой AB, повернутой вокруг некоторой прямой. Построить проекции этой прямой, задав ее горизонт. следом M и произвольной точкой C (рис. 309).

328. Даны прямая AB и точка C. Через точку A провести прямые, пересекающие AB под углом $\alpha = 30°$ и отстоящие от точки C на расстояние l. Дать все решения (рис. 310).

329. Даны прямые EF и MN ($MN \parallel$ пл. H), пересекающиеся в точке K. Построить точки, удаленные от точки K на расстояние l_3, от прямой EF — на l_2 и от прямой MN — на l_1 (рис. 311). Построить все точки, отвечающие условию.

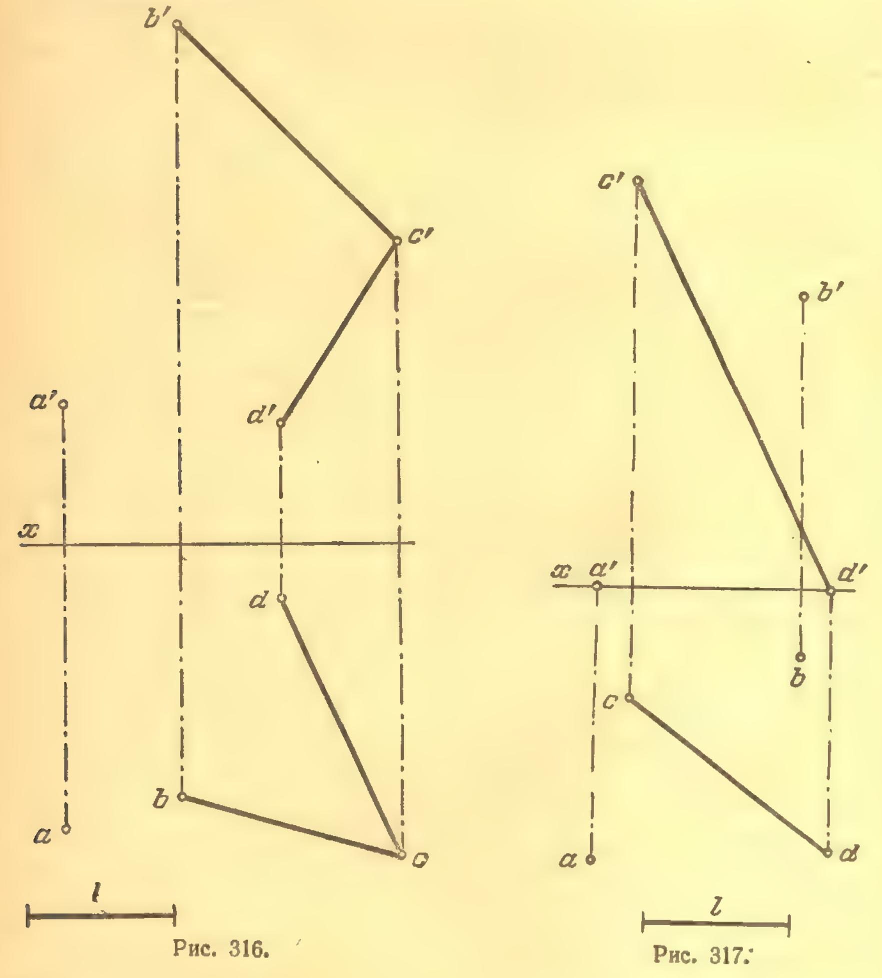


Рис. 316.

Рис. 317.

330. Даны точка A и прямая BC. Через точку A провести прямые, отстоящие от BC на расстояние l и составляющие с ней угол $\alpha = 45°$. Из всех решений дать те, в которых прямые, проходящие через точку A, приближаются к точке C, а не к B (рис. 312).

331. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Через точку A провести прямые, пересекающие прямую AB под углом $\alpha = 30°$ и отстоящие от прямой CD на расстояние l. Дать все решения (рис. 313).

332. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Провести прямые, пересекающие AB, параллельные CD и отстоящие от последней на расстояние l (рис. 314).

333. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Провести прямую EF, их пересекающую и образующую с прямой AB угол $\alpha = 46°$ и с прямой CD угол $\beta = 53°$. Дать решение, в котором прямая EF пересекает заданные в пределах первой четверти (рис. 315).

334. Построить геометрическое место точек, удаленных от точки A на расстояние l и равноудаленных от сторон угла BCD (рис. 316).

335. Даны две точки A и B и прямая CD. Через точку A провести прямые, пересекающие прямую CD и отстоящие от точки B на расстояние l. Дать все решения (рис. 317).

ГЛАВА VIII

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 26. Изображение плоских фигур

336*. Построить изометрическую проекцию треугольника ABC (рис. 318, *а*).

Решение. Строим изометрические проекции вершин A, B и C по их координатам. На оси x заданного чертежа (рис. 318, *а*) отметим точку O — начало координат. Величина отрезка Oa_x дает нам абсциссу точки A, величина отрезка

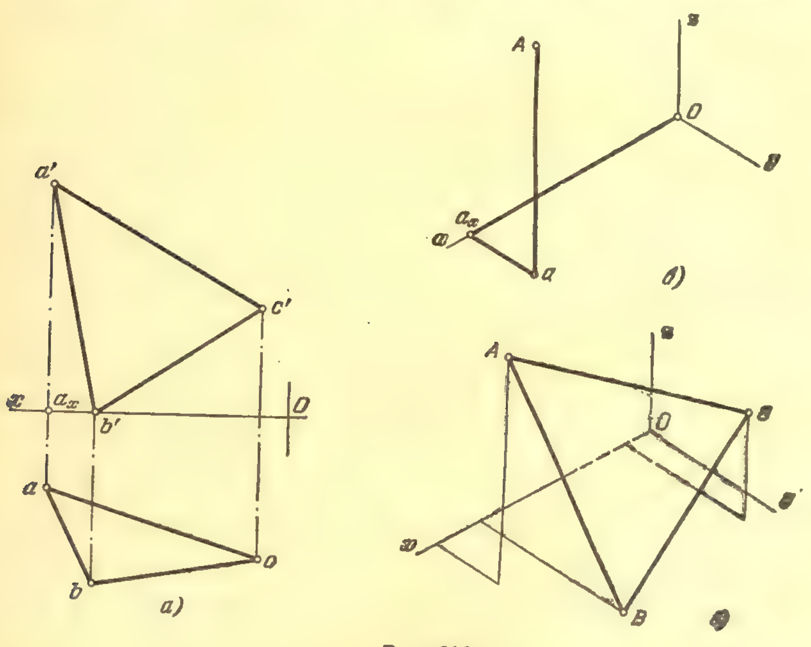


Рис. 318а—в.

a_xa — ординату, величина отрезка a_xa' — аппликату. Теперь можно перейти к системе изометрических осей (рис. 318, *б*) и а) отложить на оси x отрезок Oa_x, взяв его с рис. 318, *а*; б) провести через a_x прямую, параллельную оси y; в) отложить на этой пря-

мой отрезок $a_x a_1$, взяв его равным отрезку $a_x a$ на рис. 318, *а*; г) провести прямую $a_1 A$ параллельно оси *z* и отложить на ней отрезок $a_1 A$, равный $a_x a'$ на рис. 318, *а*. Получаем изометрическую проекцию вершины *A*. Построив аналогично проекции вершин *B* и *C*, получим (рис. 318, *в*) изометрическую проекцию треугольника *ABC*.

337*. Определить координаты точки *K*, лежащей в плоскости треугольника *ABC*, заданного его диметрической проекцией и вторичными проекциями вершин на плоскости *xOy* (рис. 319, *а*).

Решение. Если точка *K* принадлежит плоскости треугольника *ABC*, то она лежит на какой-то прямой (например, *AD*) в этой плоскости (рис. 319, *б*).

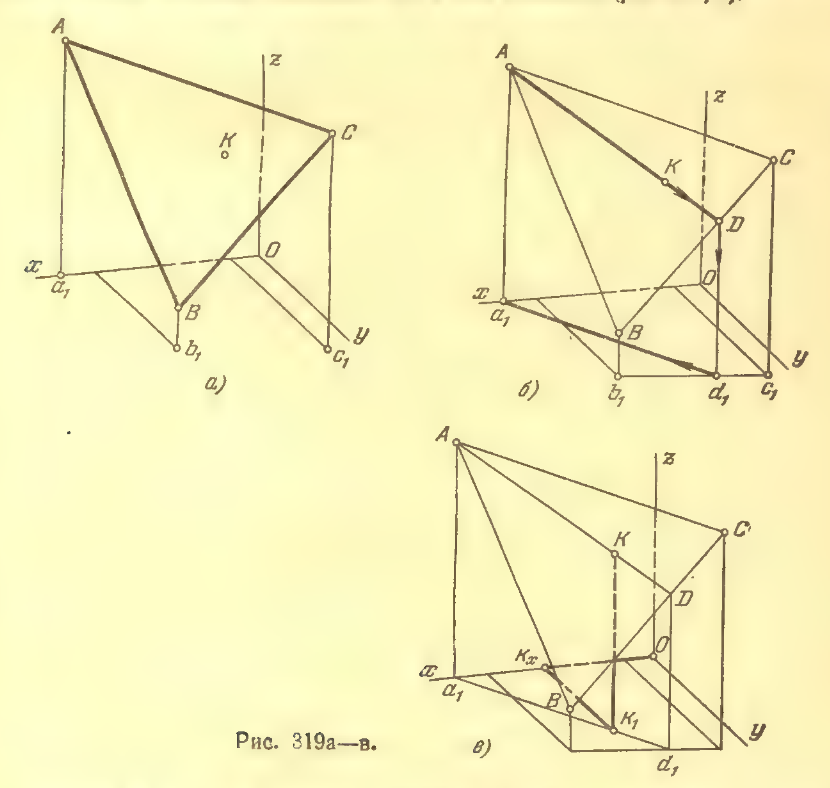


Рис. 319а—в.

Построив на пл. *xOy* вторичную проекцию d_1 точки *D* и вторичную проекцию $a_1 d_1$ прямой *AD*, находим (рис. 319, *в*) вторичную проекцию k_1 точки *K*. Теперь можно найти координаты точки *K*, выраженные отрезками Ok_x (абсцисса), $2k_1 k_x$ (ордината), $k_1 K$ (апликата). Коэффициент 2 при отрезке $k_1 k_x$ взят в связи с сокращением вдвое отрезков, параллельных оси *Oy*, при построении диметрической проекции.

338*. Построить изометрическую и диметрическую проекции окружности радиуса *R*, расположенной в плоскости, заданной треугольником *ABE* (рис. 320, *а*). Центр окружности — в точке *C*.

Решение. Окружность, которую надо изобразить в изо- и диметрической проекциях, расположена в плоскости общего положения. Поэтому мы не можем применить здесь известные правила о том, что большая ось эллипса, изображающего окружность в изо- или диметрической проекции, перпендикулярна к так называемой

свободной оси, что малая ось эллипса в изометрической проекции равна 0,7d, где d — диаметр изображаемой окружности, и т. д. Эти правила справедливы для случаев, когда изображаются окружности, расположенные в фронтальных, горизонтальных и профильных плоскостях. Для данного же случая справедливым остается лишь то, что большая ось эллипса в изометрической проекции равна 1,22d, а в диметрической 1,06d. Но положение этой оси надо найти, и оно, естественно, меняется в зависимости от положения плоскости, в которой расположена изображаемая окружность.

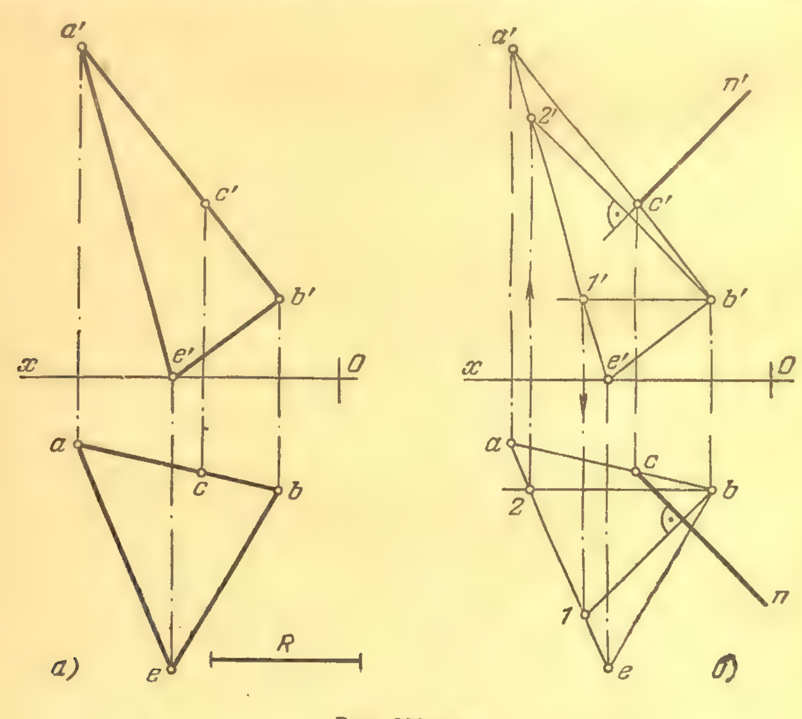


Рис. 320а, б.

Помня об этом, мы воспользуемся известным из курса способом построения, пригодным для любого положения окружности. По этому способу мы прежде всего должны построить на данном чертеже перпендикуляр к плоскости, в которой расположена окружность. Построенный затем в изо- или диметрической проекции этот перпендикуляр даст направление малой оси эллипса. Построение такого перпендикуляра с проведением его из центра окружности показано на рис. 320, *б*. Далее, на этом перпендикуляре надо отложить отрезок CD, равный радиусу R окружности. Это показано на рис. 320, *в*. Если теперь построить изометрическую (рис. 320, *г*) и диметрическую (рис. 320, *е*) проекции отрезка CD, то получим направление малой оси эллипса и центр изображаемой окружности.

Проведя (рис. 320, *д*) в точке C перпендикуляр к CD, мы получаем направление большой оси эллипса, а отложив на нем по 1,22R в обе стороны от C, получаем большую ось эллипса — отрезок k_1k_2.

Чтобы определить величину малой оси эллипса, поступаем так: из точки D проводим дугу радиуса 1,22R, засекая ею направление большой оси. Полученный при этом отрезок Cm и выражает малую полуось.

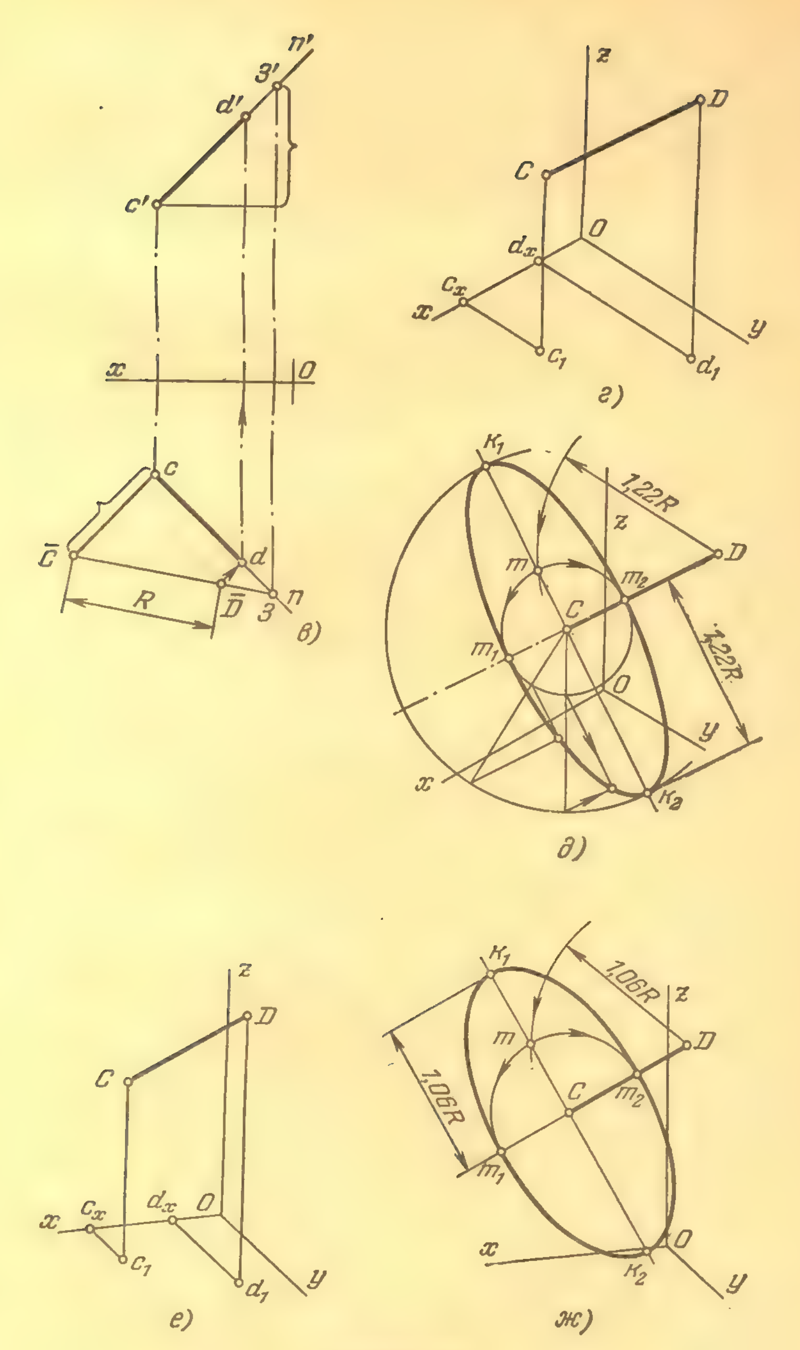

n'
3'
d'
c'
x
O
c
C̄
d
D̄
3
n
R
в)
z
D
C
O
dx
cx
x
y
c1
d1
г)
K1
1,22R
z
D
m
m2
C
m1
1,22R
O
y
x
K2
д)
z
D
C
cx
dx
O
x
c1
y
d1
е)
K1
1,06R
z
m
D
1,06R
C
m2
m1
O
x
K2
y
ж)

Рис. 320в — ж.

Следовательно, мы получаем обе оси эллипса по положению и размеру. Точки для очерчивания эллипса могут быть получены известным построением эллипса по его большой и малой осям (см. рис. 320, *д*).

Аналогично поступаем и для построения диметрической проекции (рис. 320, *ж*). Различие лишь в размере радиуса (1,06*R* вместо 1,22*R*) дуги, проводимой из точки *D*, и в размере большой оси эллипса. Малая же ось эллипса получается построением, и, конечно, величина ее изменяется в зависимости от угла между плоскостью, в которой расположена изображаемая окружность, и плоскостью диметрической (или изометрической) проекции, как это излагается в курсе.

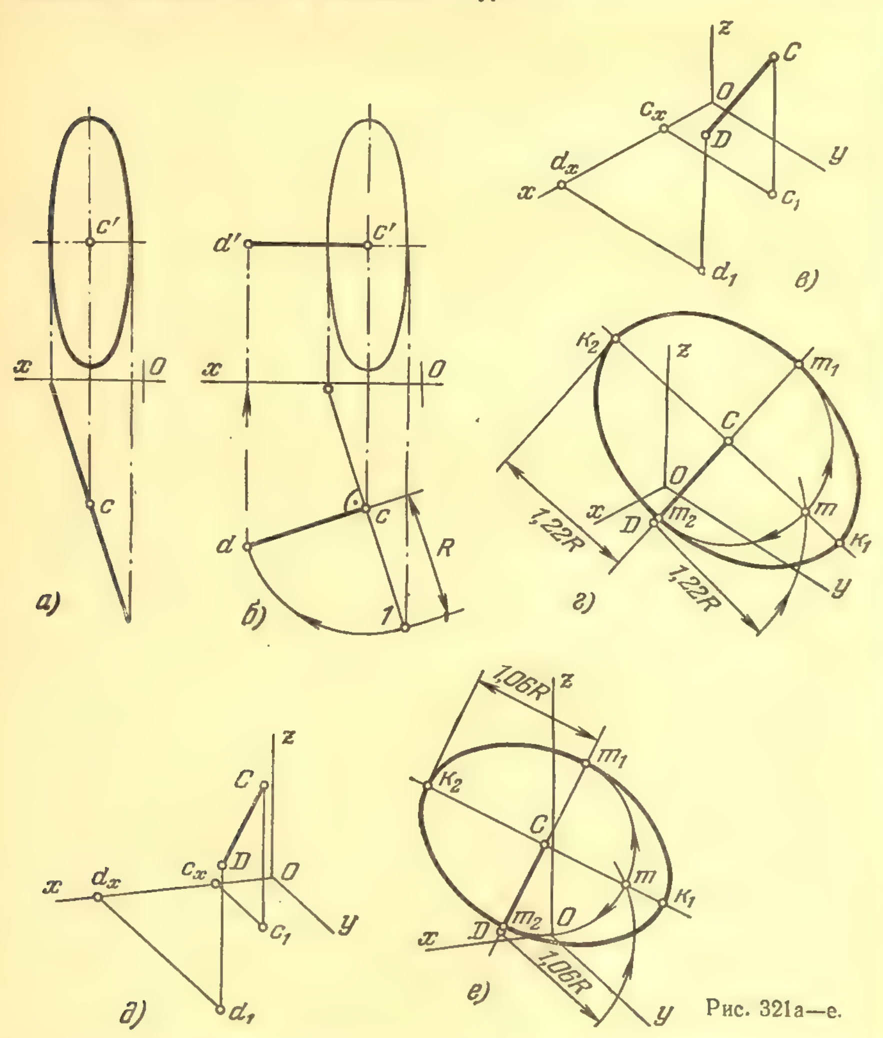


Рис. 321а—е.

339*. Построить изометрическую и диметрическую проекции окружности радиуса *R*, расположенной в некоторой горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 321, *а*).

Р е ш е н и е. В задаче 338 мы имели дело с окружностью, расположенной в плоскости общего положения. Очевидно, тот общий способ, который мы применили в той задаче, пригоден и в данном случае. Но построение упрощается, так как упрощается проведение перпендикуляра к плоскости, в которой расположена окружность, и откладывание на нем размера R. Для изометрической проекции построения показаны на рис. 321, *б, в, г.* На рис. 321, *б* проведен перпендикуляр $c'd'$, cd (причем $cd=R$) и взята точка O — начало координат. На рис. 321, *в* отрезок CD построен в изометрической проекции по координатам, взятым с рис. 321, *б.* Полученный в изометрической проекции отрезок CD дает направление малой оси эллипса и положение его центра (точка C).

На рис. 321, *г* через точку C перпендикулярно к CD проведена большая ось эллипса, равная $1{,}22d$, где $d=2R$ — диаметр изображаемой окружности, и определена величина малой полуоси эллипса, а также изображен сам эллипс.

Такие же построения выполнены и для диметрической проекции (рис. 321, *д* и *е*).

§ 27. Изображение тел

340*. Определить координаты точки A, лежащей на поверхности: цилиндра (рис. 322, *а*), конуса при наличии вершины (рис. 322, *б*), усеченного конуса (рис. 322, *в*), сферы (рис. 322, *з*), заданных в изометрической проекции.

Р е ш е н и е. Через заданную на поверхности цилиндра (рис. 322, *а*) точку A проведена образующая (|| оси z), и найдена на плоскости xOy вторичная проекция a_1

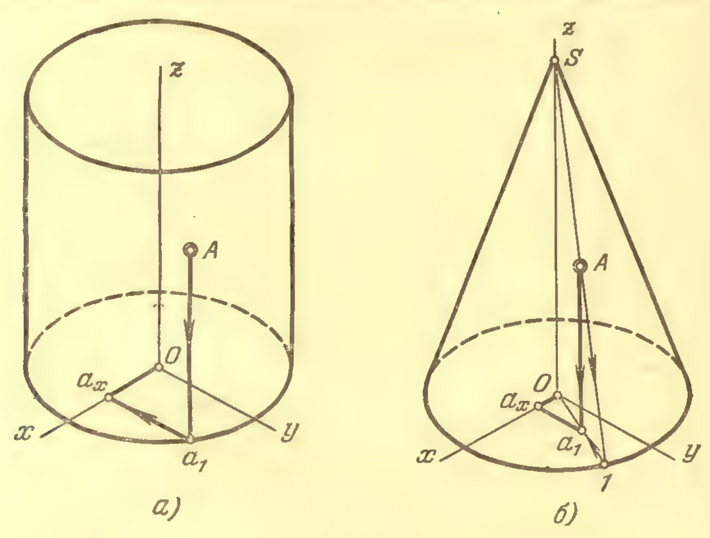
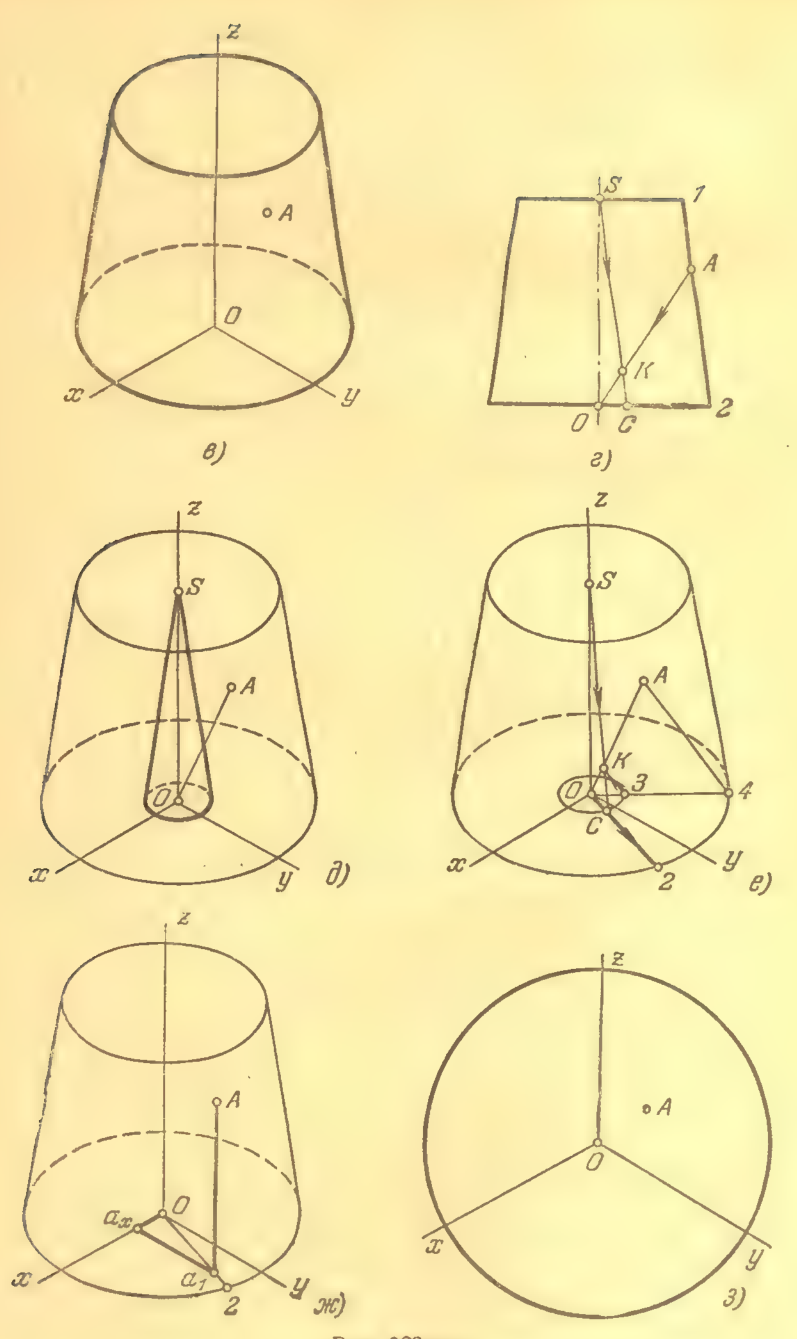


Рис. 322а, б.

точки A. Из a_1 проведена прямая параллельно оси y до пересечения с осью x в точке a_x.

Апликата точки A определяется величиной отрезка Aa_1, а абсцисса и ордината — соответственно величинами отрезков Oa_x и a_xa_1.

На рис. 322, *б* через точку A также проведена образующая (S—1) и построена ее вторичная (на пл. xOy) проекция O—1. Теперь на O—1 может быть найдена точка a_1— вторичная проекция точки A. Величины отрезков Aa_1, Oa_x и a_xa_1 определяют соответственно координаты z, x и y точки A.



z
A
O
x
y
в)
S
1
A
K
O
C
2
г)
z
S
A
O
x
y
д)
z
S
A
K
O
3
4
C
x
y
2
е)
z
A
O
a_x
a_1
x
y
2
ж)
z
A
O
x
y
з)

Рис. 322в—з.

Если точка задана на поверхности усеченного конуса и по условию нельзя получить на чертеже его вершину, то поступаем следующим образом.

Рассмотрим сначала сечение конуса плоскостью, проходящей через точку A и ось конуса (рис. 322, *г*). Проведя прямые AO и $SC \parallel 1—2$, получаем $\frac{OK}{KA} = \frac{OC}{C—2}$. Это соотношение сохранится и в изометрической проекции. Поэтому (рис. 322, *д*) проводим прямую OA и строим конус с вершиной S и образующей, параллельной образующей усеченного конуса; получаем, сравнивая рис. 322, *г* с рис. 322, *е*, $\frac{O—3}{3—4} = \frac{OC}{C—2}$.

Теперь делим OA в отношении $\frac{O—3}{3—4}$. Через полученную точку K проводим образующую SC внутреннего конуса и полудиаметр $O—2$ эллипса, где точки C и 2 соответствуют точкам C и 2 на рис. 322, *г*. После этого мы имеем возможность спроецировать точку A на плоскость xOy (рис. 322, *ж*) и получить координатные отрезки Aa_1, a_1a_x, a_xO.

Для определения координат точки A, лежащей на поверхности сферы (рис. 322,*з*), следует построить (рис. 322, *и*) дополнительные проекции сферы и координатных осей

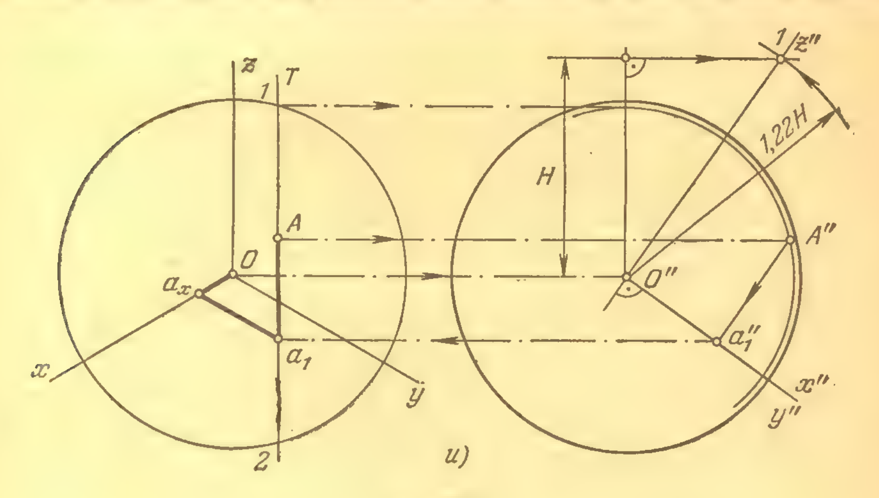


Рис. 322и.

на плоскости, перпендикулярной к пл. изометрических проекций (картинной пл.) и параллельной оси z. Это как бы профильная проекция, если считать, что изометрическая проекция служит фронт. проекцией. Пл. T, проходящая через точку A, пересекает сферу по окружности диаметра $1—2$. Строим проекцию этой окружности и находим на ней проекцию данной точки — A''. По A'' находим точку a_1'', которая является профильной проекцией вторичной проекции a_1 точки A.

Теперь можно изобразить отрезки Aa_1, a_1a_x и Oa_x. Величина этих отрезков позволяет определить координаты точки A относительно центра O.

341*. Построить диметрическую проекцию шайбы по чертежу рис. 323, *а*.

Решение. Прежде всего, рассмотрев чертеж на рис. 323, *а*, устанавливаем, что данная шайба представляет собою тело вращения, боковая поверхность которого состоит из цилиндрической части с диаметром D и высотой h и из поверхности тора, образованной вращением дуги окружности радиуса R вокруг оси z, причем центр

этой дуги описывает окружность диаметра d_1. В шайбе имеется цилиндрическое отверстие диаметра d_2. Сверху и снизу шайба ограничена плоскостями.

Обращаясь к построению диметрической проекции, прежде всего представим себе, что в поверхность тора, ограничивающую частично шайбу, вписаны сферы радиуса R, центры которых располагаются на окружности диаметра d_1.

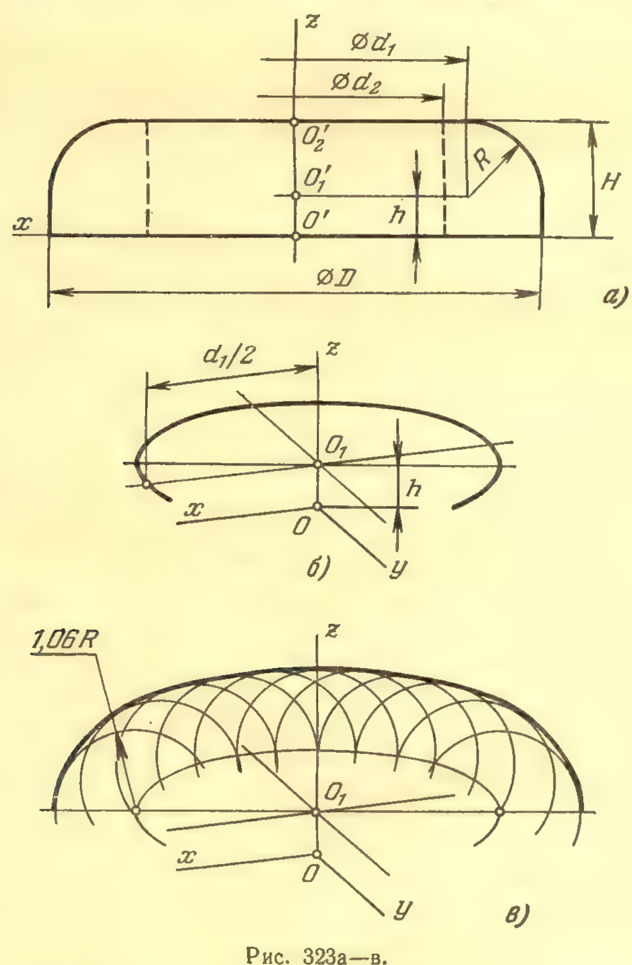


Рис. 323а—в.

Очерковая линия диметрической проекции построена с помощью сфер, вписанных в ту часть поверхности шайбы, которая представляет собою поверхность тора, образованную вращением дуги окружности радиуса R вокруг оси z (рис. 323, *а*). Центры сфер, вписываемых в эту поверхность, располагаются на окружности диаметра d_1 с центром в точке O_1 на расстоянии h от опорной плоскости шайбы. На рис. 323, *б* показан эллипс — диметрическая проекция этой окружности. Взяв на нем ряд точек (рис. 323, *в*), проводим из них окружности радиуса $1{,}06R$, представляющие собой очерки диметрических проекций шаров радиуса R. Очерковая линия проекции поверхности тора является огибающей семейства окружностей.

Затем строим эллипс — проекцию верхней кромки отверстия диаметра d_2 с центром в точке O_2 (рис. 323, *г*) и часть эллипса (рис. 323, *д*) с центром в точке O, представляющего собою проекцию окружности основания цилиндрической части шайбы. Из концов большой оси этого эллипса проводим прямые линии (рис. 323, *е*)—

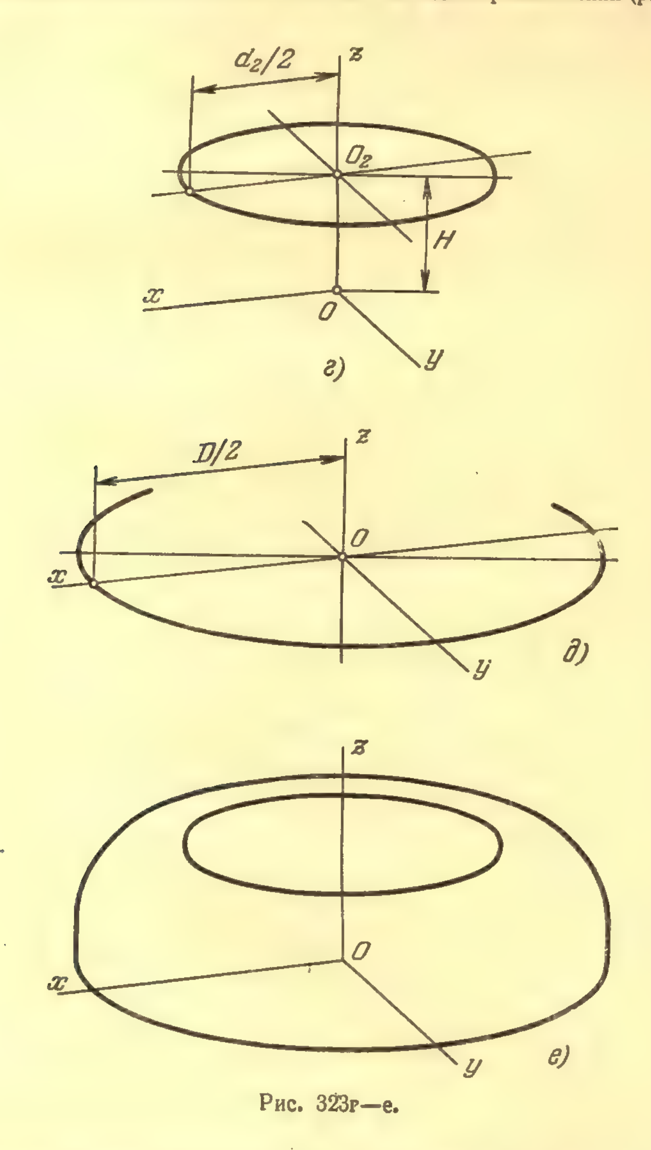


Рис. 323г—е.

очерковые линии проекции цилиндрической части шайбы. Эти прямые касаются построенного ранее очерка поверхности тора. Если представить, что из данной шайбы «вырезана» часть плоскостями xOz и yOz, то получится более наглядное изображение шайбы. Но при этом меняется порядок построения (см. далее задачу 344).

342*. Построить изометрическую проекцию тела вращения, изображенного на рис. 324, *а*.

Решение. Данное тело вращения ограничено комбинированной поверхностью, состоящей из плоскости, цилиндра вращения, поверхности тора и сферы.

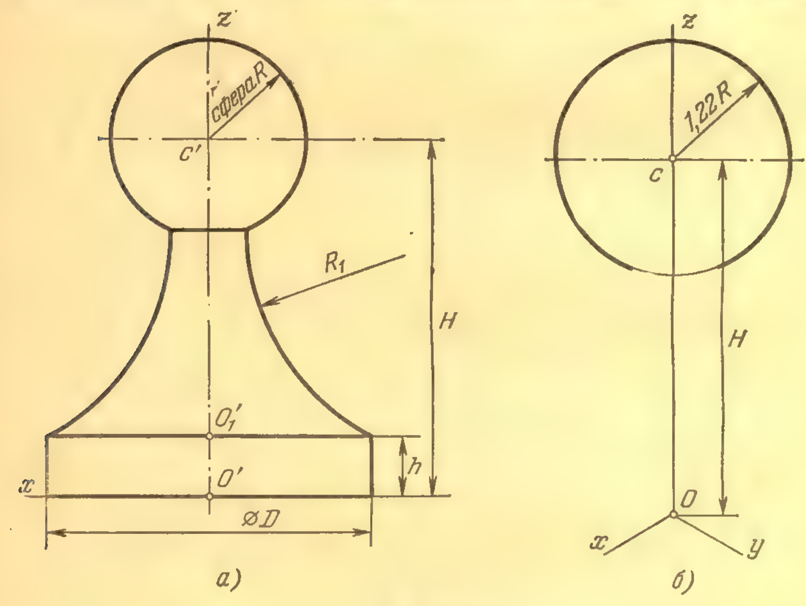


Рис. 324а, б.

Выполняем построение в следующем порядке:

1. Приняв точку O (рис. 324, *б*) в качестве начала координат, откладываем по оси z отрезок, равный H, и проводим из точки C как из центра окружность радиуса $1{,}22R$. Так изобразится в изометрической проекции сфера радиуса R.

2. Чтобы построить очерк поверхности тора в изометрической проекции, изображаем верхнюю часть данного тела в наклонном положении (рис. 324, *в*), причем наклон оси тела определяется отношением $\frac{C''2}{O''2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, что соответствует значению коэффициента искажения по осям x, y, z в изометрической проекции. Теперь выполняем построение, как в задаче 242, что дает нам возможность к изображению сферы в изометрической проекции добавить видимое очертание поверхности тора.

3. Далее строим (рис. 324, *г*) изометрическую проекцию цилиндра, находящегося в основании данного тела. Здесь применимо правило, по которому большая ось эллипса, изображающего в изометрической проекции окружность, перпендикулярна к «свободной» оси, каковой служит ось z. Большая ось эллипса принимается равной $1{,}22D$, малая ось — $0{,}7D$.

343*. Построить изометрическую проекцию тела, изображенного на рис. 325, *а*.

Решение. Прежде всего устанавливаем, что данное тело состоит из шестиугольной правильной призмы и половины сферы, срезанной тремя плоскостями. Подготавливаем размеры элементов тела, необходимые для построения изометрической проекции (рис. 325, *б*).

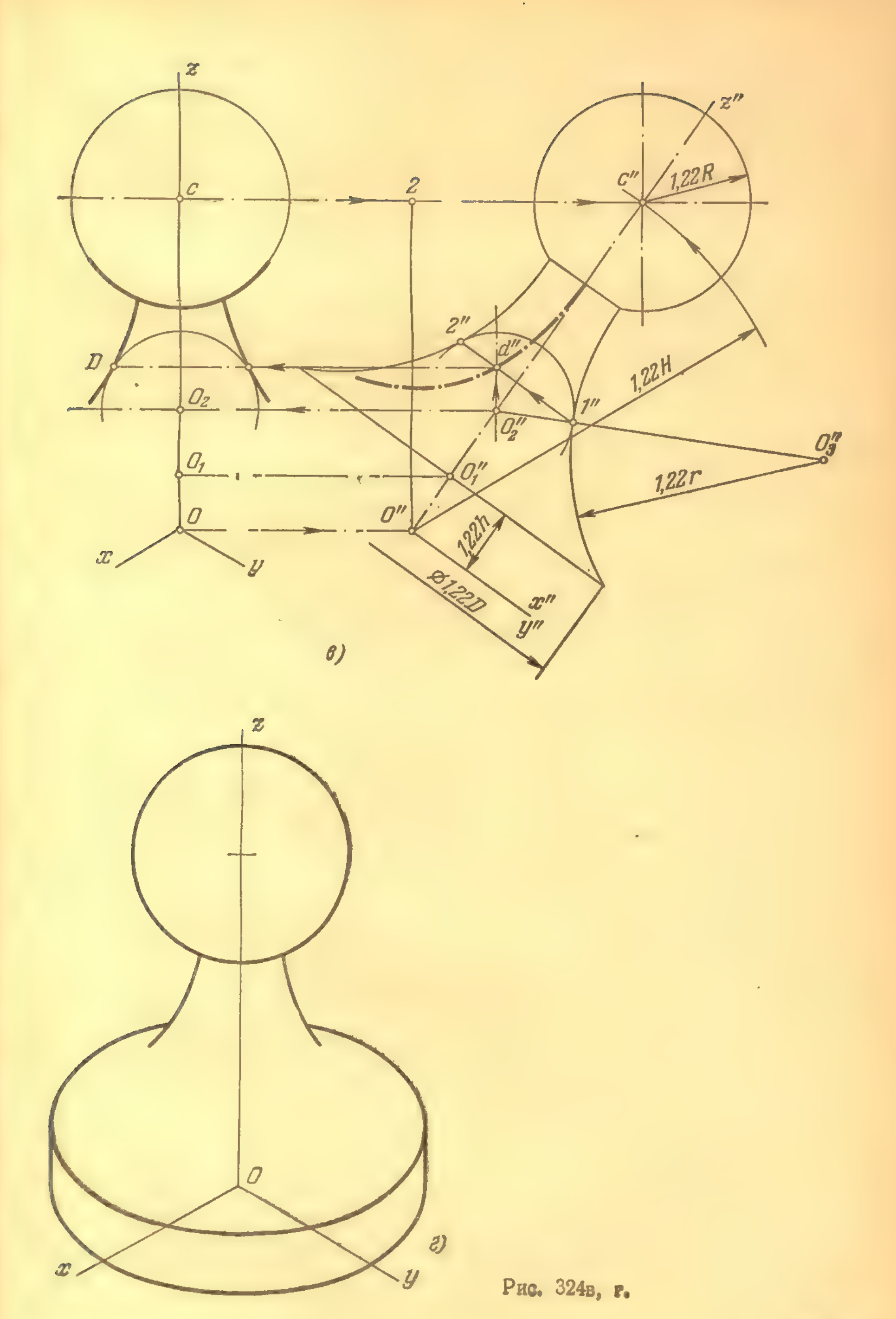

z
c
2
z''
c''
1,22R
2''
d''
D
1,22H
O2
O''2
1''
O''3
O1
O''1
1,22r
O
O''
1,22h
x
y
Ø1,22D
x''
y''
в)
z
O
г)
x
y

Рис. 324в, г.

Приступаем к построению изометрической проекции.

1. Приняв за начало координат точку O (рис. 325, *б* и *в*), строим дугу радиуса R_2 с центром O_2, расположенную на расстоянии h_2 от начала координат.

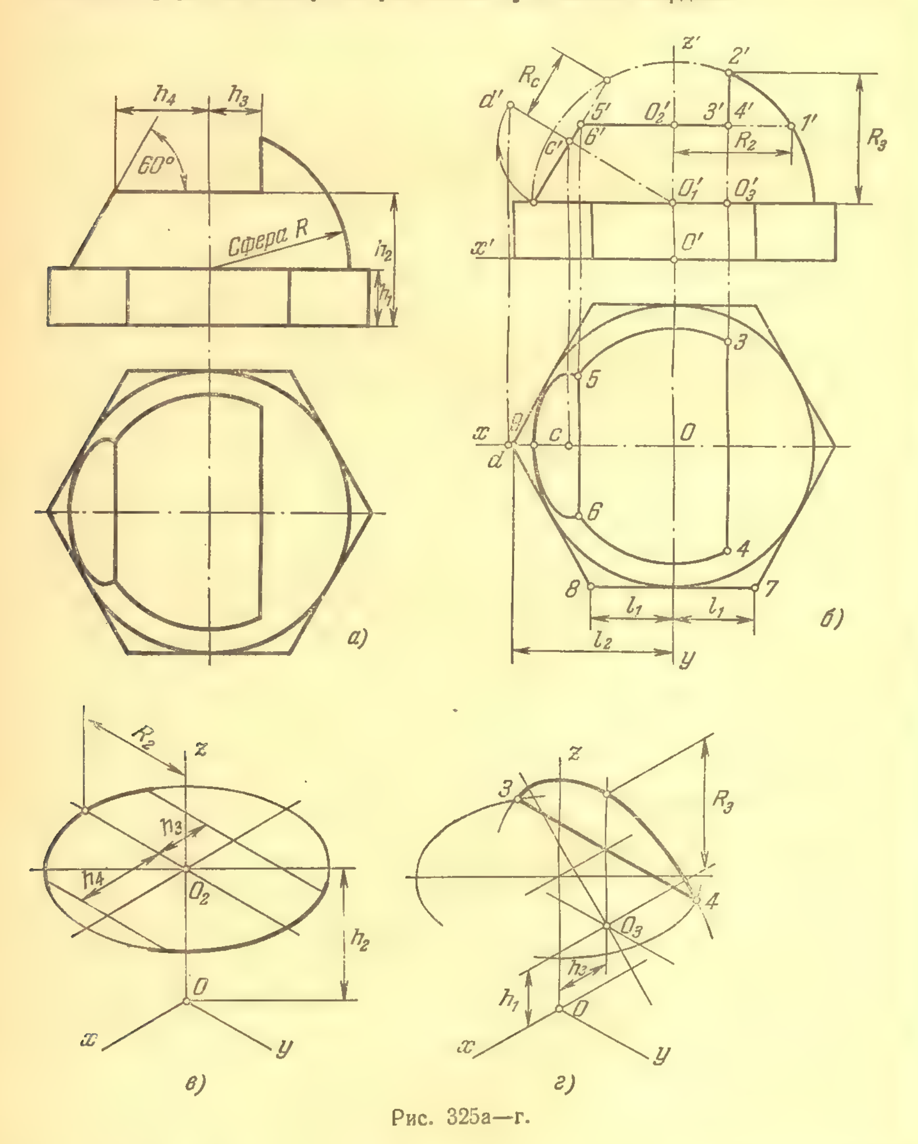


Рис. 325а—г.

2. Далее (рис. 325, *г*), строим дугу радиуса R_3 с центром O_3, имеющим координаты $x=h_3$, $y=0$ и $z=h_1$, и проводим прямую $3-4$ параллельно оси y.

3. По координатам точек C и D строим отрезок CD (рис. 325, *д*) и проводим перпендикулярно к нему прямую через точку C. Откладываем отрезки $Ck_1=Ck_2=1{,}22R_C$ и получаем отрезок k_1k_2— большую ось эллипса, в который проецируется окруж-

ность радиуса R_C с центром C (см. рис. 325, *б*). Малую ось m_1m_2 получаем, сделав из точки D как из центра засечки на большой оси эллипса дугой радиуса $1{,}22R_C$ и отложив отрезок $Cm=Cm_1=Cm_2$ на прямой CD. Проводим прямую *5—6* параллельно оси *y*.

4. Из центра O_1, расположенного на оси z на расстоянии h_1 (рис. 325, *е*) от основания данного тела, проводим окружность радиуса $1{,}22R$, представляющую собой

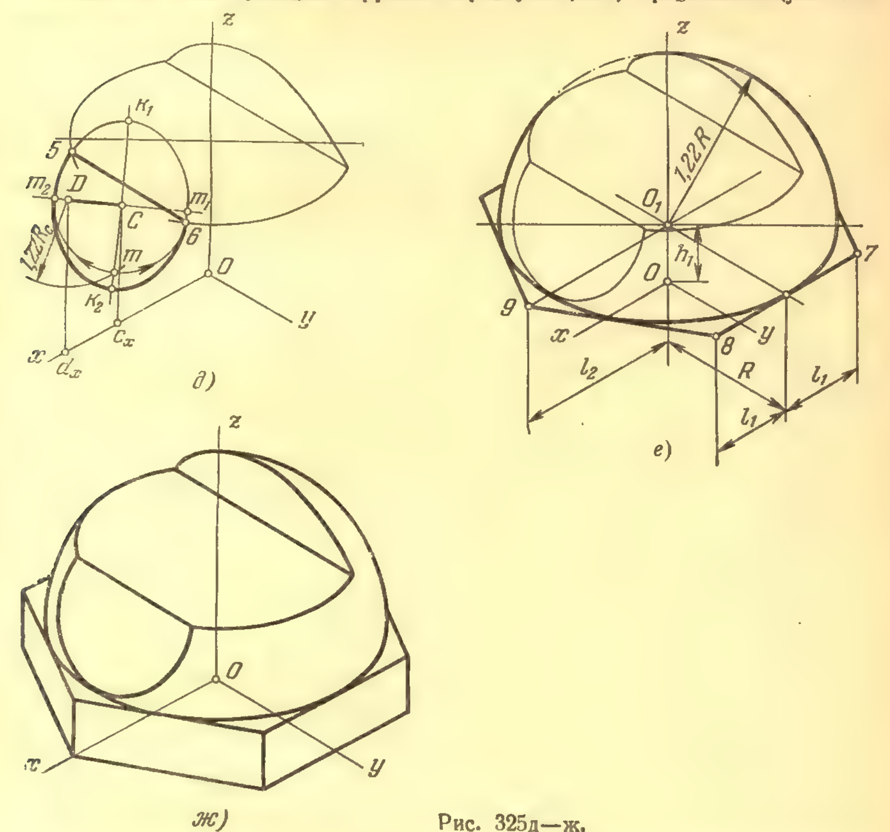


Рис. 325д—ж.

очерк изометрической проекции сферы радиуса R. Эта окружность должна касаться всех трех построенных ранее эллипсов.

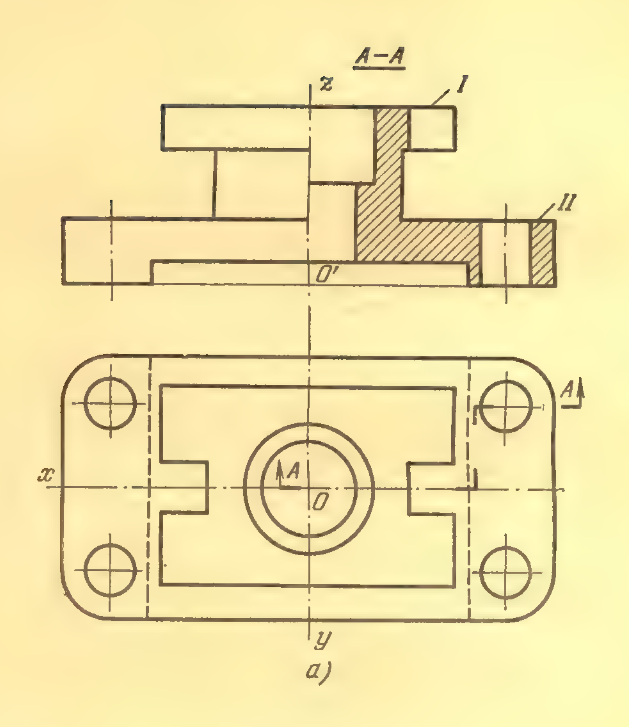
По координатам точек *9*, *8*, *7* и им симметричных строим проекции видимых сторон шестиугольника верхнего основания.

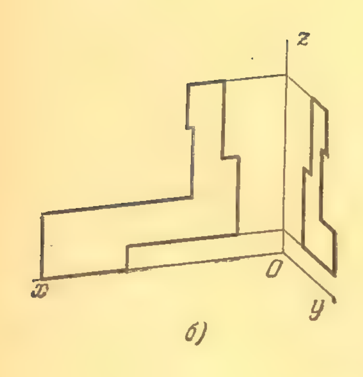
5. Достраиваем (рис. 325, *ж*) проекции видимых участков нижнего шестиугольного основания, зная его высоту h_1.

344*. Построить диметрическую проекцию детали, изображенной на рис. 326, *а*.

Решение. Во избежание излишних построений при выполнении изображения детали с отверстием наиболее целесообразно вести построение в следующем порядке:

1. Начертить (рис. 326, *б*) сечения, входящие в состав фронтального и профильного разрезов при секущих плоскостях, совпадающих с плоскостями симметрии детали.





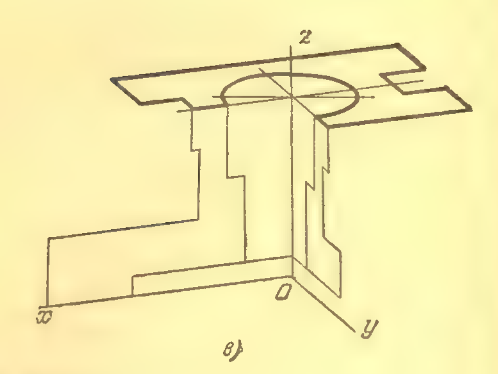


Рис. 326а—в.

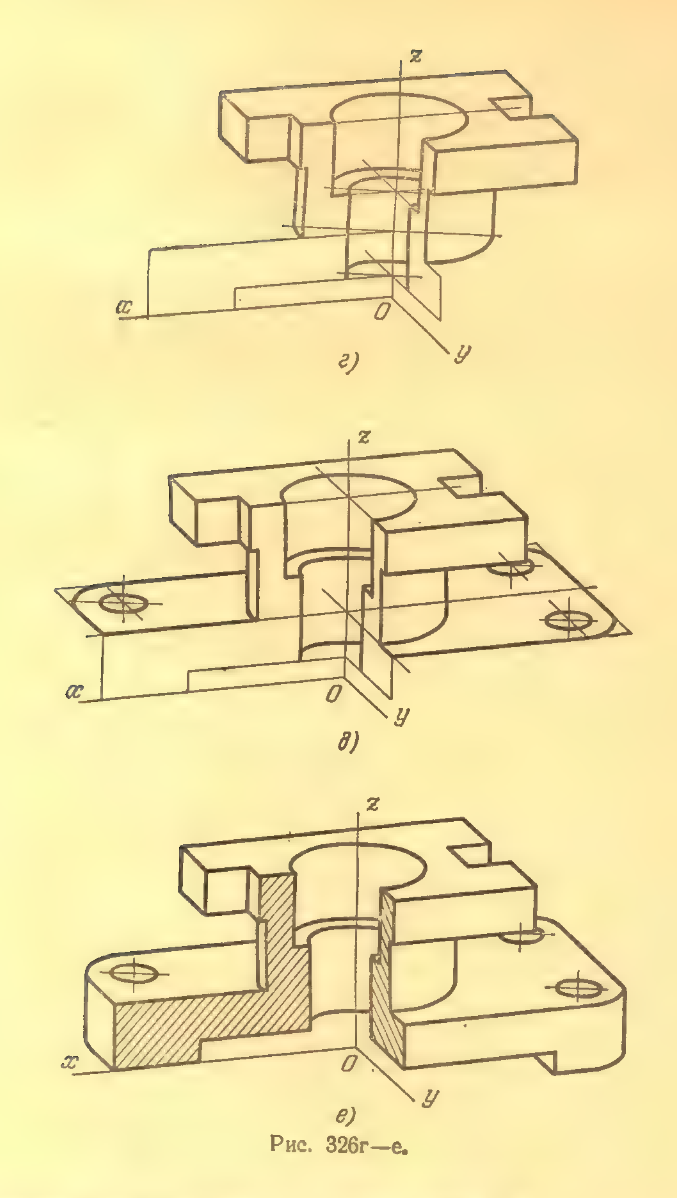


Рис. 326г—е.

2. Начертить грань *I* верхнего фланца детали (рис. 326, *в*).

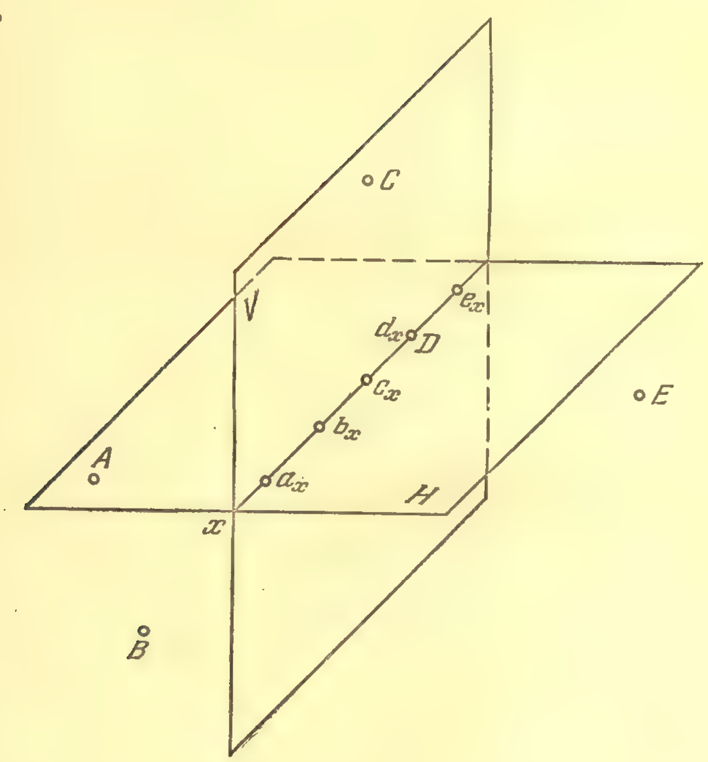
3. Начертить (рис. 326, *г*) все остальные видимые элементы верхнего фланца и цилиндрическую часть детали, а также эллипсы внутренних цилиндров.

4. Начертить грань *II* основания детали и окружности цилиндрических отверстий в этом основании (рис. 326, *д*).

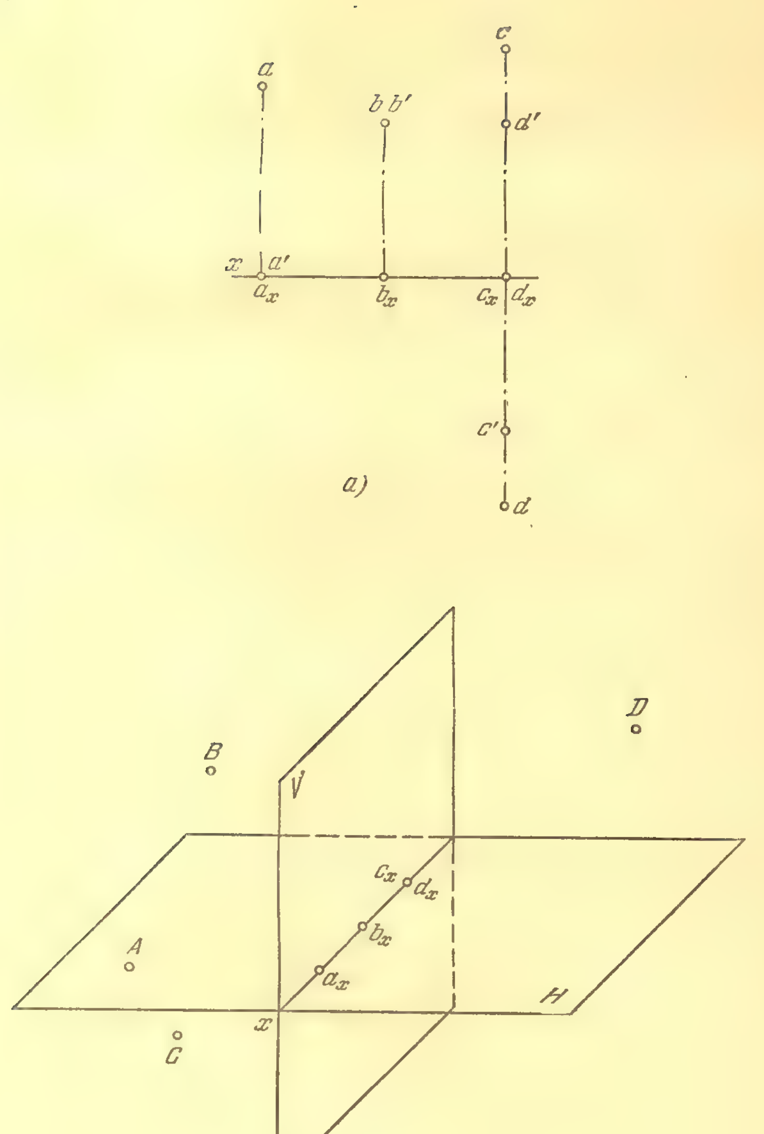
5. Достроить основание детали и нанести штриховку сечений (рис. 326, *е*).

ОТВЕТЫ

2.



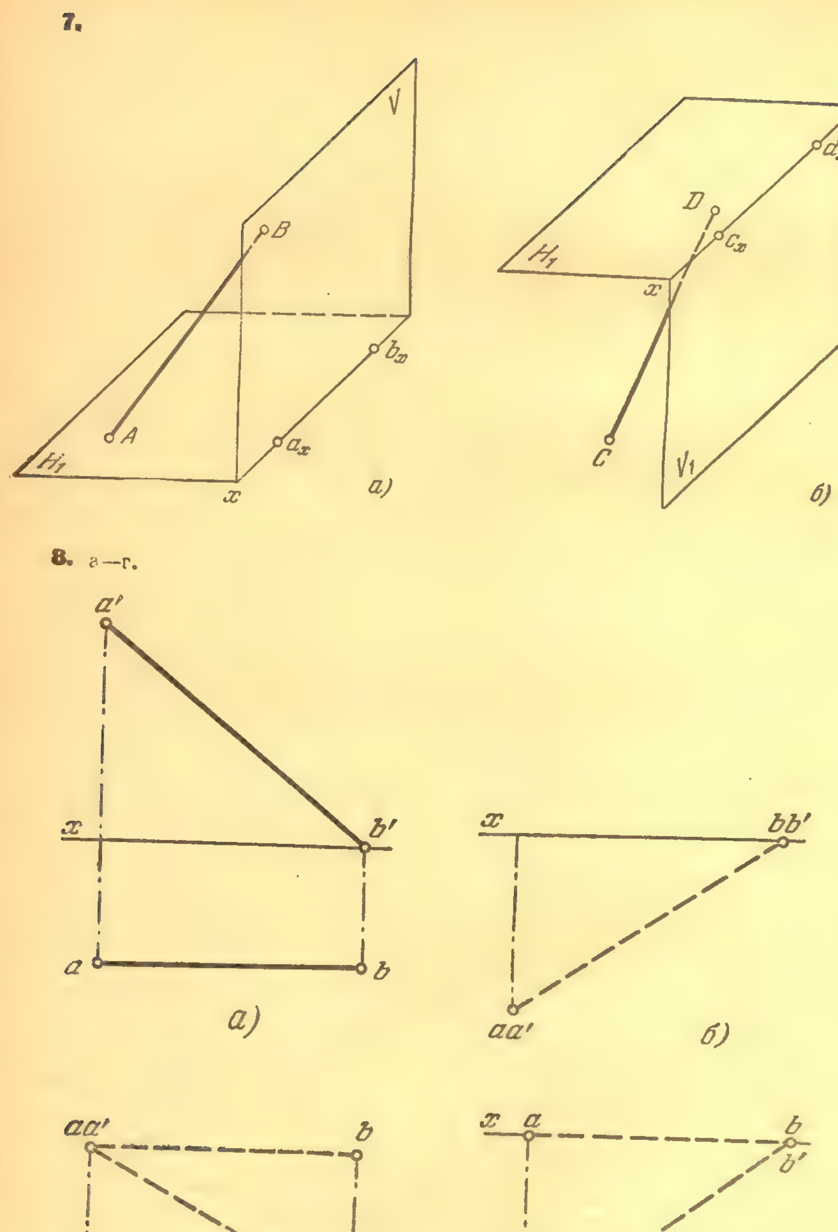
4.



a)

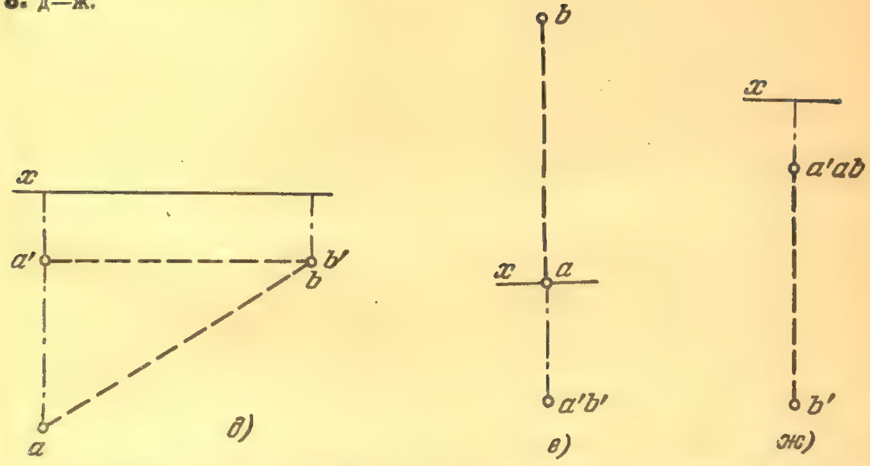
б)

7.



8. а—г.

8. д—ж.



9. а) *CD* — отрезок прямой общего положения, находится в первой четверти пространства, концом *D* упирается в переднюю полу горизонт. пл. проекций. Конец *C* равноудален от обеих пл. проекций.

б) Отрезок *AB* расположен в третьей четверти пространства параллельно фронт. пл. проекций. Концом *B* упирается в заднюю полу горизонт. пл. проекций.

в) Отрезок *EF* расположен на верхней поле фронт. пл. проекций параллельно оси проекций.

г) Отрезок *IK* расположен во второй четверти пространства перпендикулярно к фронт. пл. проекций. Конец *K* равноудален от обеих пл. проекций.

11.

a'
c'
b'
x
a
c
b

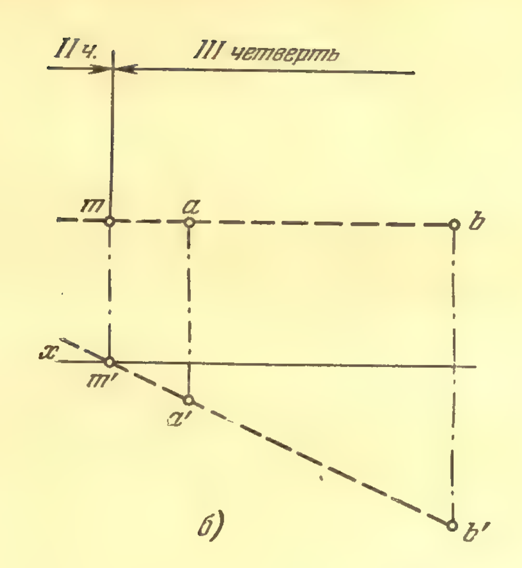
13. а.

I четверть — II ч. — III ч.

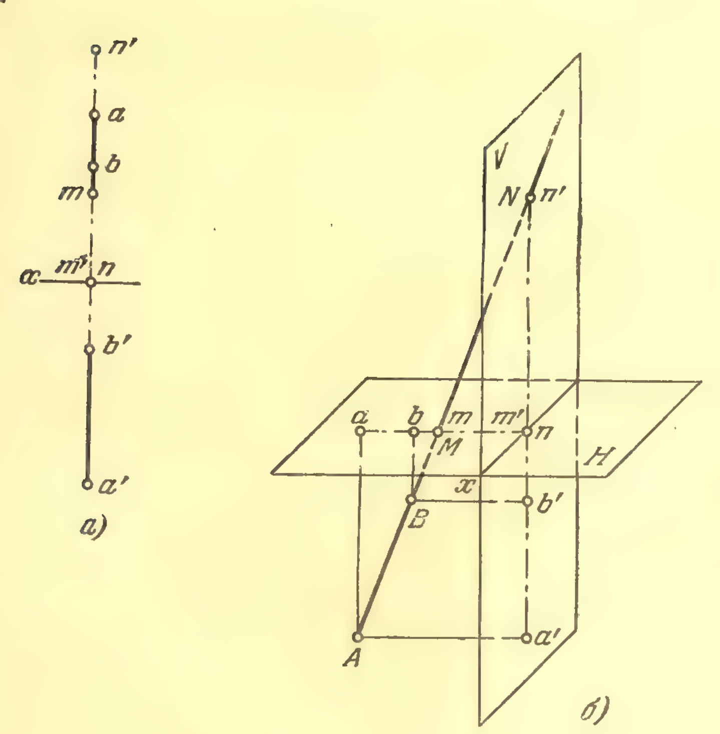
a' b' n' m x n m' b a

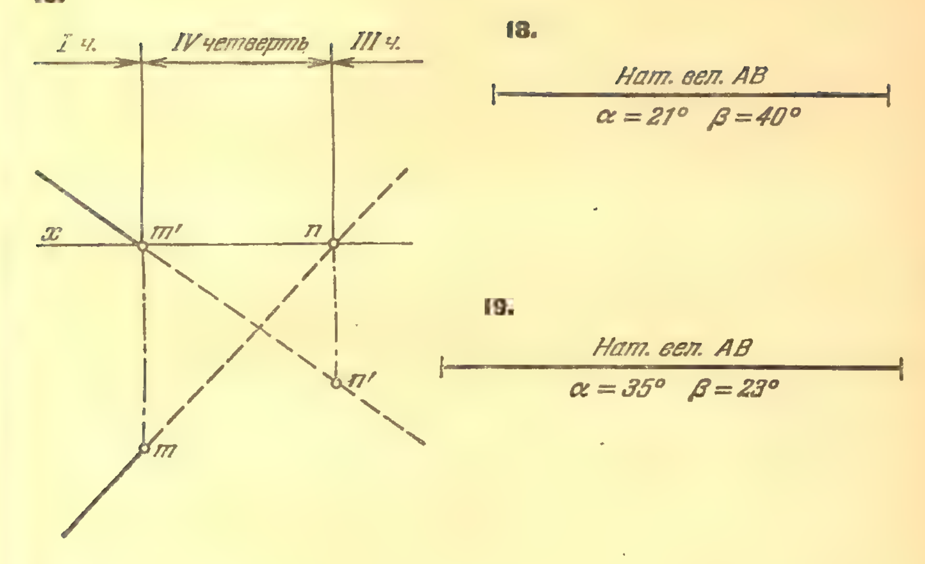
а)

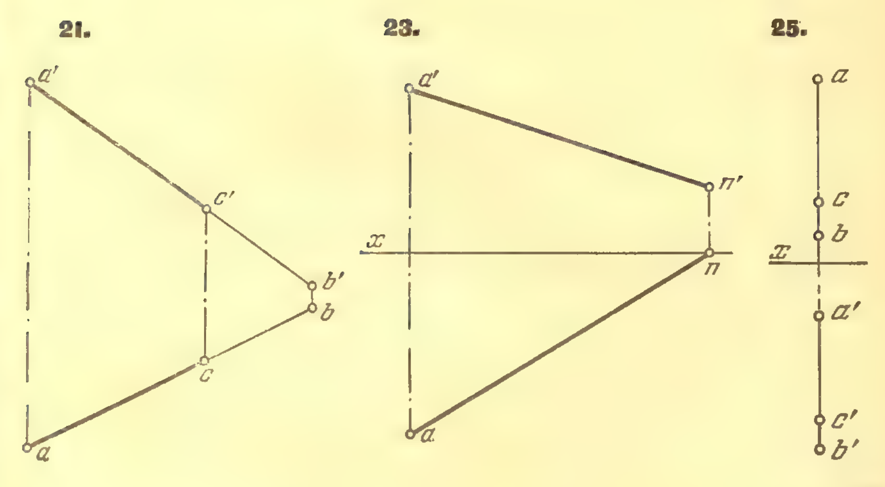
13. б.



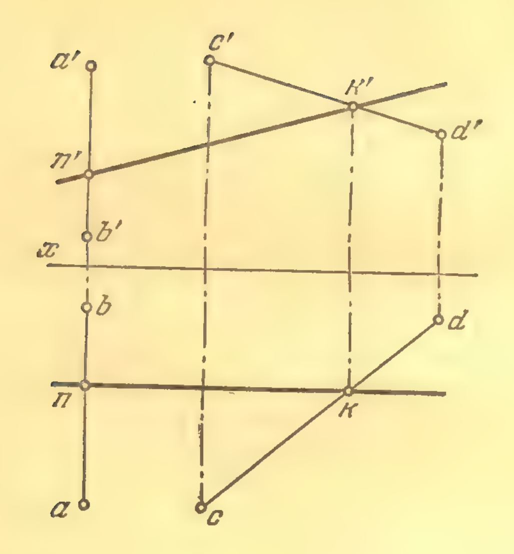
15.



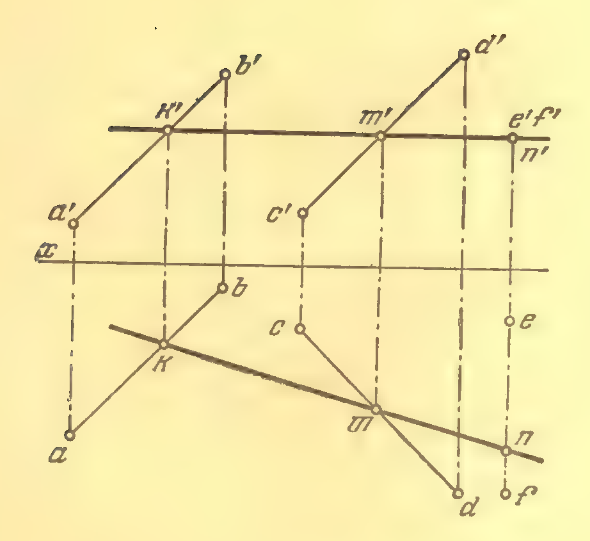

16.
I ч.
IV четверть
III ч.
x
m'
n
n'
m
18.
Нат. вел. AB
α = 21° β = 40°
19.
Нат. вел. AB
α = 35° β = 23°


21.
a'
c'
b'
b
c
a
23.
a'
n'
x
n
a
25.
a
c
b
x
a'
c'
b'

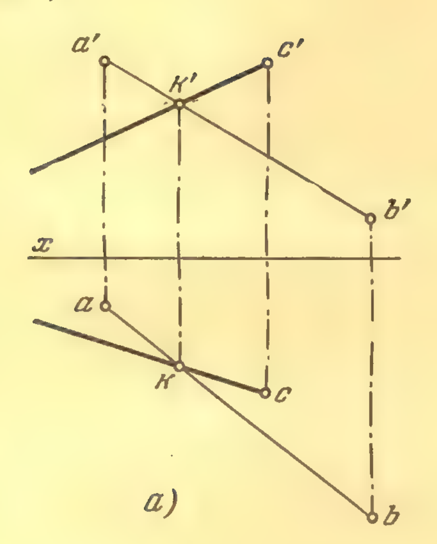
27.

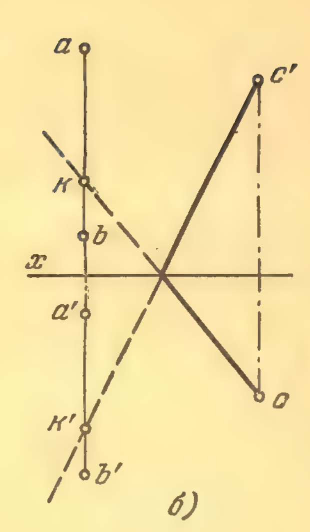


29.

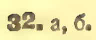


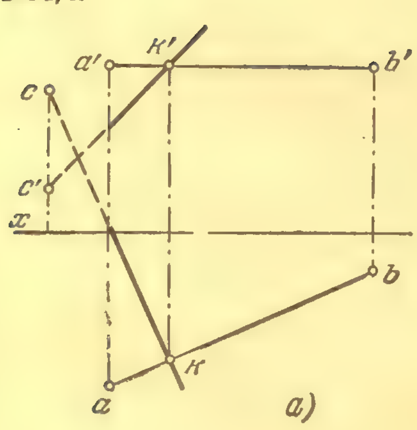
30. а, б.

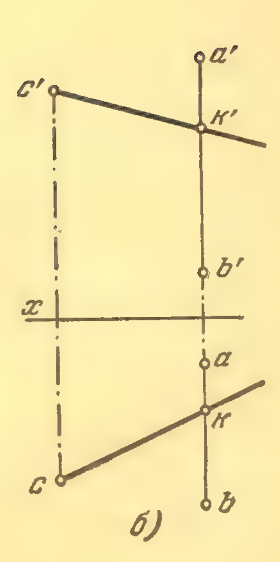




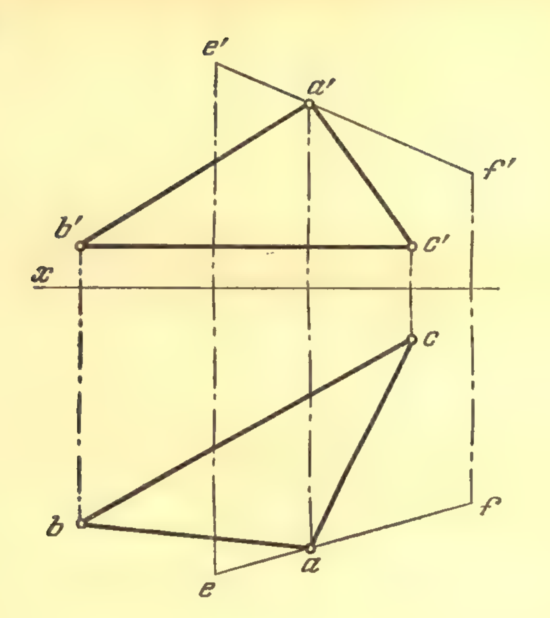
32. а, б.



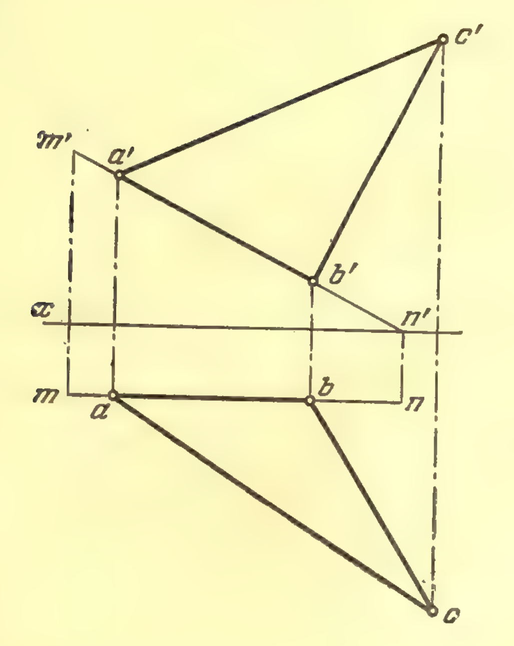




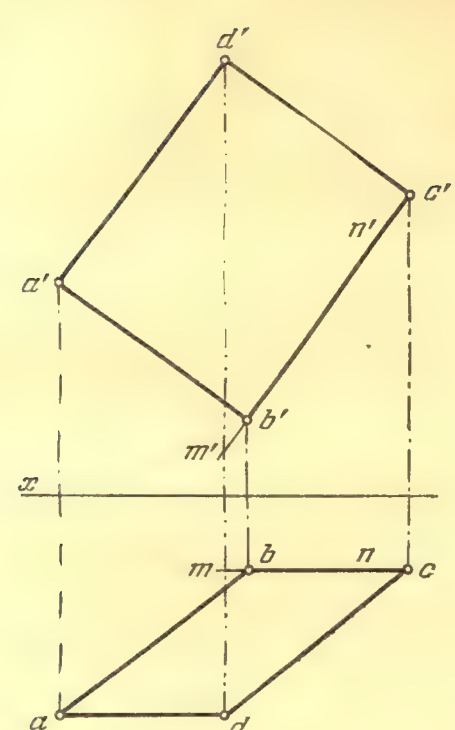
35.



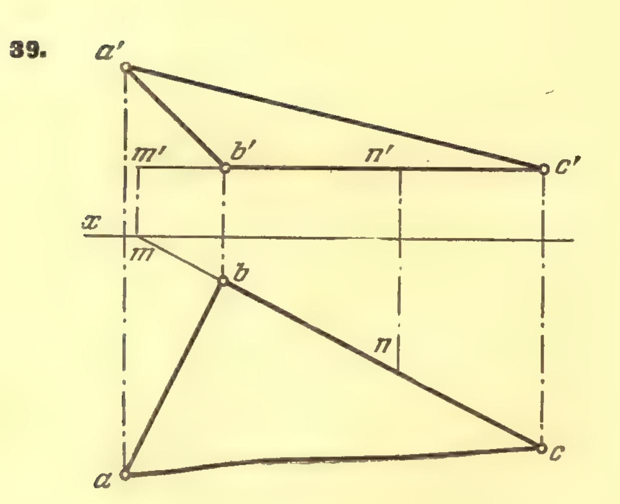
36.



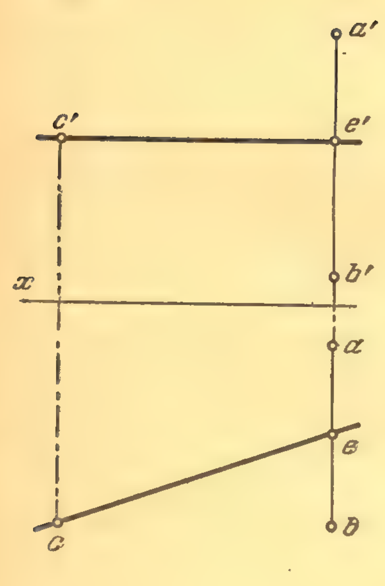
38.



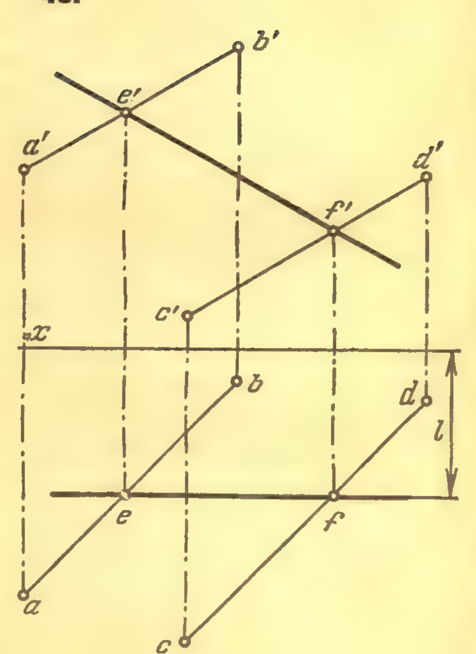
39.



41.

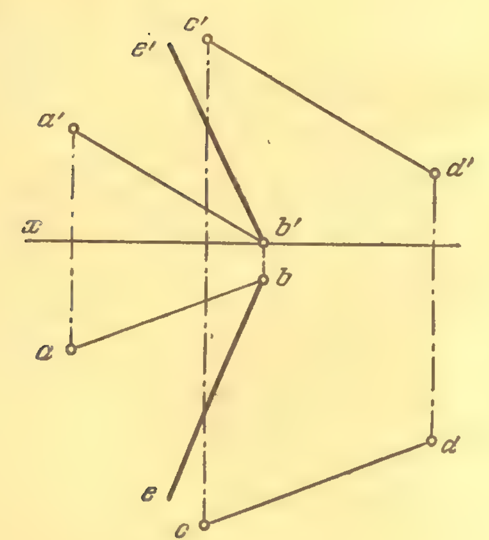


43.

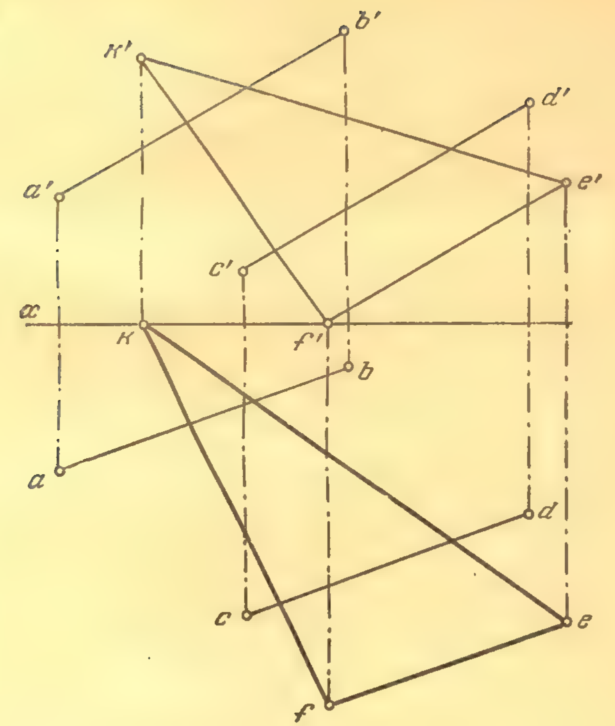




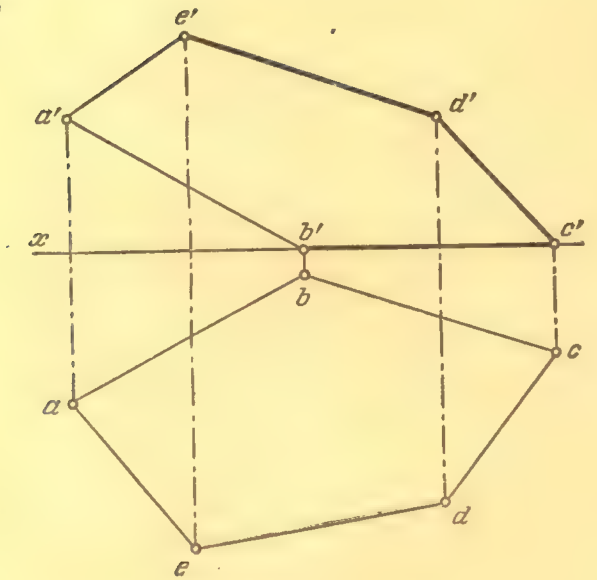
45.



47.



48.



49.

S′

k′

e′

x a′ b′ c′

b

a s c

k e

51. Заданная плоскость является плоскостью общего положения.

53.

P_v

b′

a′

c′

x P_x

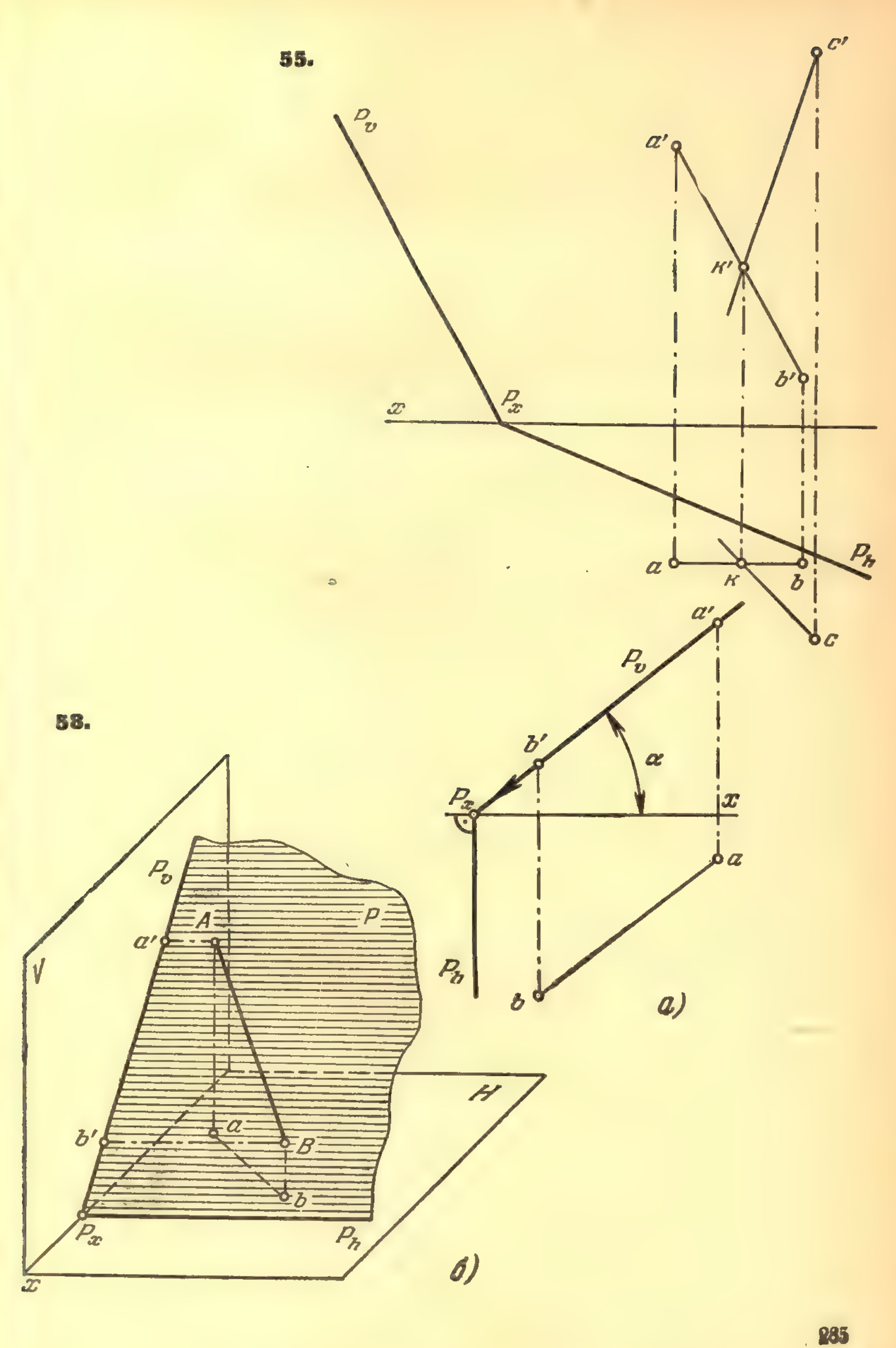
b

a

c

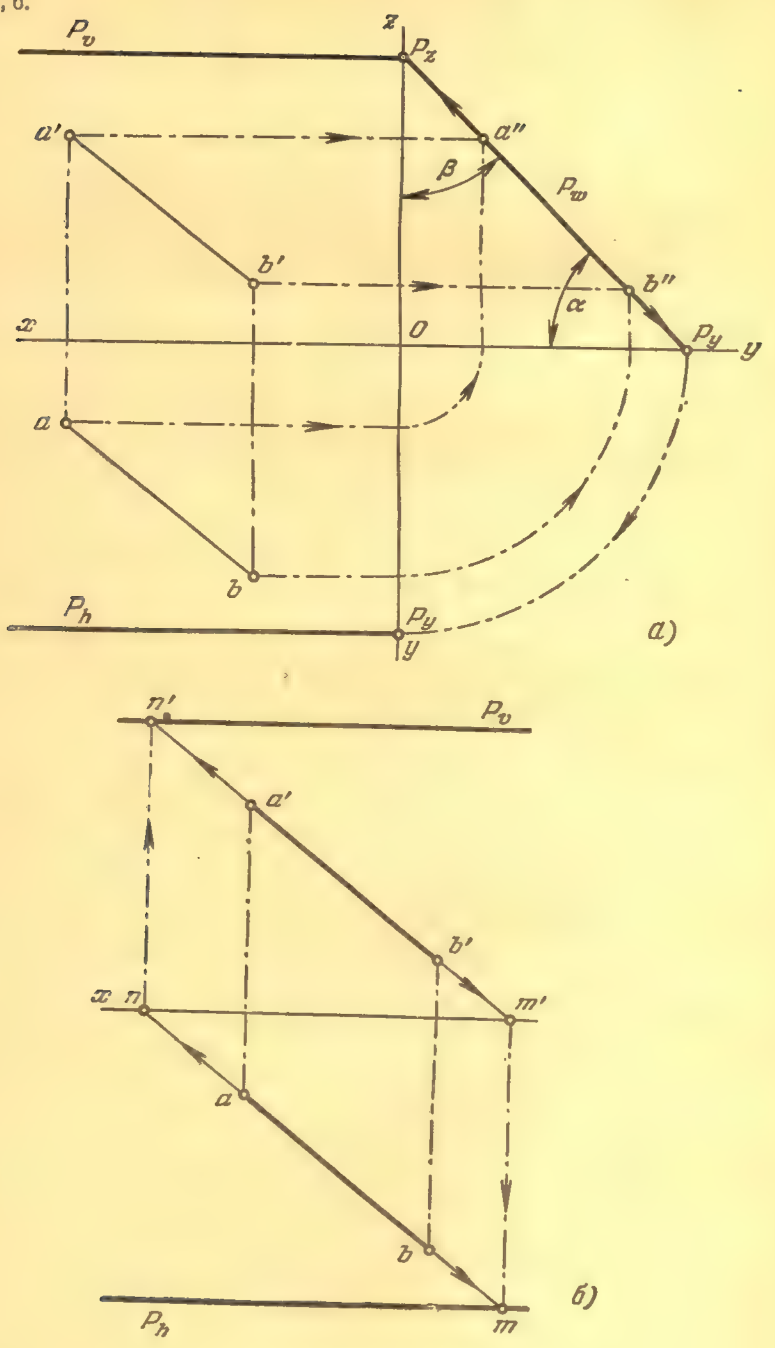
P_h

55.

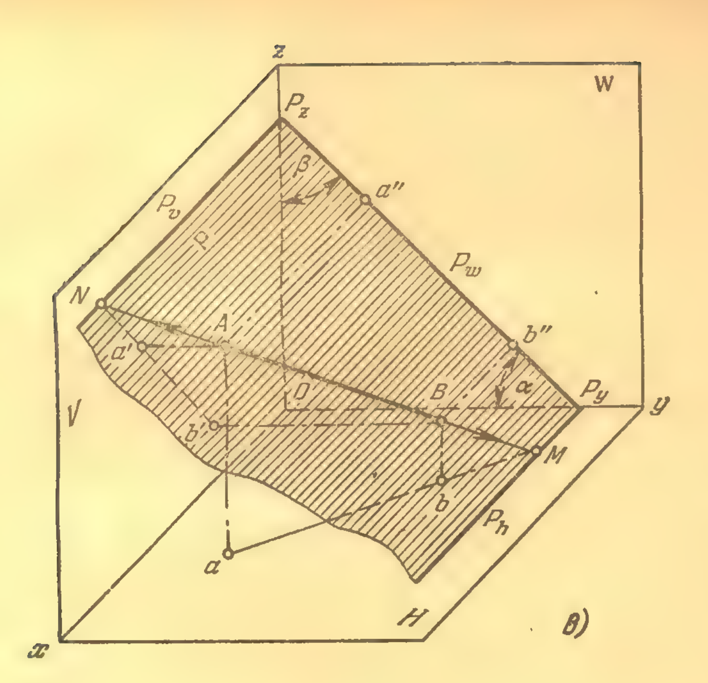


P_v
c'
a'
κ'
b'
x
P_x
P_h
a
κ
b
c
58.
a'
P_v
b'
α
P_x
x
a
P_h
b
a)
V
P_v
A
P
a'
H
b'
a
B
b
P_x
P_h
x
б)

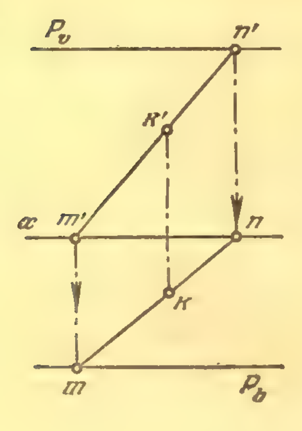
59. а, б.



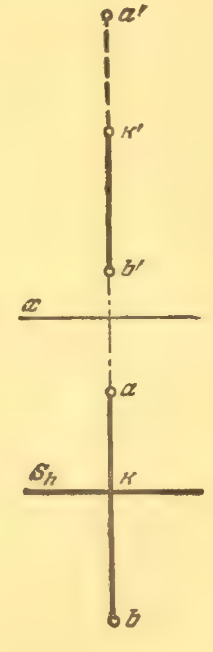
59. в.

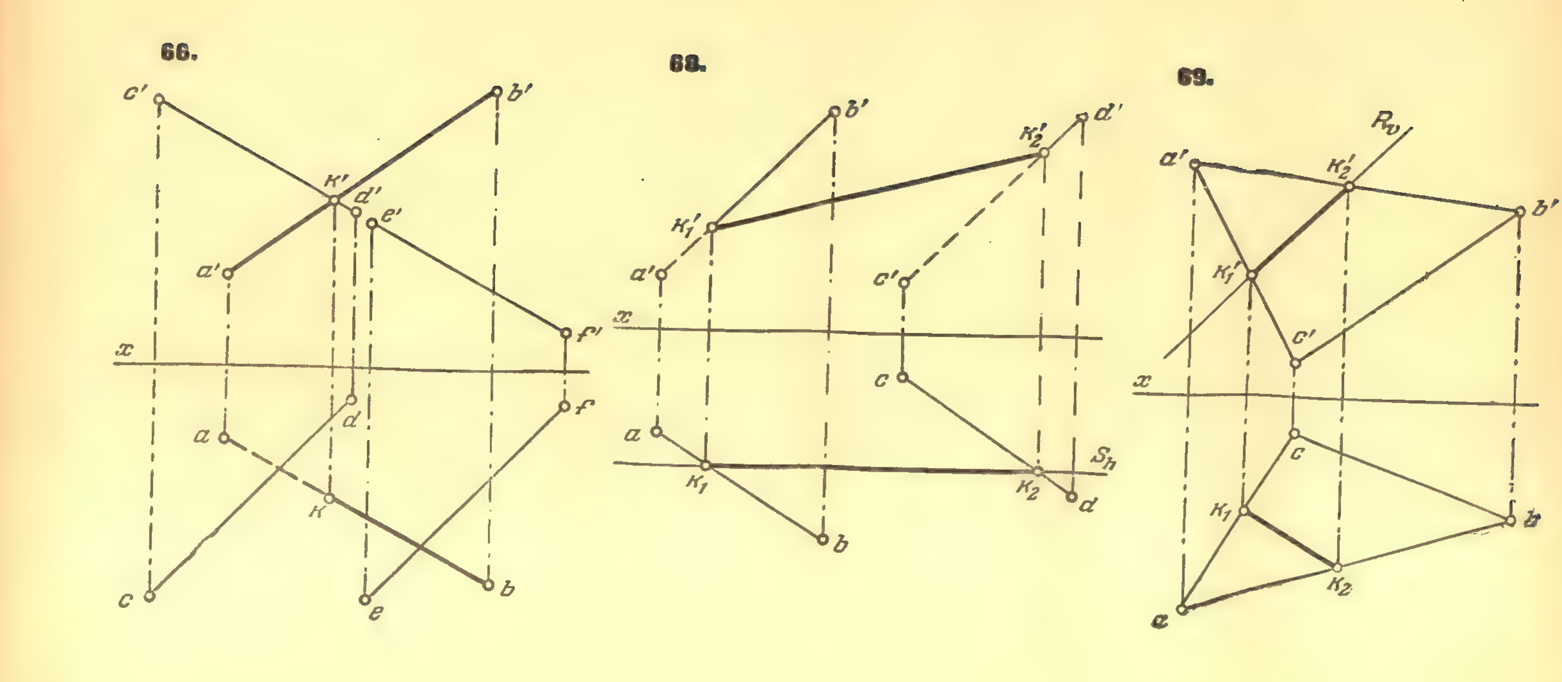

z
W
P_z
β
a''
P_v
P
P_w
N
A
b''
a'
O
B
α
P_y
y
V
b'
M
b
P_h
a
H
в)
x

60.

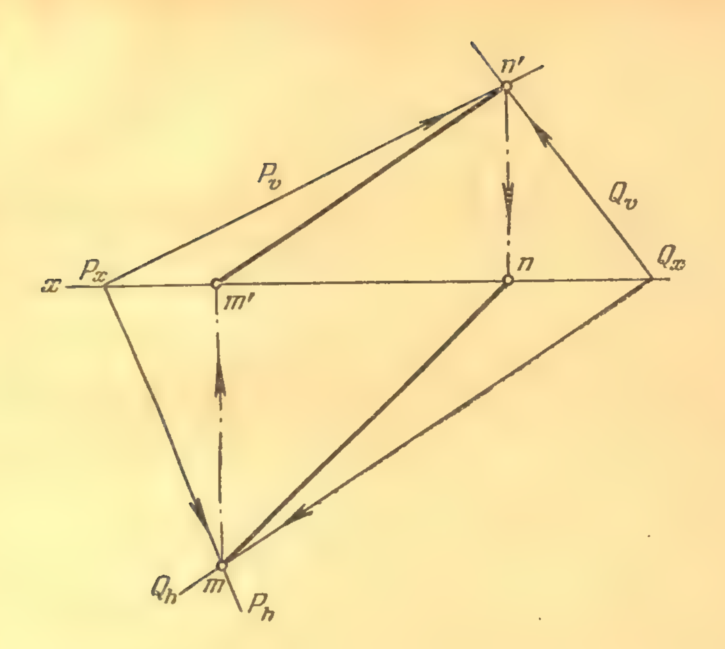

P_v
n'
к'
x
m'
n
к
m
P_h

62.

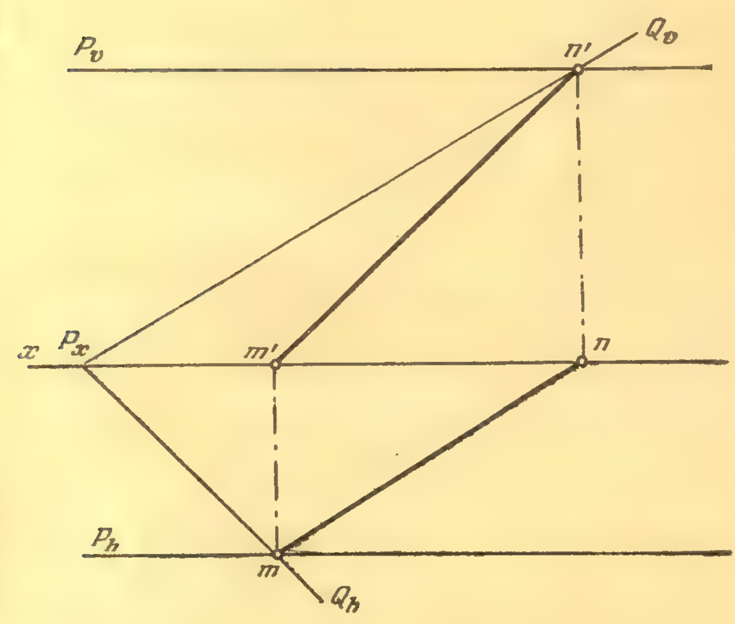

a'
к'
b'
x
a
S_h
к
b


66.
c'
b'
K'
d'
e'
a'
f'
x
a
d
f
K
c
e
b
68.
b'
d'
K_2'
K_1'
a'
c'
x
c
a
S_h
K_1
K_2
d
b
69.
R_v
a'
K_2'
b'
K_1'
c'
x
c
K_1
b
K_2
a

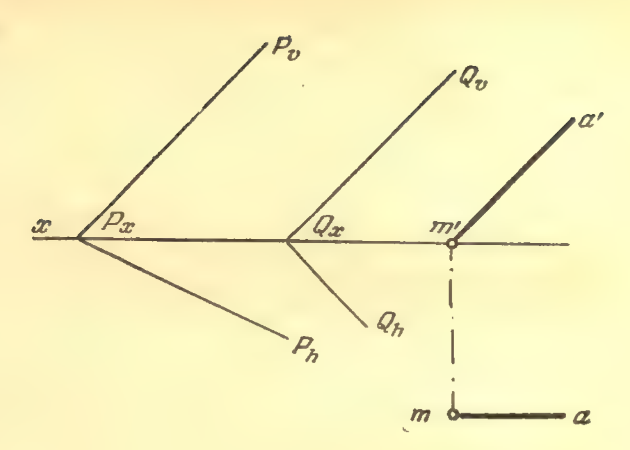
71.



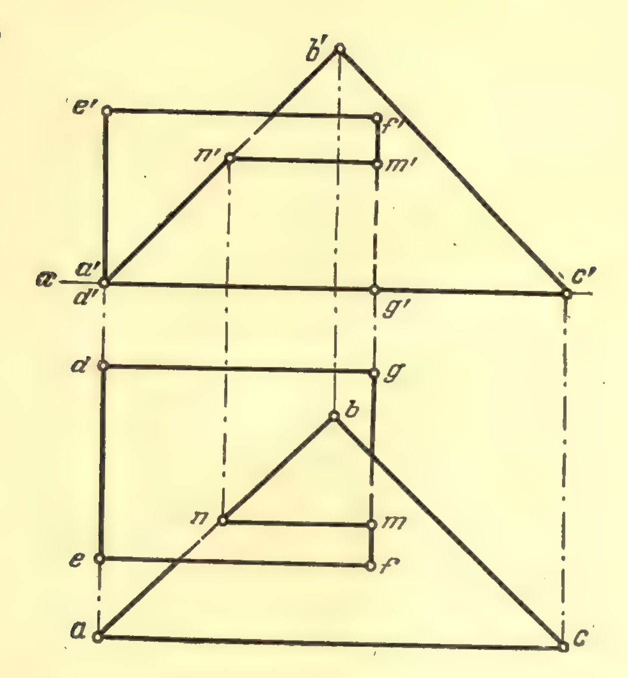
72.



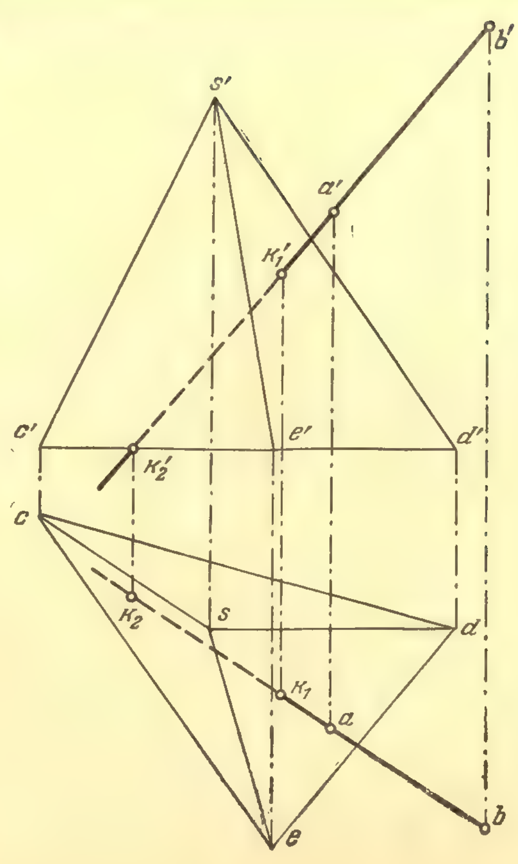
74.



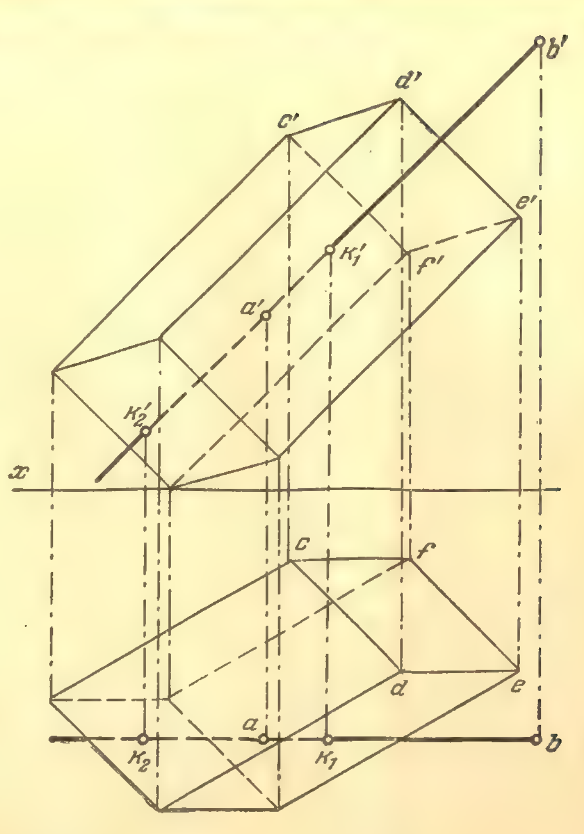
76.



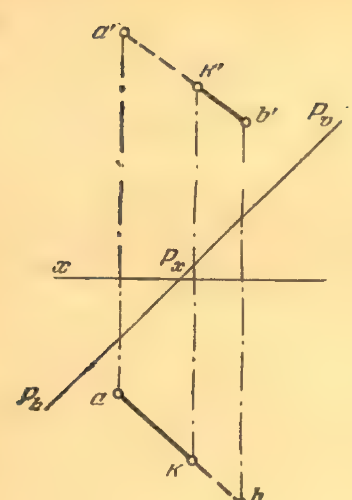
78.



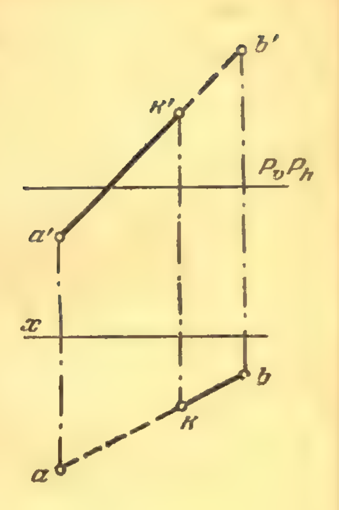
79.



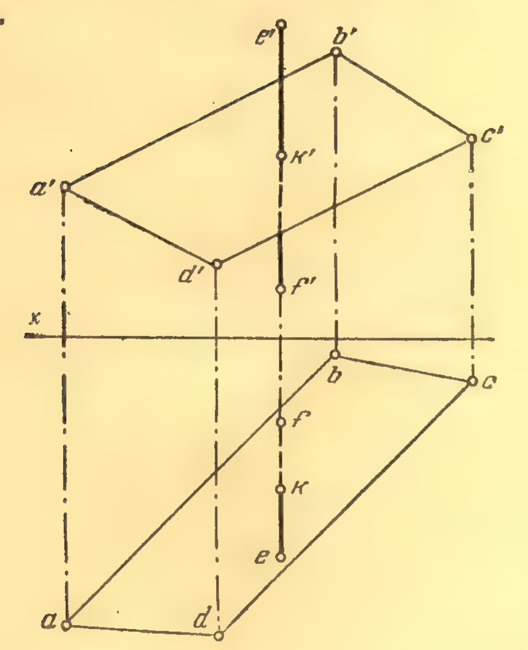
81.



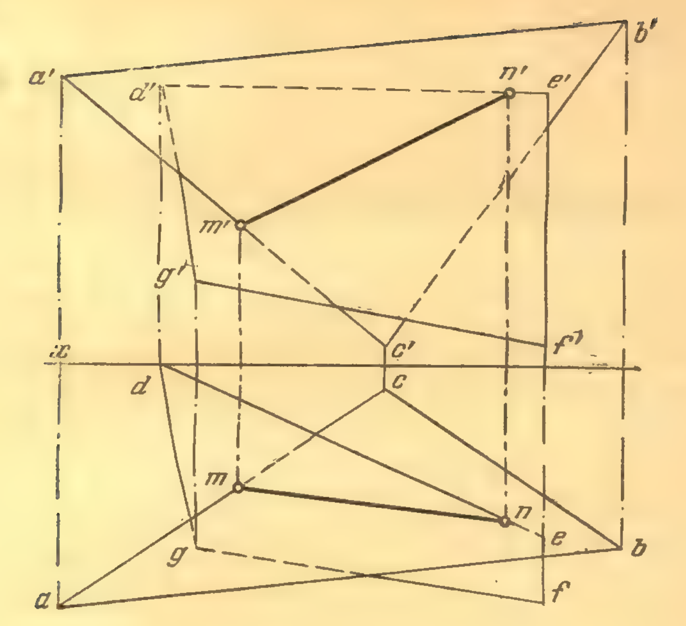
83.



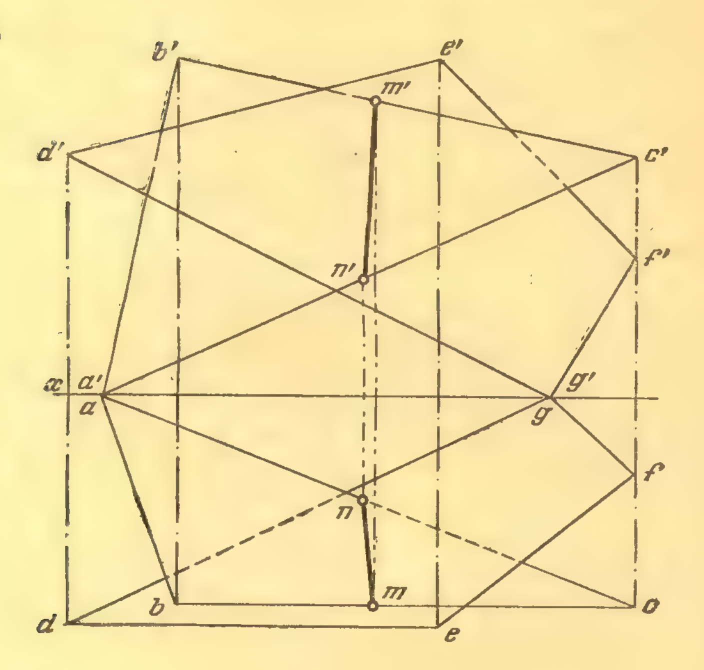
85.



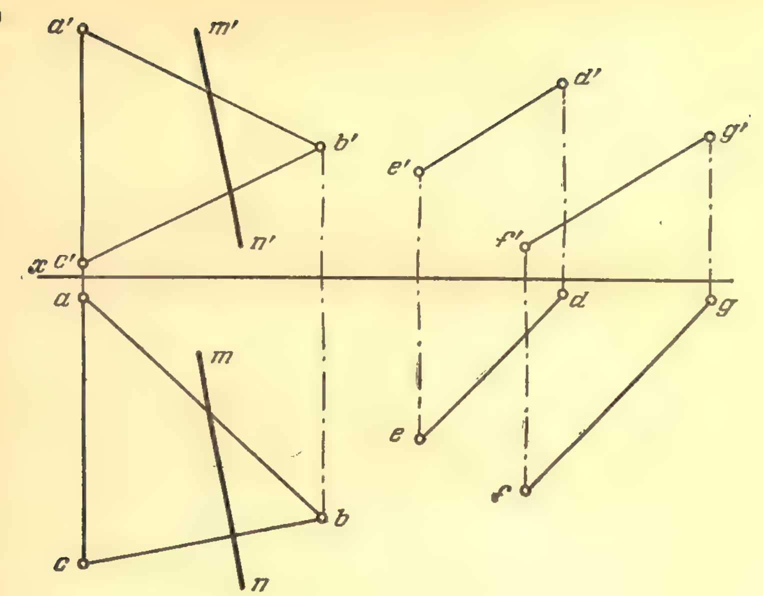
87.



88.

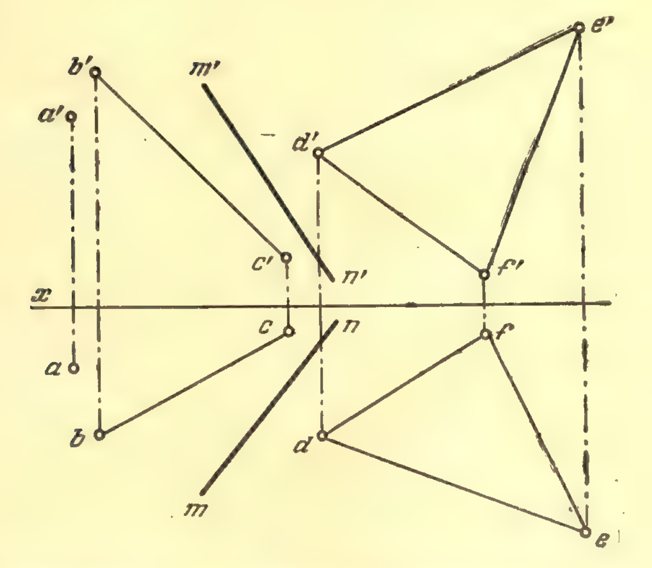


90



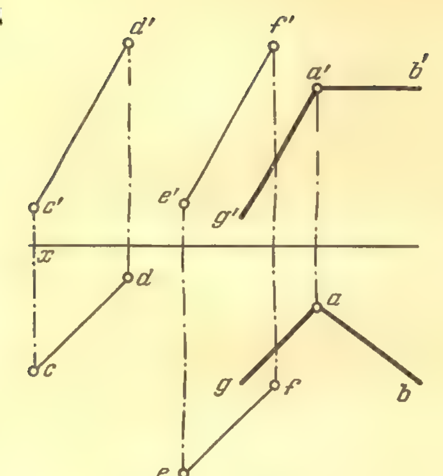


91.

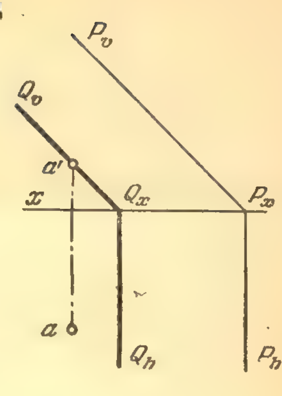


95. а) Параллельна, б) не параллельна, в) параллельна.

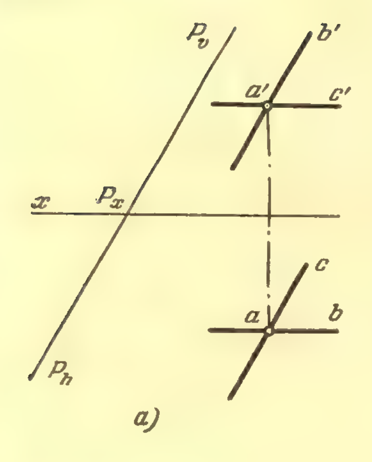
98.



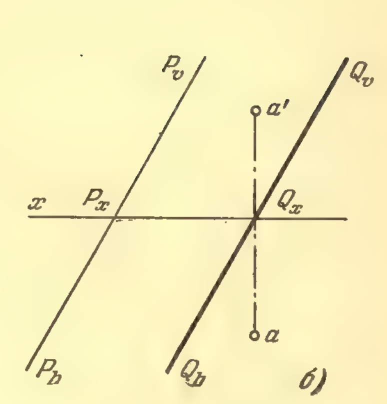
99.



100. а, б.



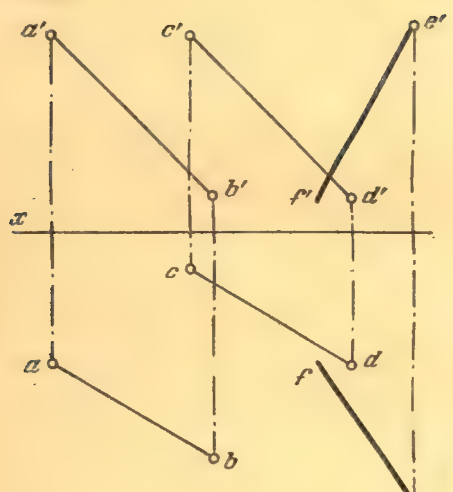
а)



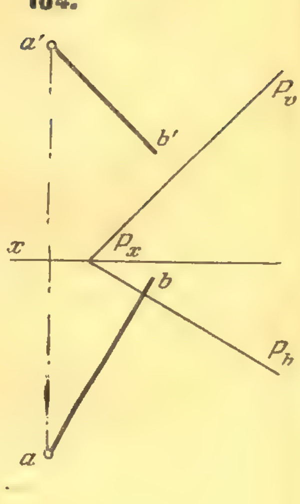
б)

101. Не параллельны.

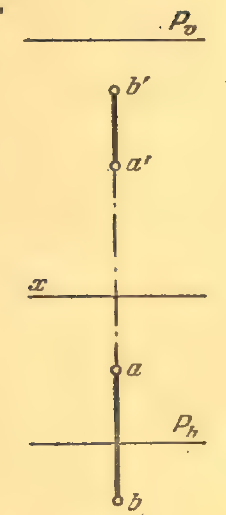




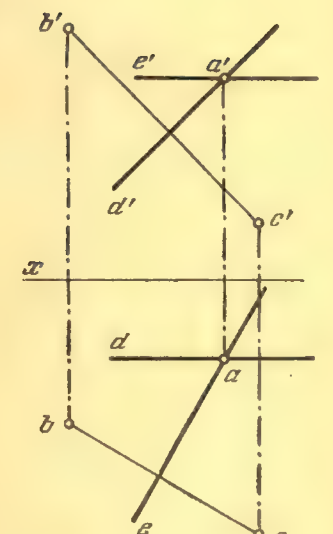
104.



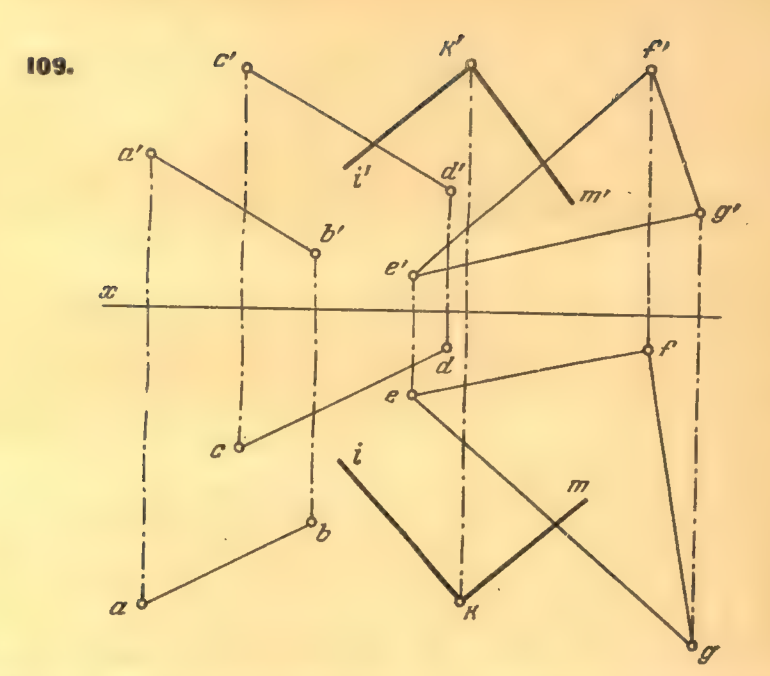
105.



107.



109.



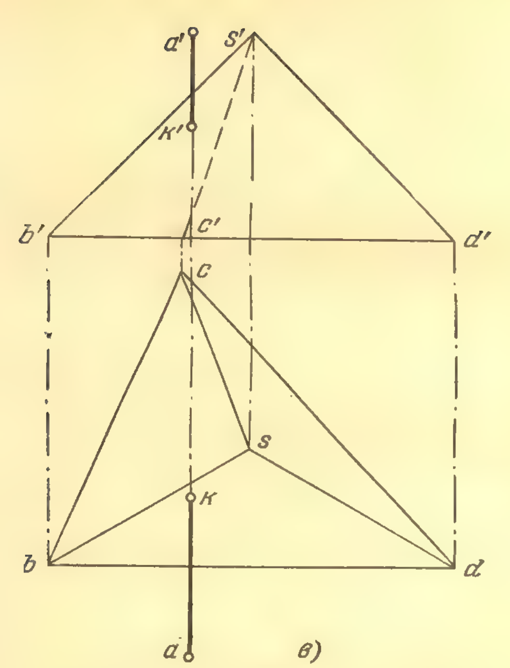
110. а) Плоскости перпендикулярны, б) плоскости не перпендикулярны.

112. а, б.

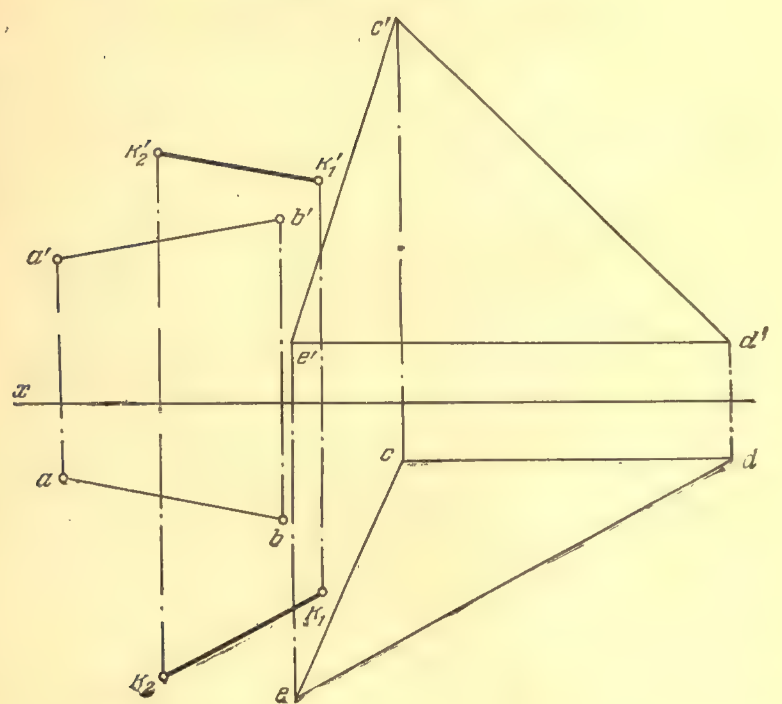
а)

б)

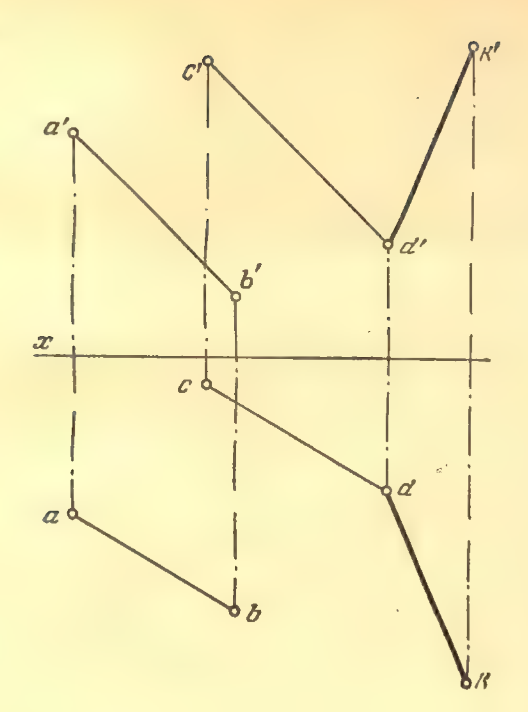
112. в.



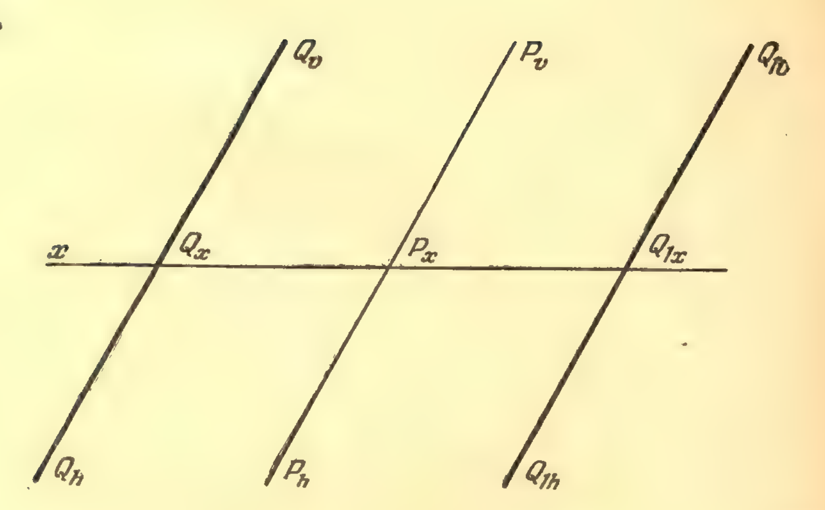
114.



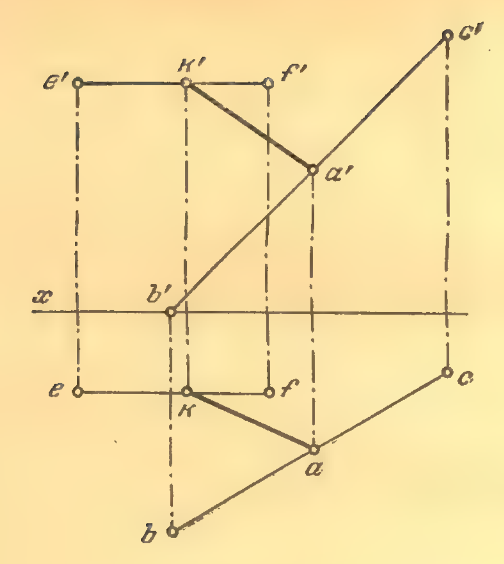
116.



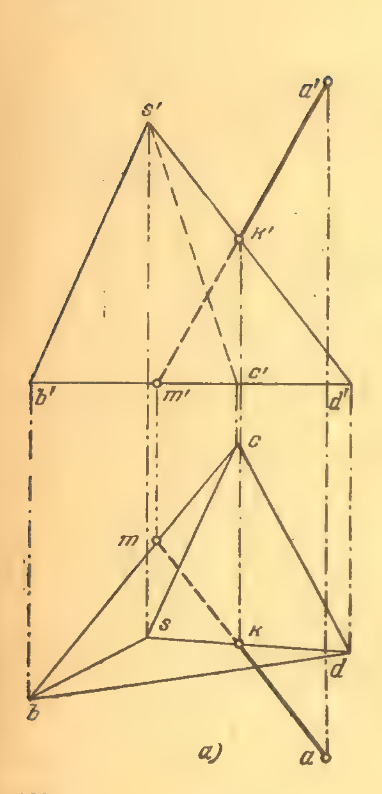
118.

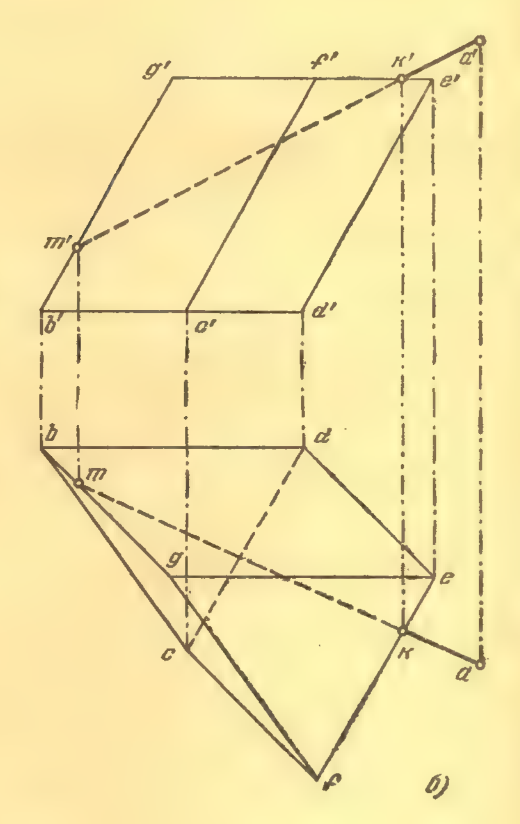


120.

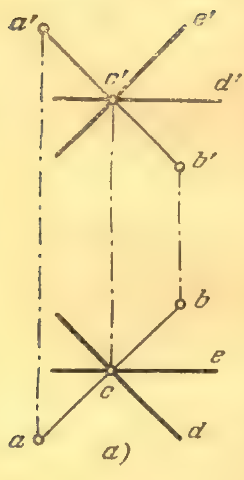


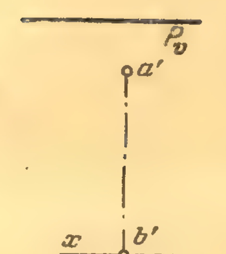
122. а, б.



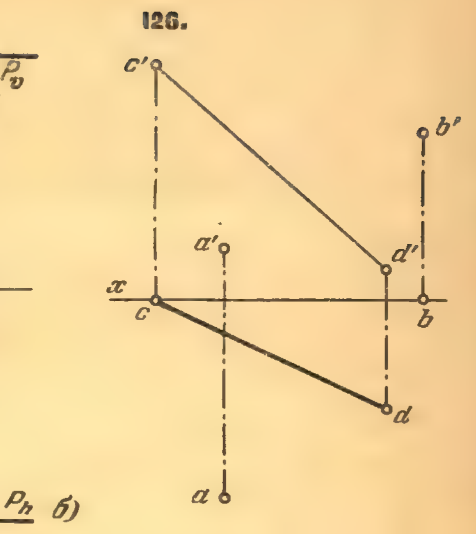


124.

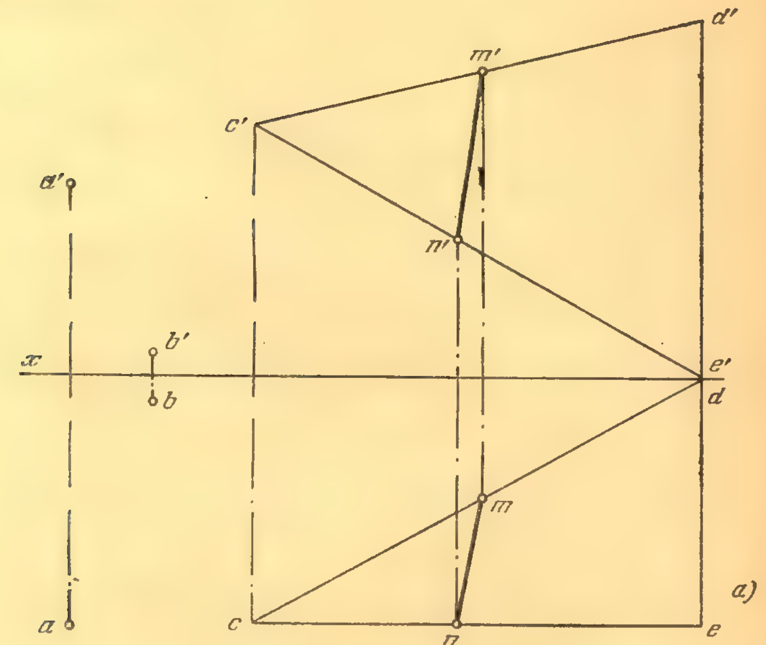




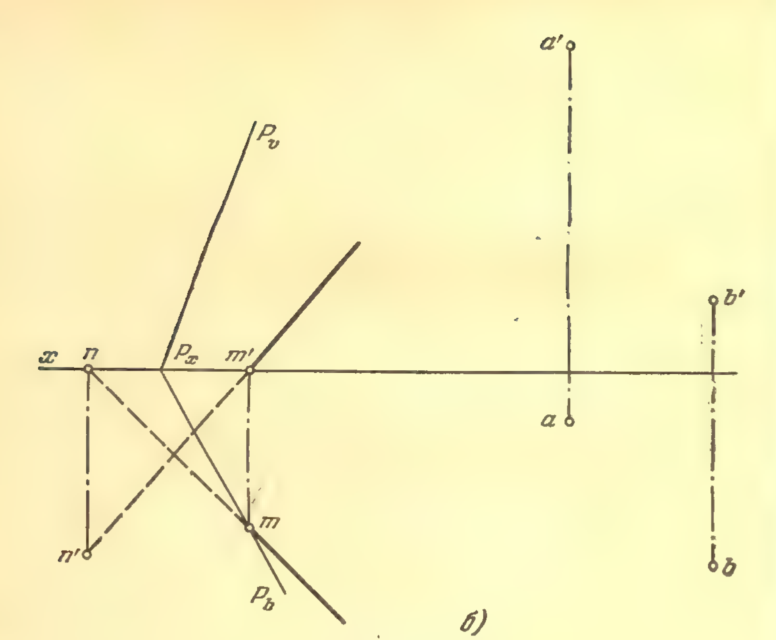
126.



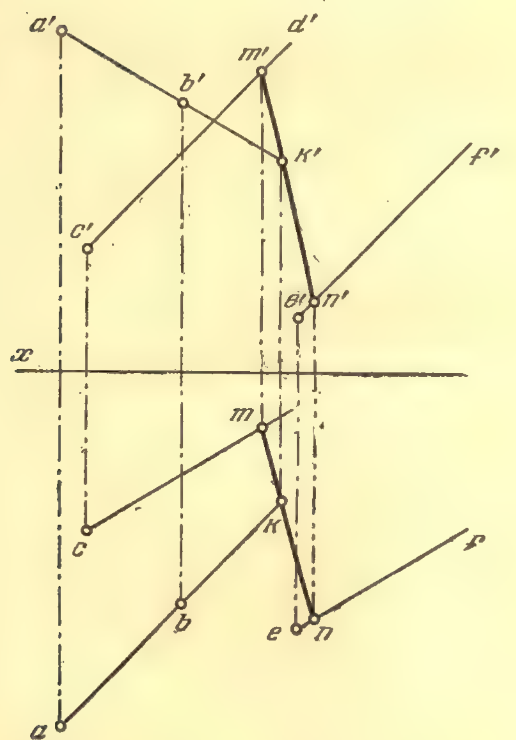
128.а.

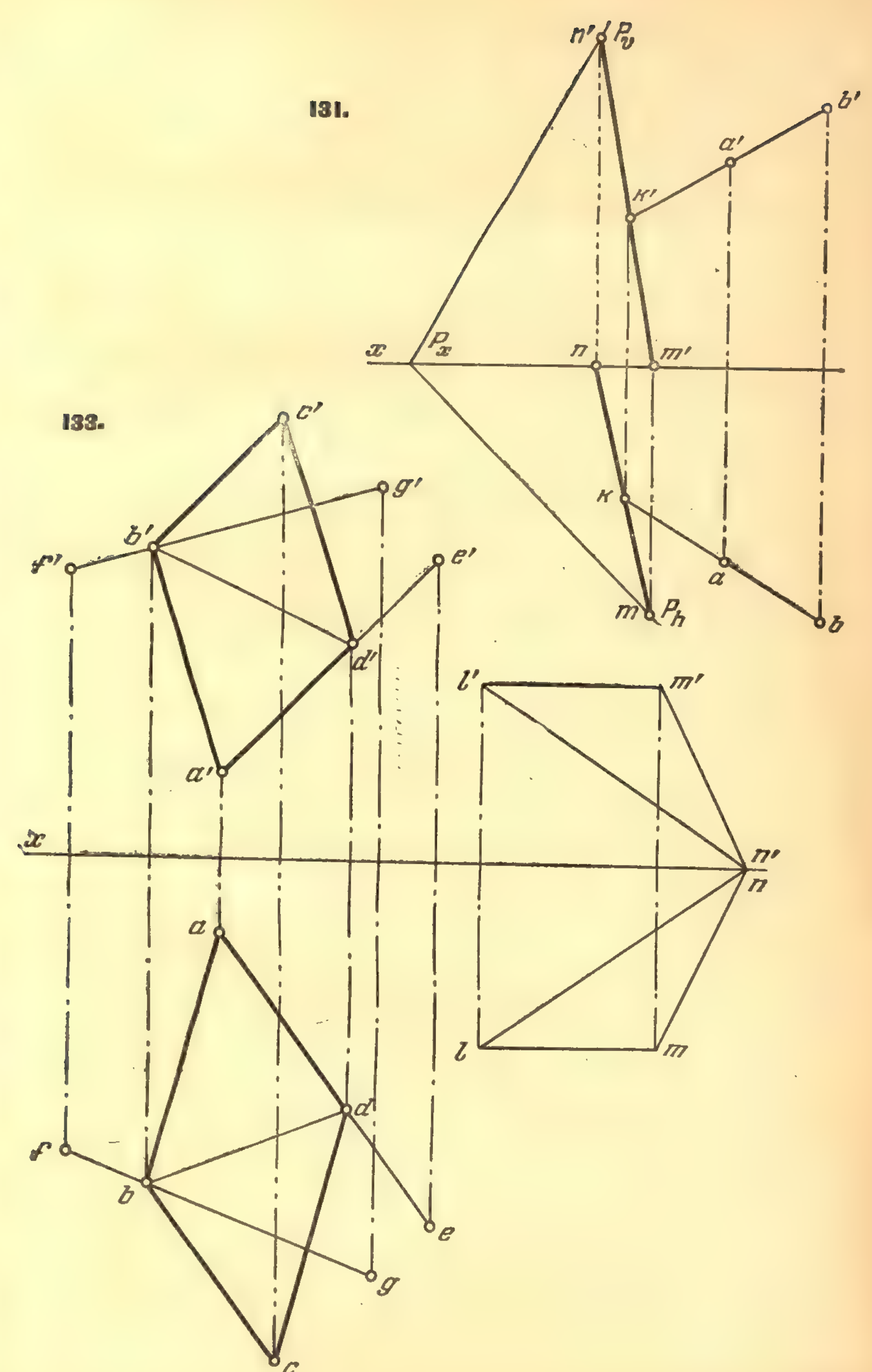


128. б.

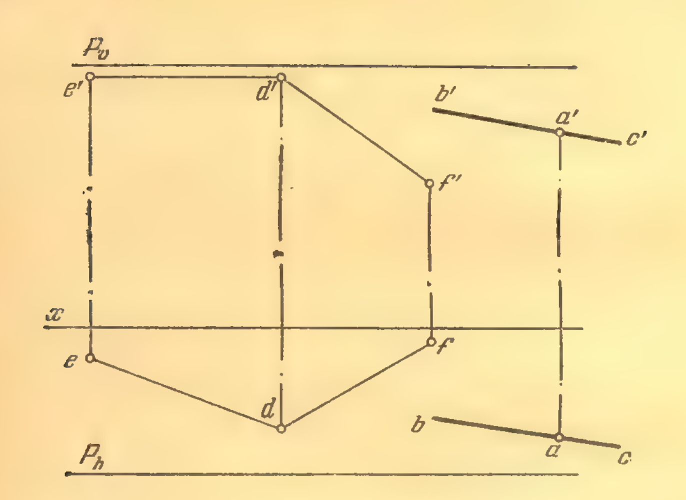



130.

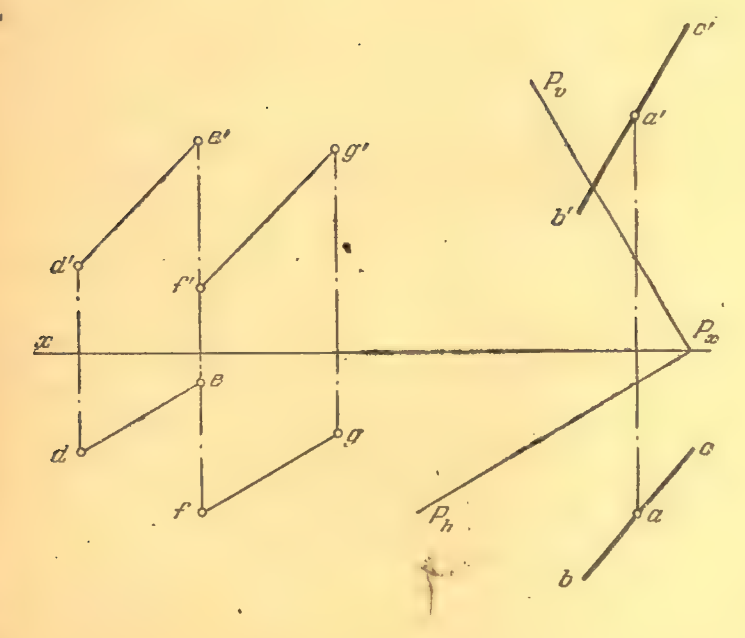



131.
n'
P_v
b'
a'
k'
x
P_x
n
m'
k
a
m
P_h
b
133.
c'
g'
b'
f'
e'
d'
l'
m'
a'
x
n'
n
a
d'
f
b
e
g
c
l
m

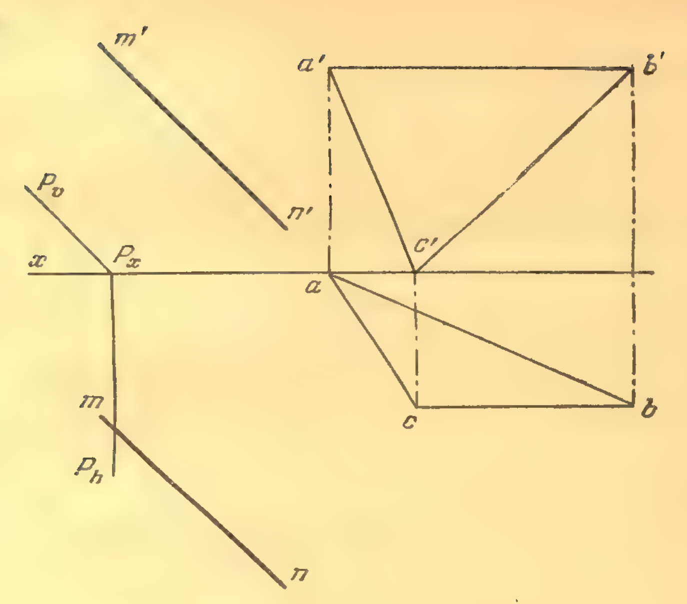
135.



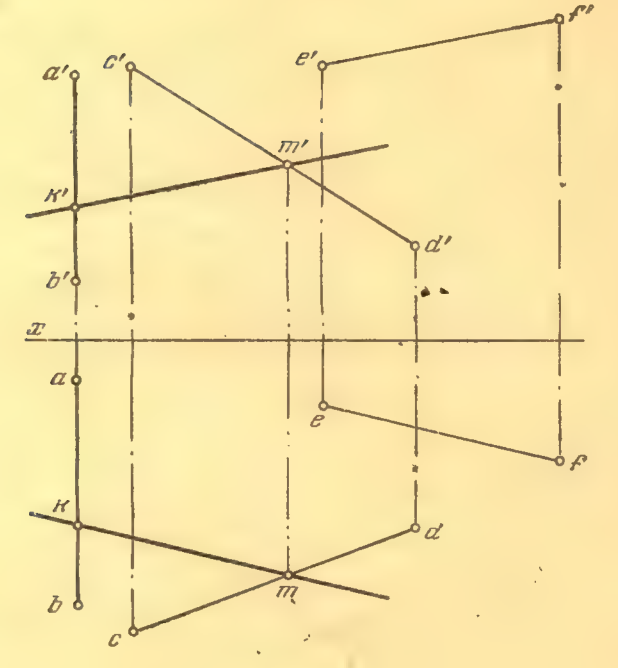
136.

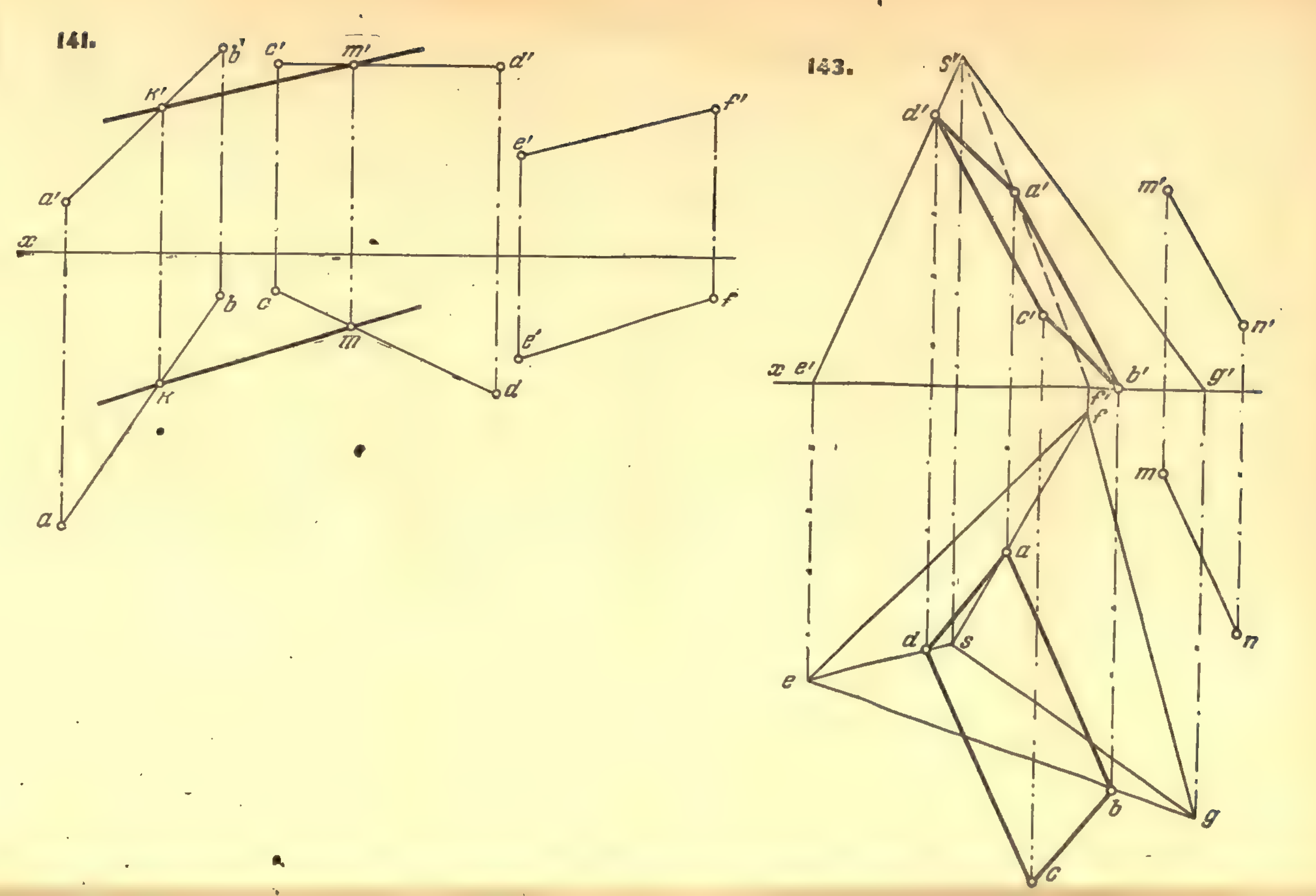


138.

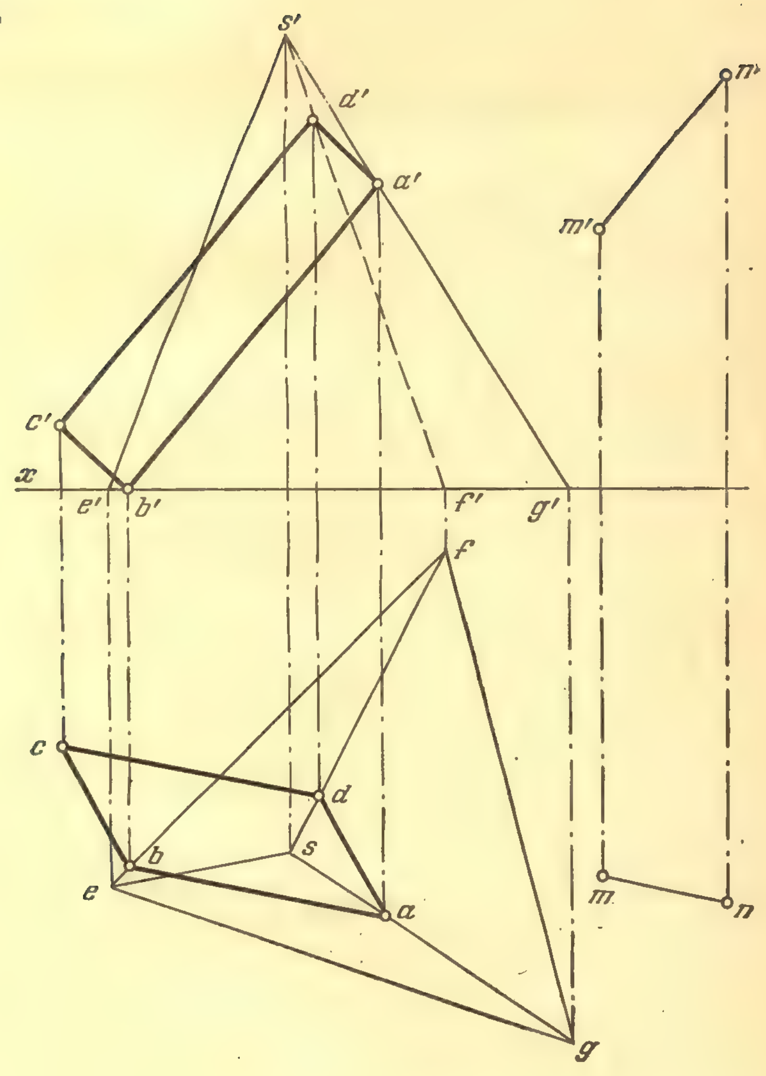


140.

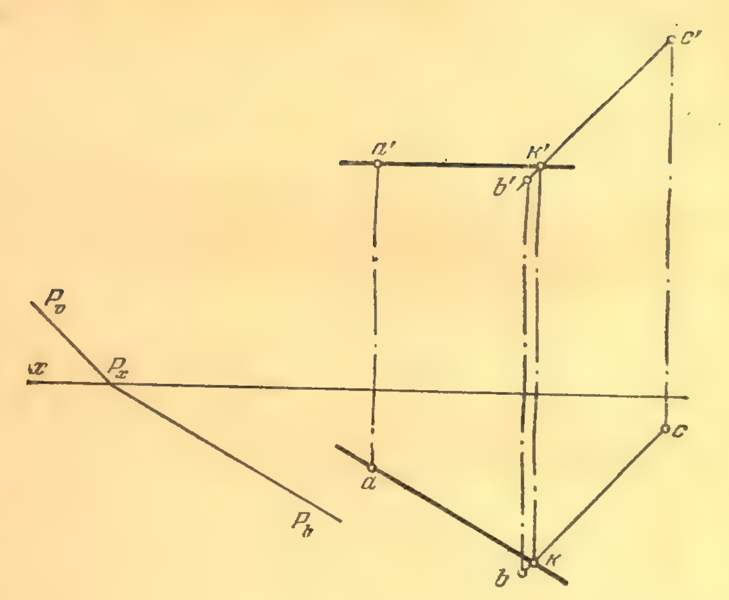



141.
a'
b'
c'
m'
d'
k'
e'
f'
x
a
b
c
m
d
k
e'
f
143.
s'
d'
a'
m'
c'
n'
x e'
b'
g'
f'
f
m
a
d
s
n
e
b
g
c

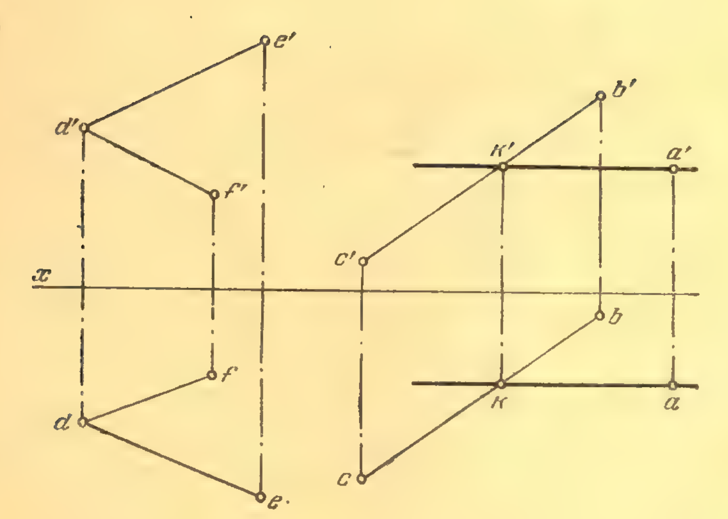
144.



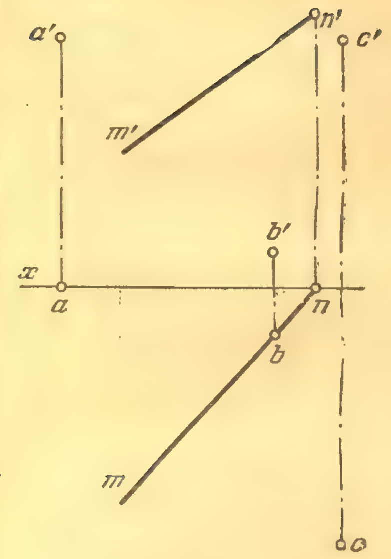
146.



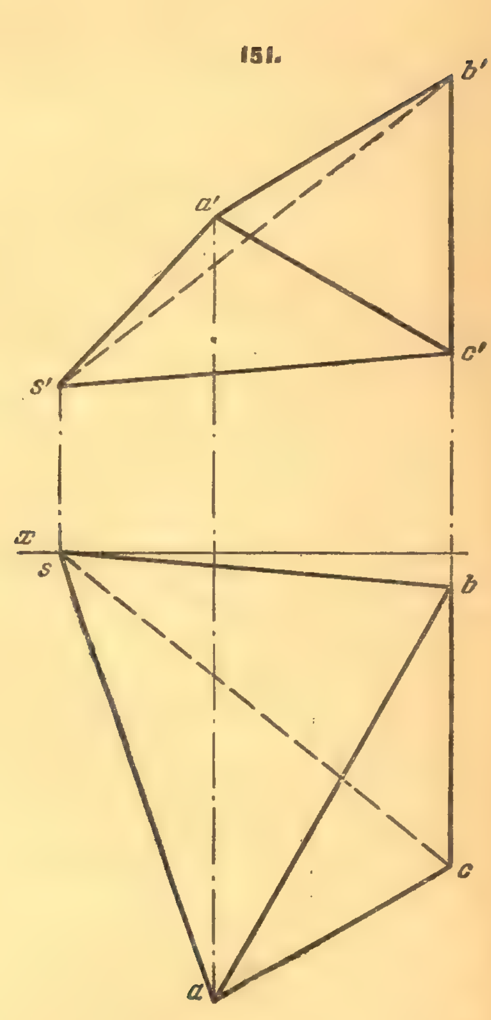
147.

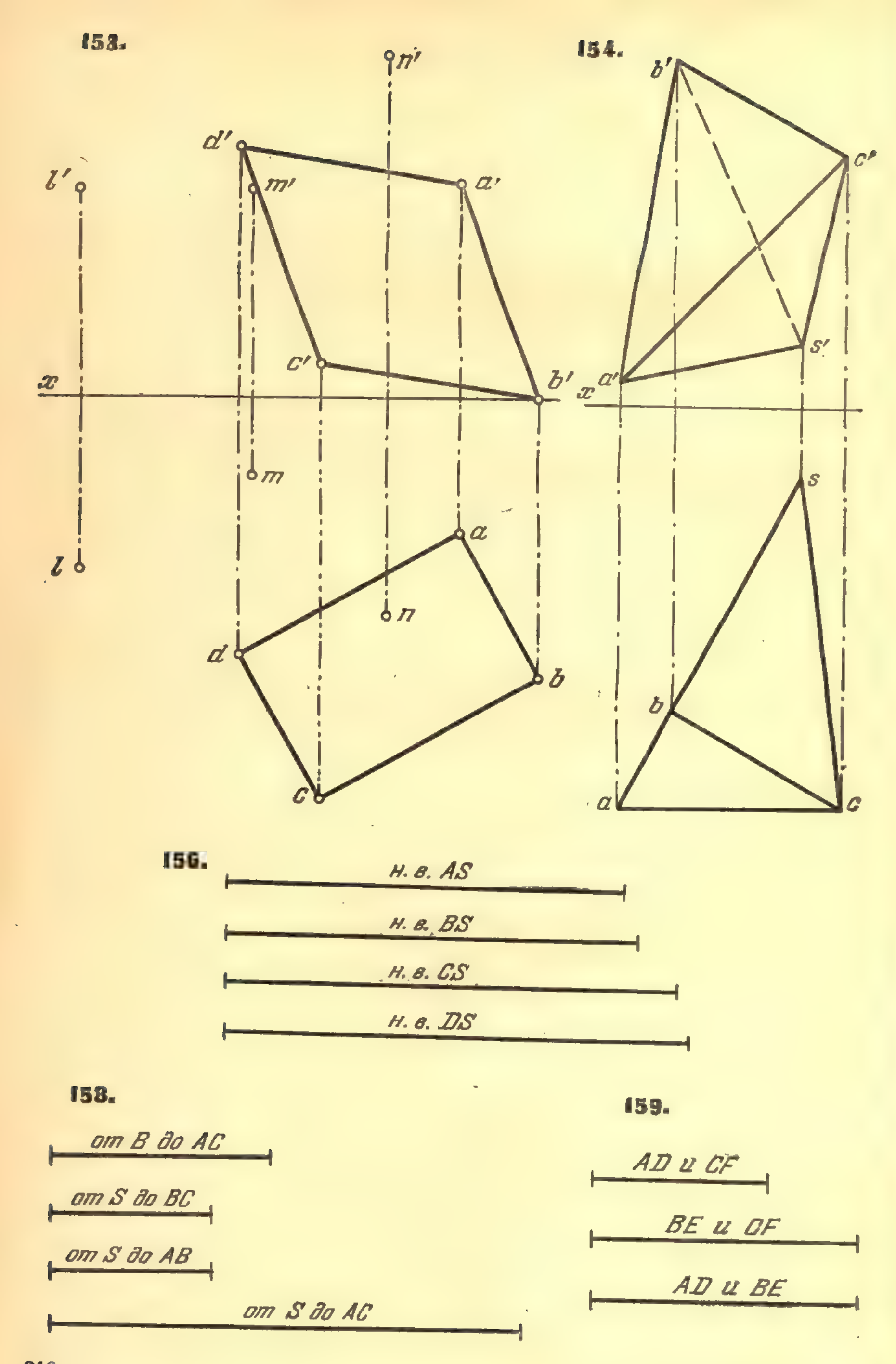


149.

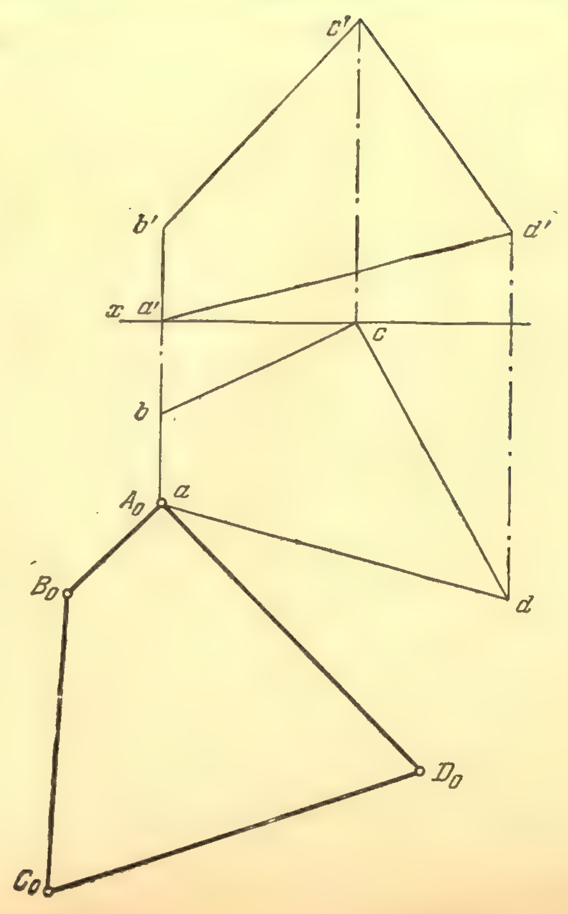


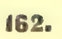
151.



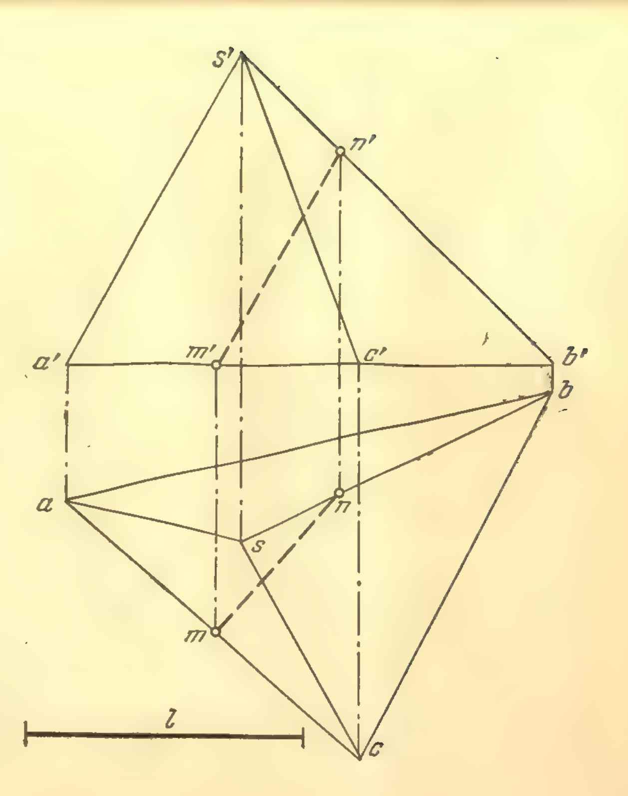

153.
154.
156.
н. в. AS
н. в. BS
н. в. CS
н. в. DS
158.
от B до AC
от S до BC
от S до AB
от S до AC
159.
AD и CF
BE и DF
AD и BE

160.

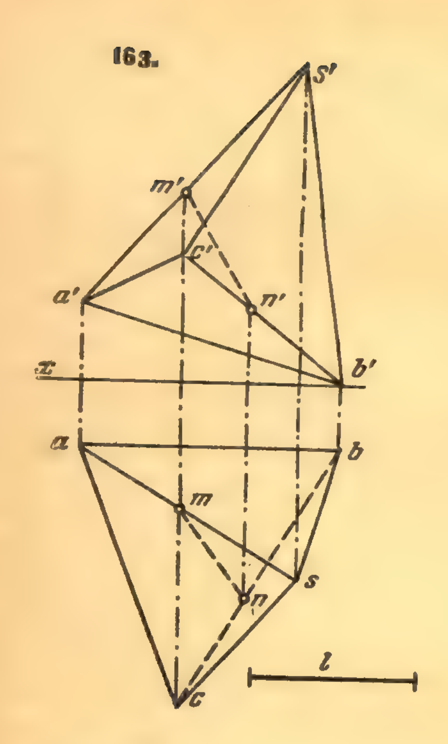




162.



163.



165.

l

166.

l

168.

l

170.

l_1

l_2

l_3

172.

Ребро	Угол	
	α	β
AS	70°	9°
BS	65°	24°
CS	50°30′	14°
DS	53°30′	29°

174.

Грань	Угол	
	α	β
SAB	57°	22°30′
SAC	51°30′	72°
ABC	24°30′	73°

175.

Грань	Угол	
	α	β
ABCD	—	30°
CDHG	—	58°
ADEH	45°30′	—

177. $\angle ASB = 17°30'$, $\angle BSC = 20°$, $\angle CSA = 37°30'$.

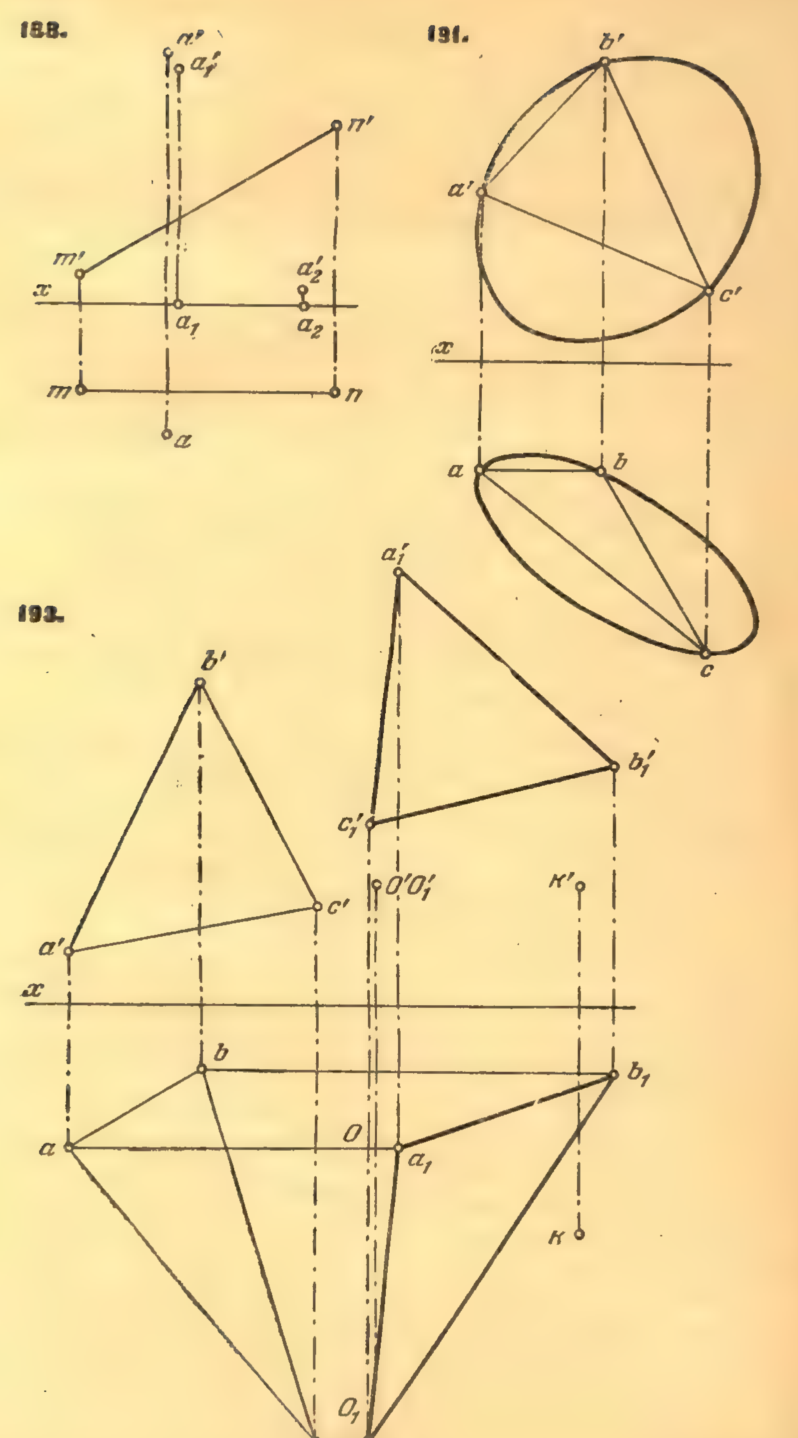
178. $\angle HCD = 131°$, $\angle CDG = 49°$, $\angle BAC = 61°30'$.

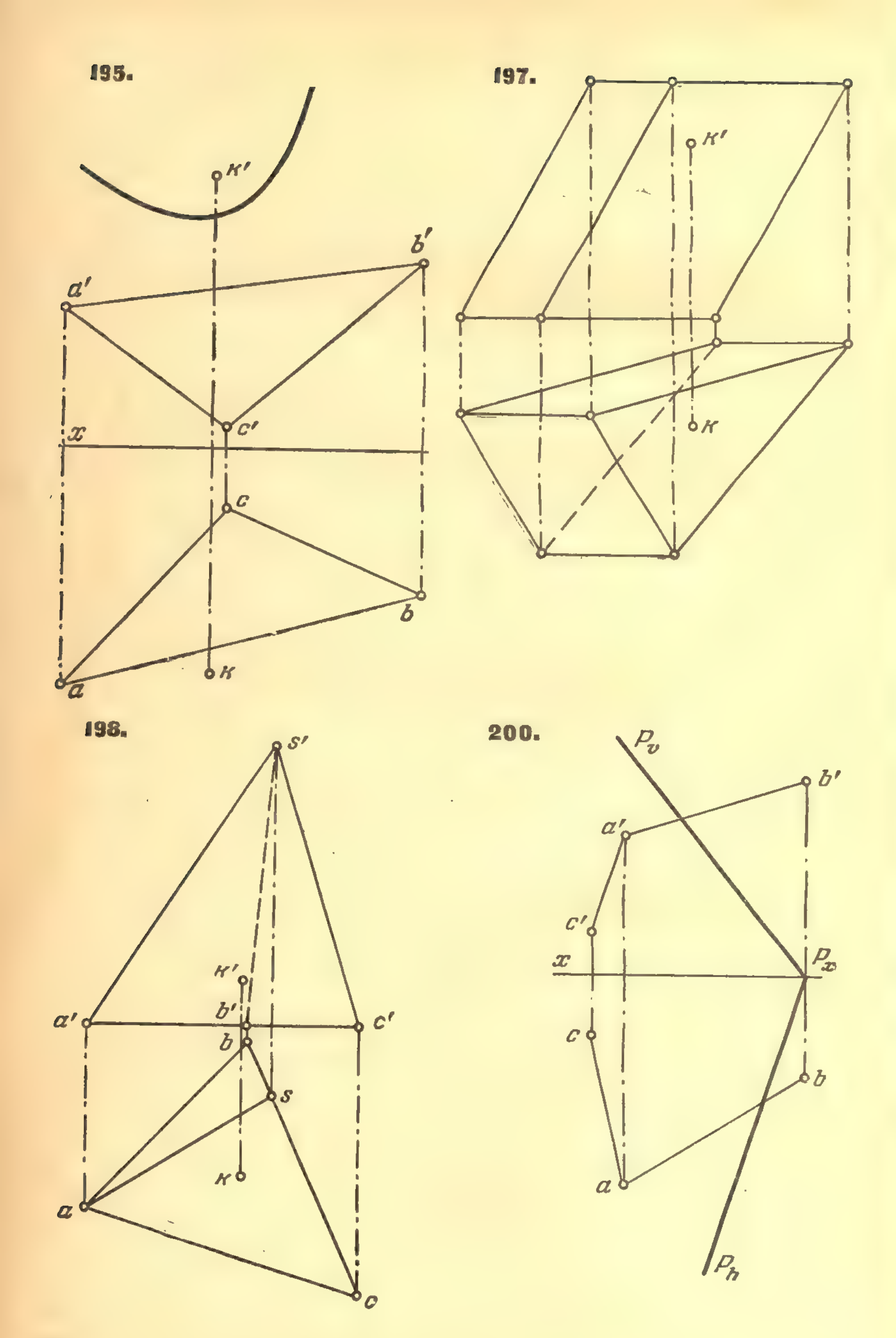
180. а) 73°; б) 82°.

182. Угол, который грань *ABC* образует с ребром *AS*, равен 46°, с ребром *BS*—46°, с ребром *CS*—70°.

185. Угол между гранями *SAB* и *SBC* равен 108°, между *SBC* и *SCD* равен 104°, между *SAD* и *SAB* равен 89°.

186. Угол между гранями *CDHG* и *EFGH* равен 28°, между *BCGF* и *CDHG* равен 24°.

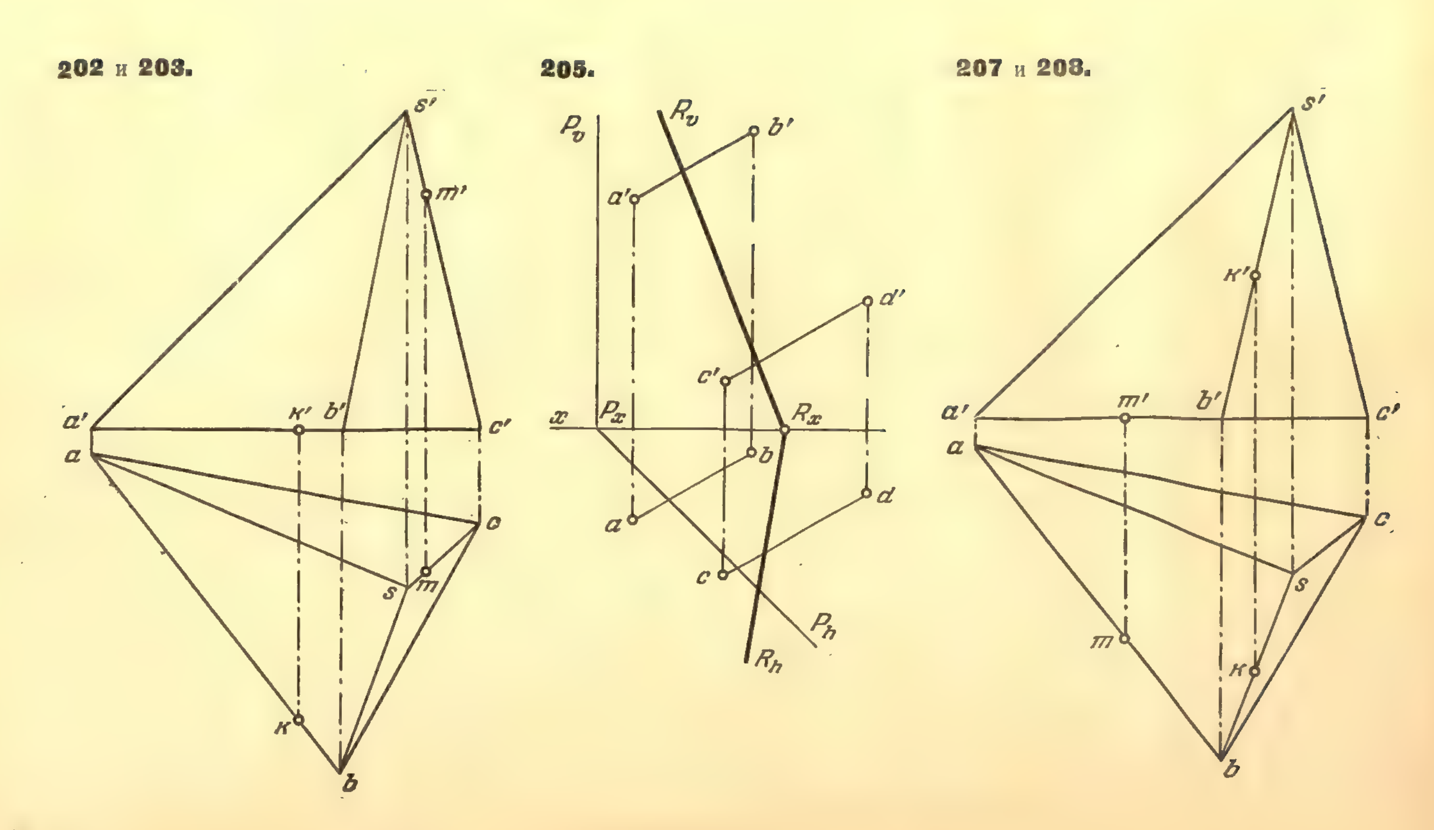

188.
191.
193.
a′
a_1'
n′
m′
x
a_2'
a_1
a_2
m
n
a
b′
a′
c′
x
a
b
c
a_1'
b′
b_1'
c_1'
c′
a′
$0'0_1'$
к′
x
b
b_1
a
0
a_1
к
0_1
c
c_1

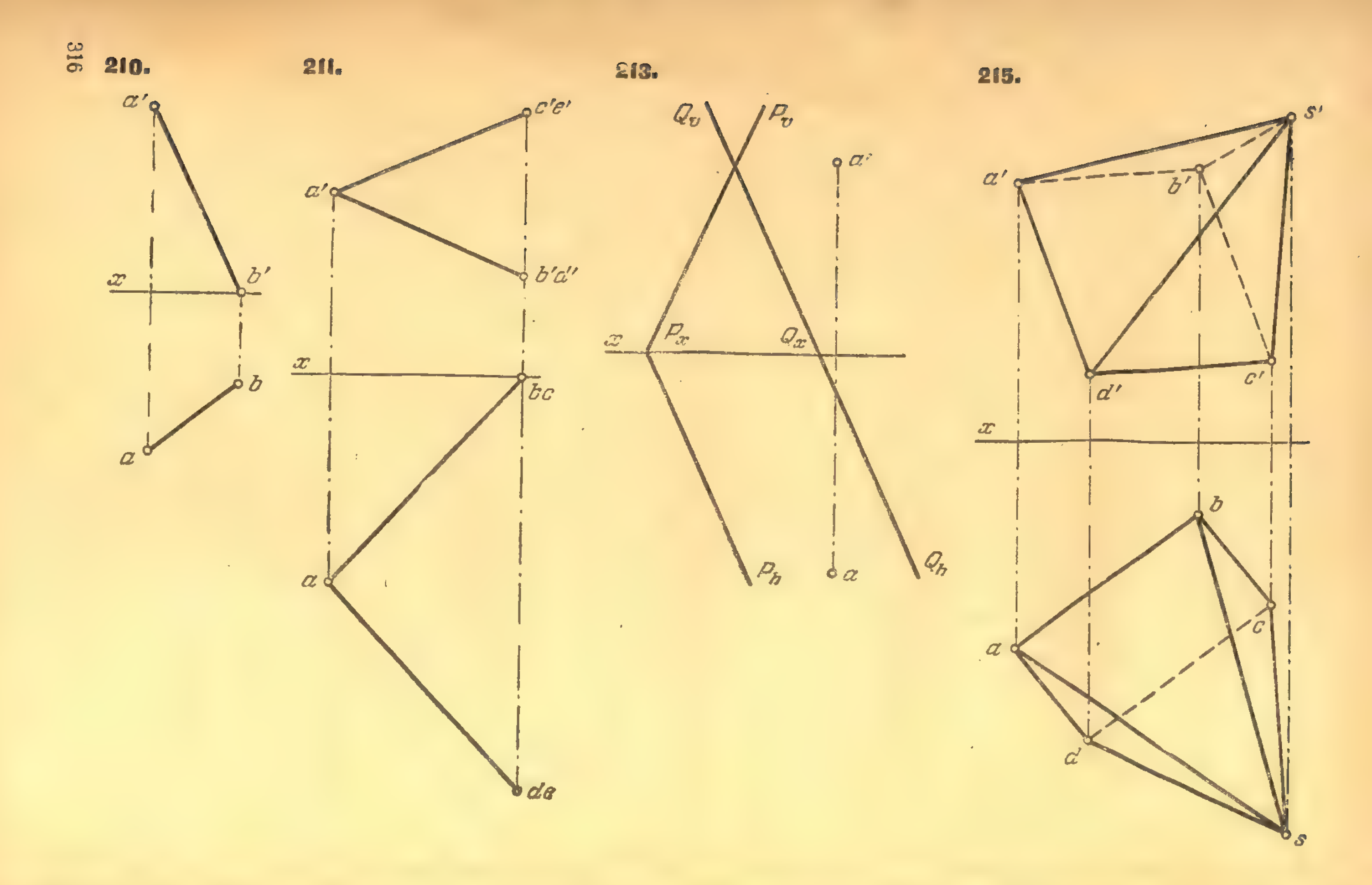

195.
к'
a'
b'
x
c'
c
b
a
к
197.
к'
к
198.
s'
к'
a'
b'
c'
b
s
к
a
c
200.
P_v
b'
a'
c'
x
P_x
c
b
a
P_h

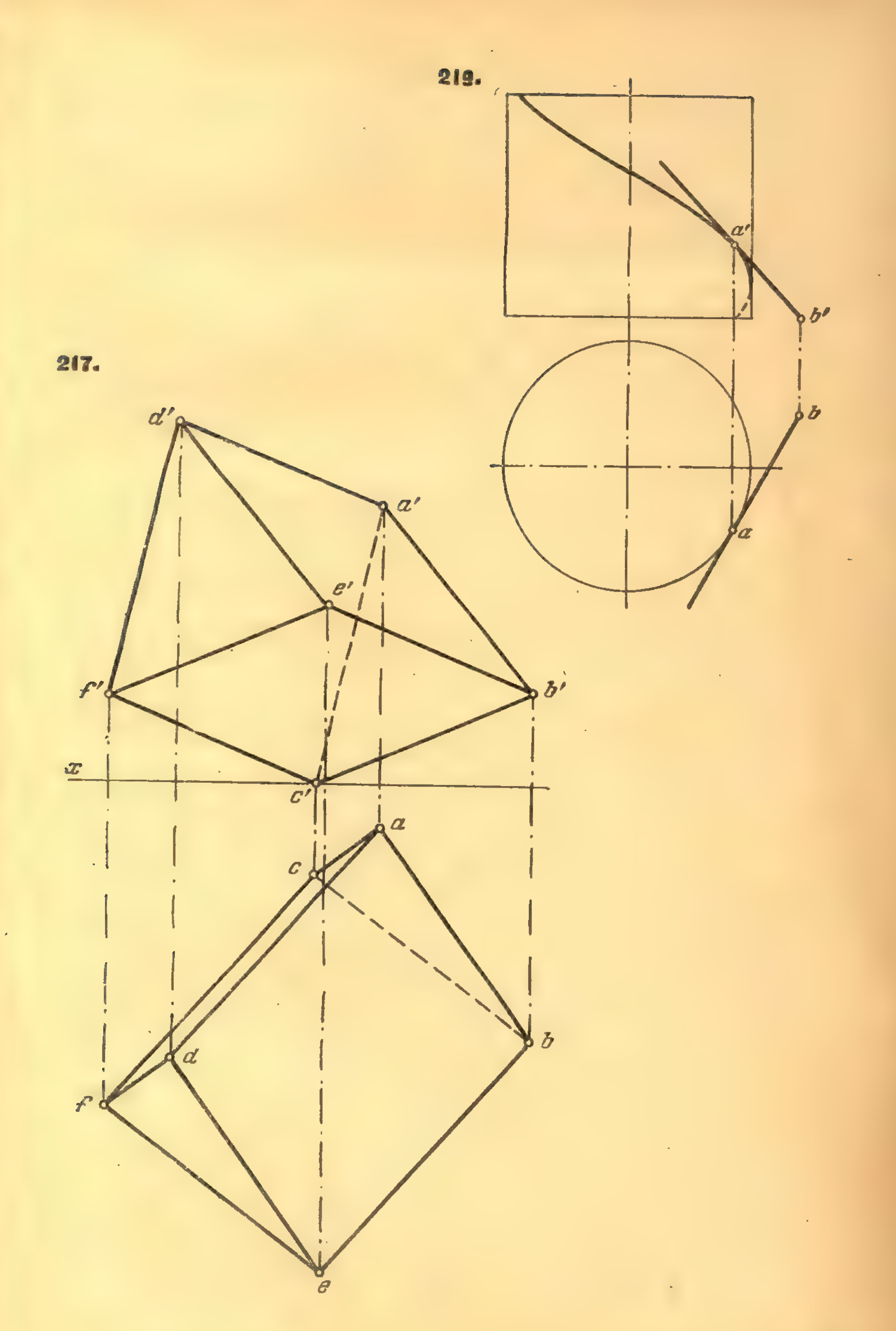
202 и 203.

205.

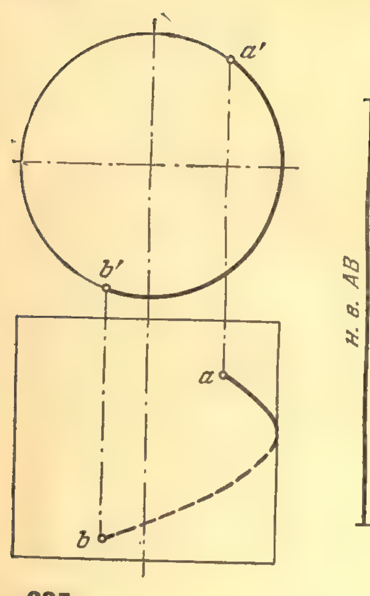
207 и 208.

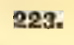


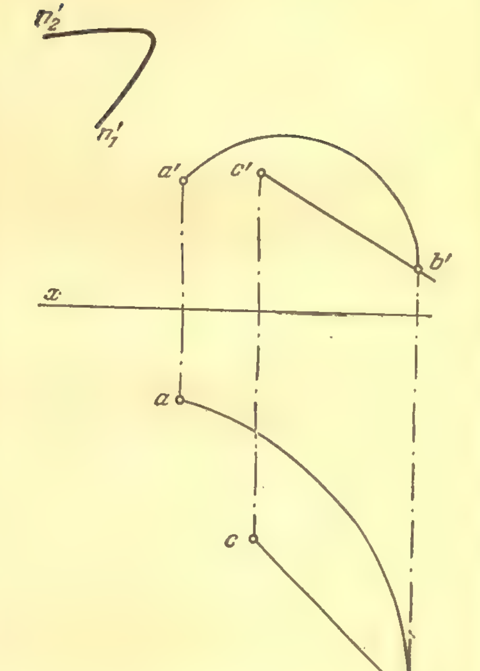

210.
a'
b'
x
b
a
211.
c'e'
a'
b'd''
x
bc
a
de
213.
Q_v
P_v
a'
x
P_x
Q_x
P_h
a
Q_h
215.
s'
a'
b'
d'
c'
x
b
c
a
d
s


219.
a'
b'
b
a
217.
d'
a'
e'
f'
b'
x
c'
a
c
b
d
f
e

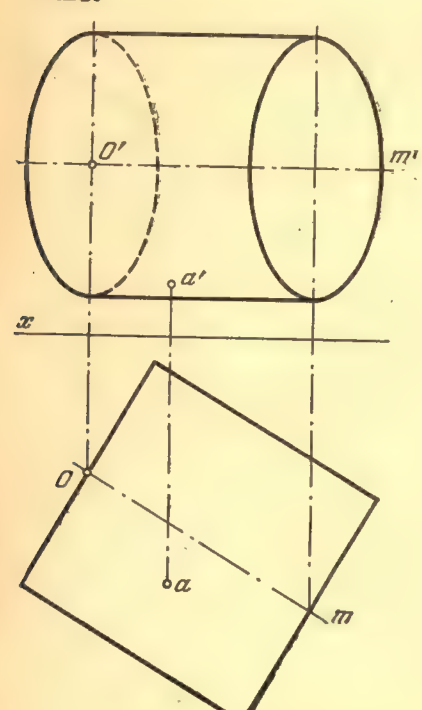
221.

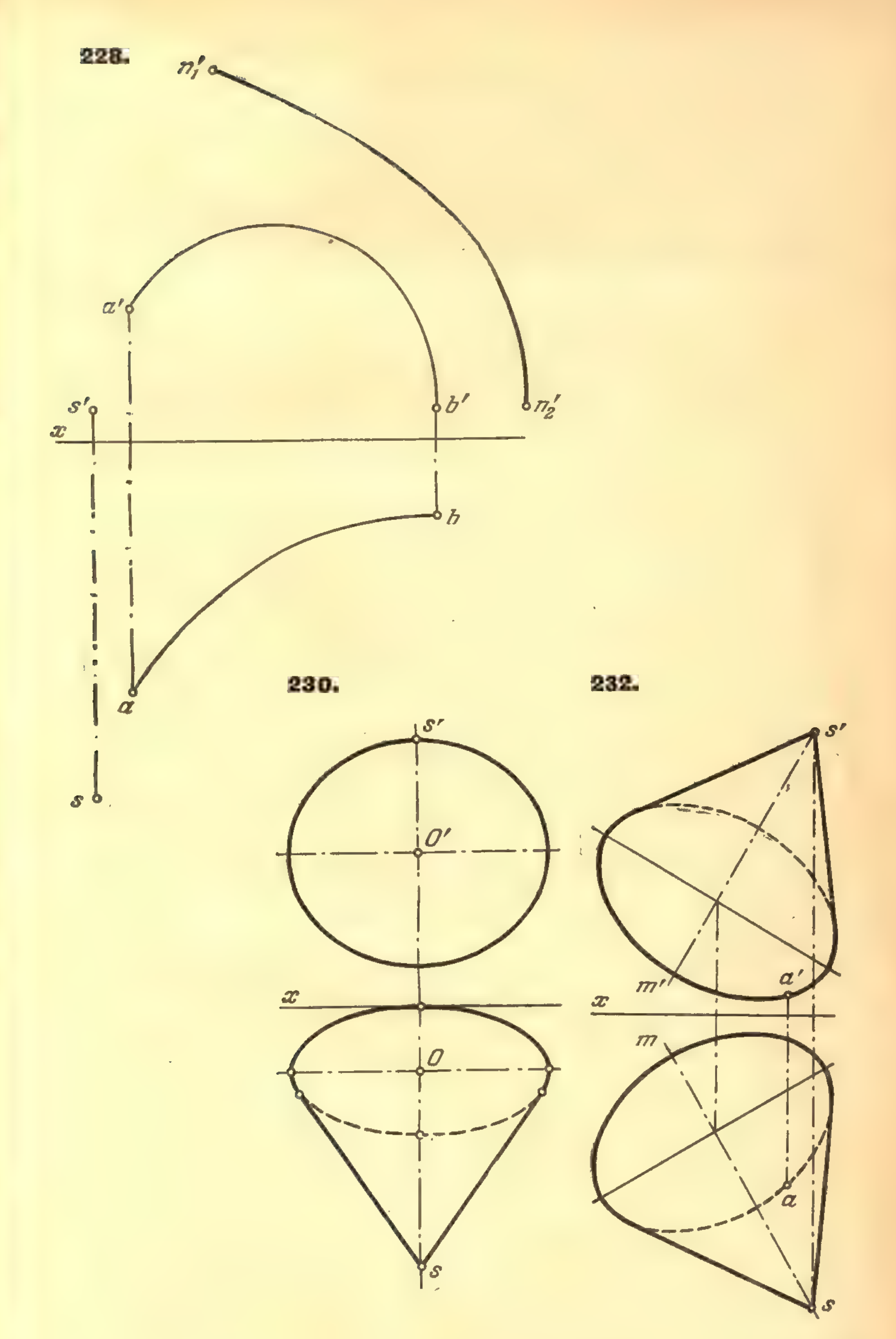






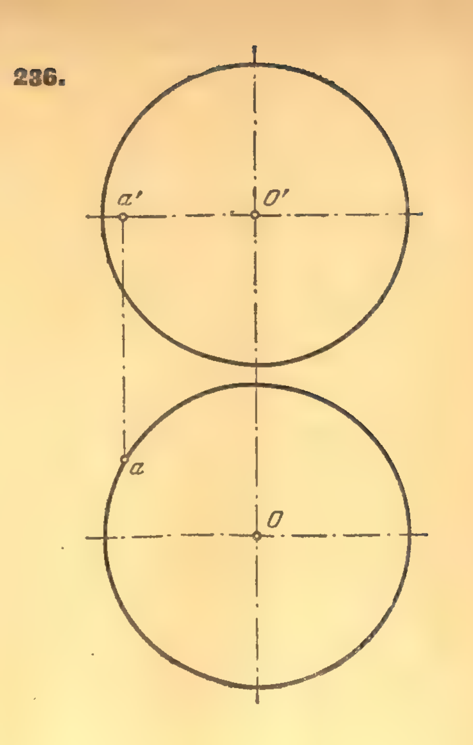
225.

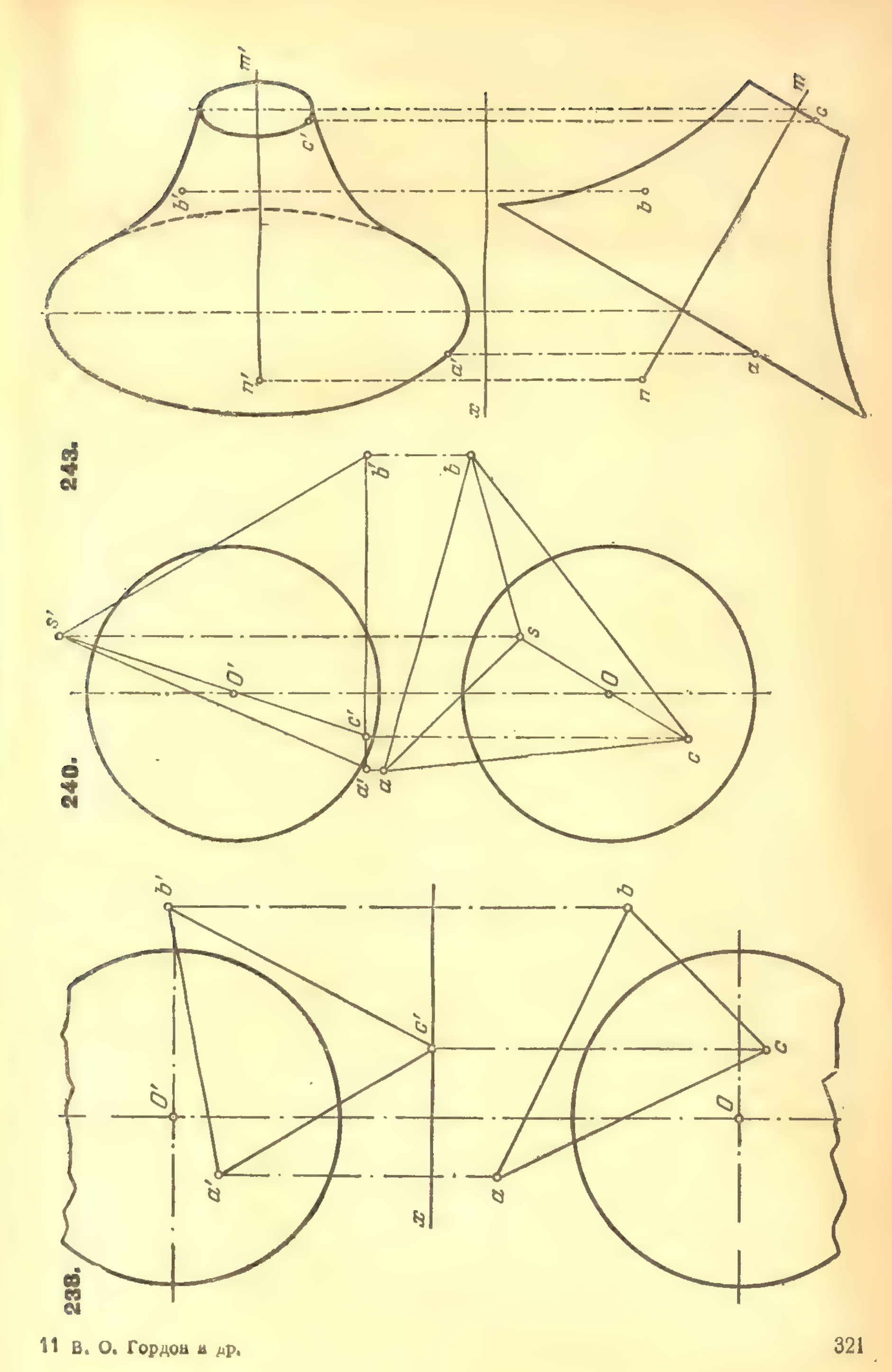



228.
n_1'
a'
b'
n_2'
s'
x
b
a
s
230.
s'
O'
x
O
s
232.
s'
m'
a'
x
m
a
s

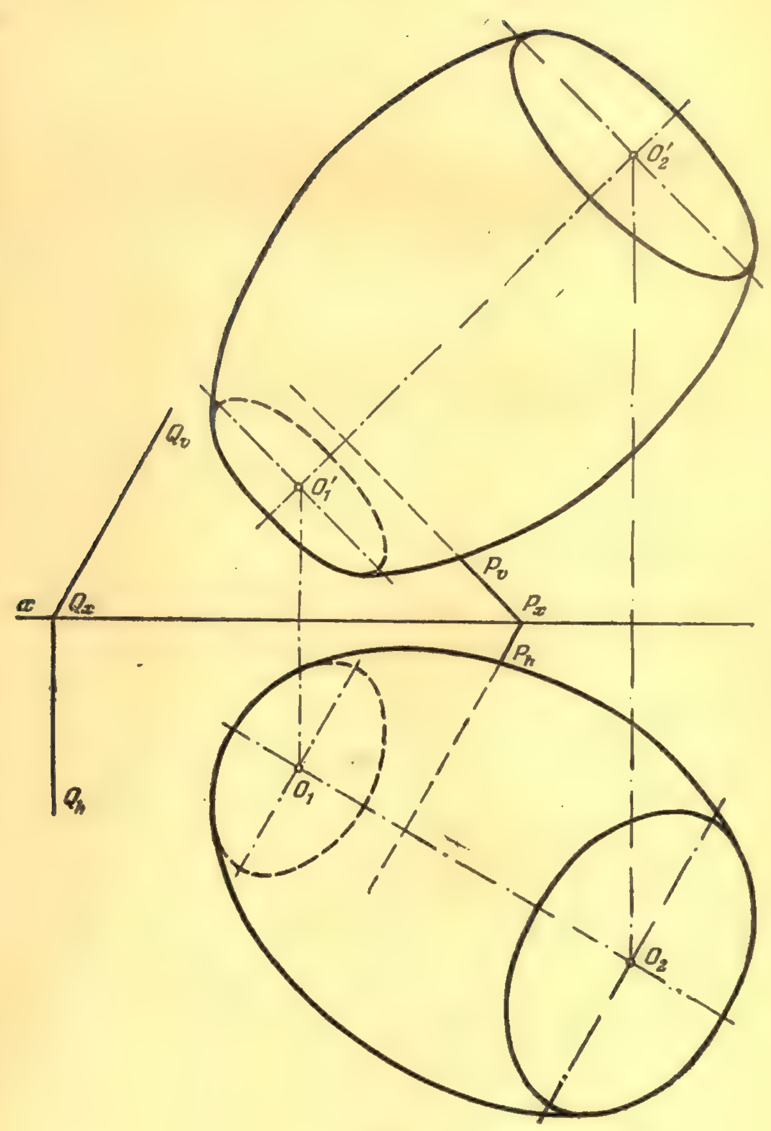
234.

236.

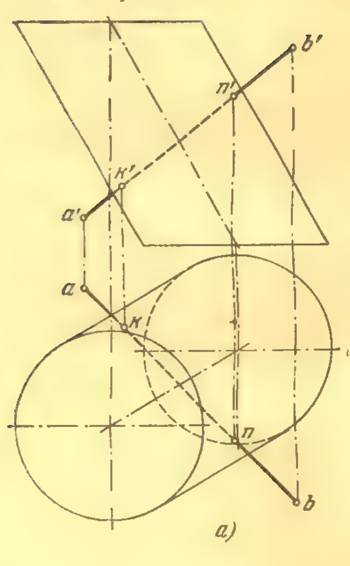



243.
m'
c'
b'
n'
a'
x
m
c
b
n
a
240.
b'
b
s'
s
O'
O
c'
c
a'
a
238.
b'
b
c'
c
O'
O
a'
a
x

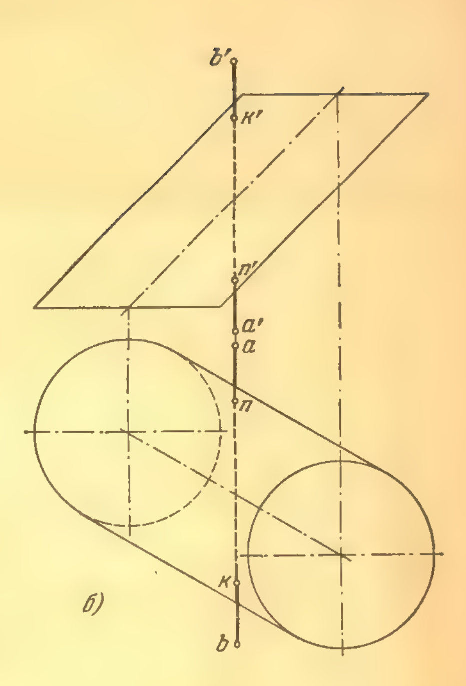
245.



249. а, б.

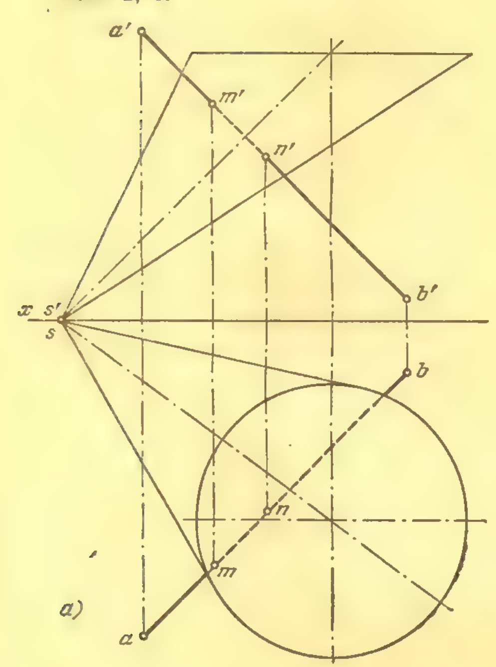


а)

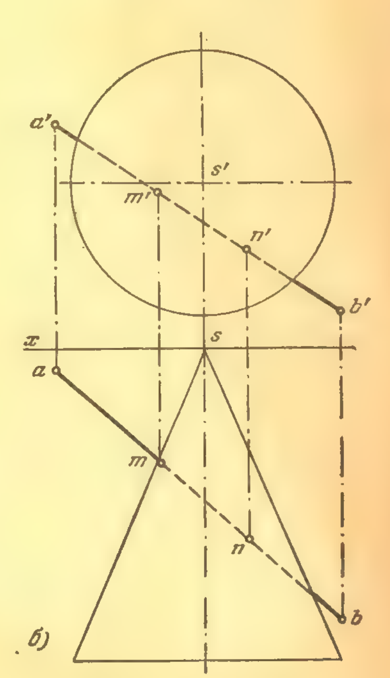


б)

252. а, б.

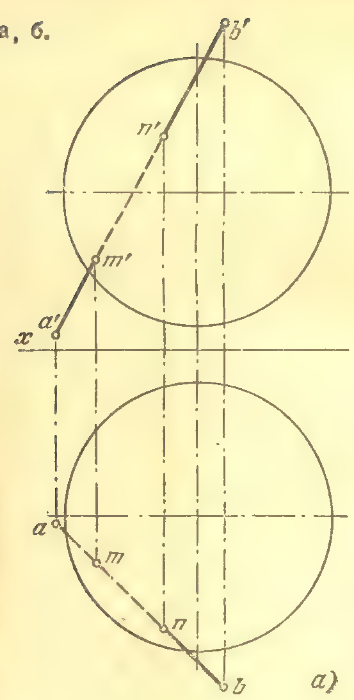


а)

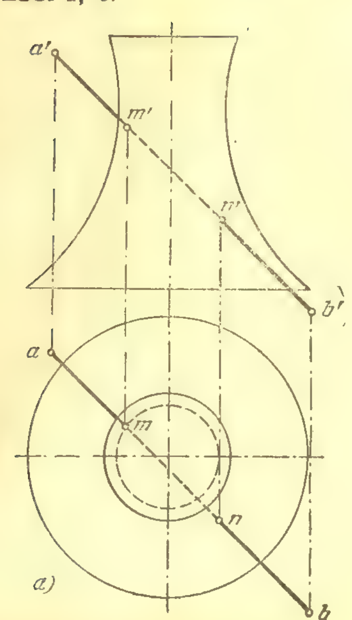


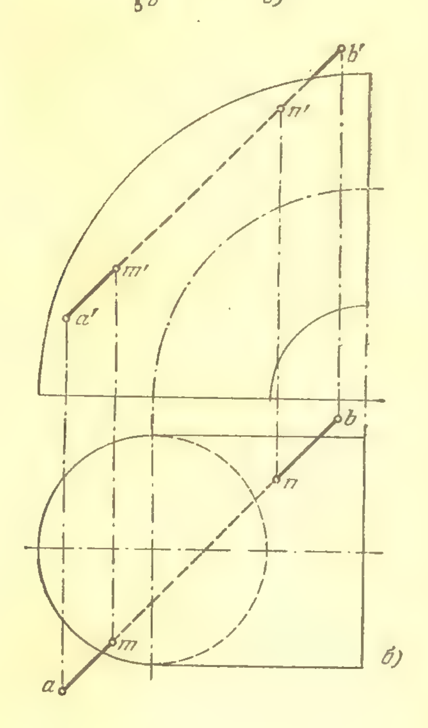
б)

254. а, б.



256. а, б.





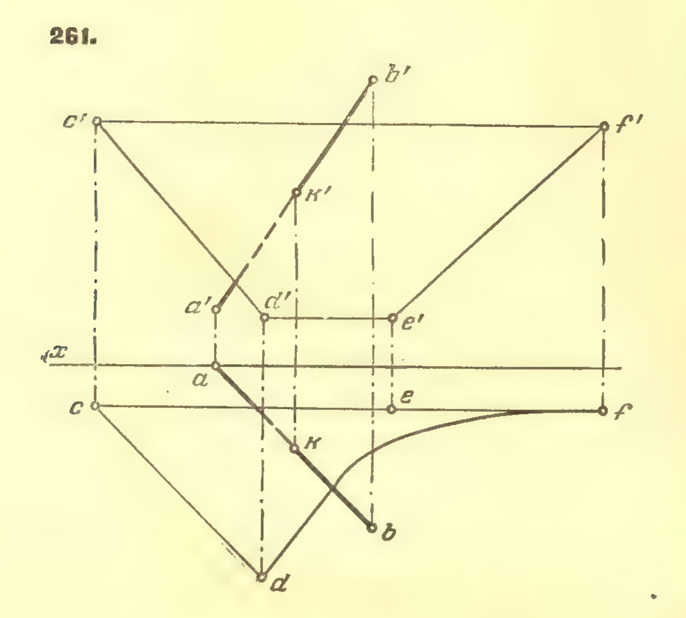
258.

a′ c′ d′ k′ e′f′ b′ x e d a k b c f

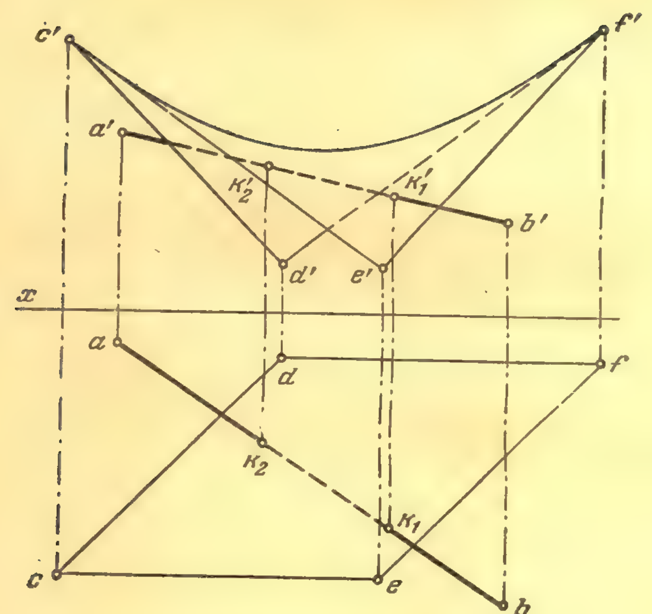
259.

d′ P_v a′ k′ b′ f′ c′ e′ x c b d k a e f

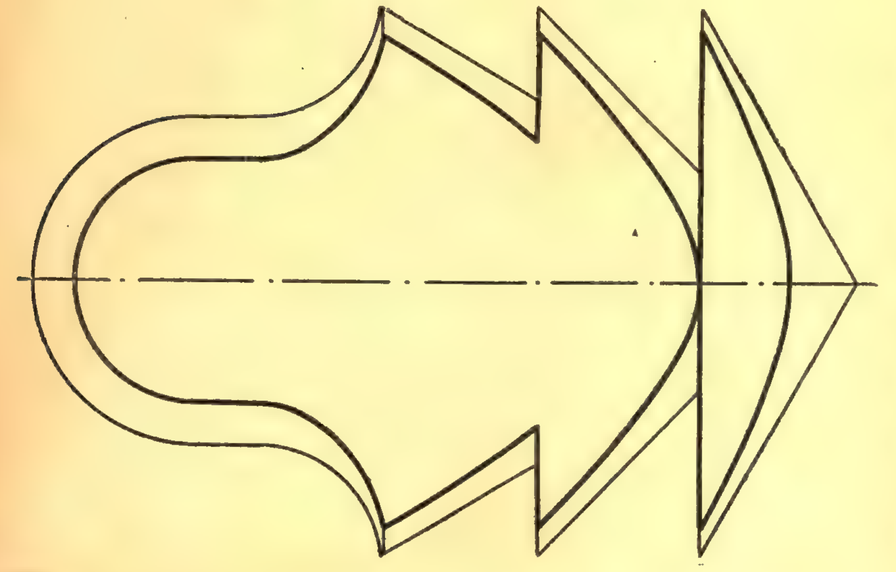
261.



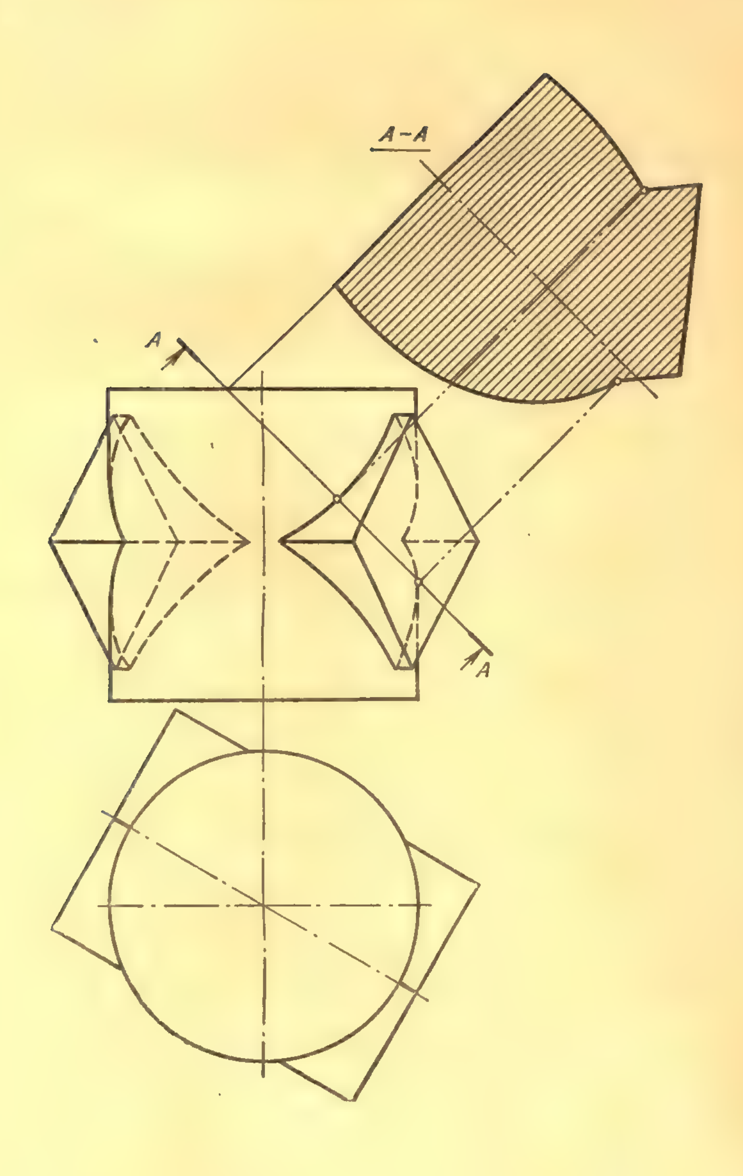
262.



264.

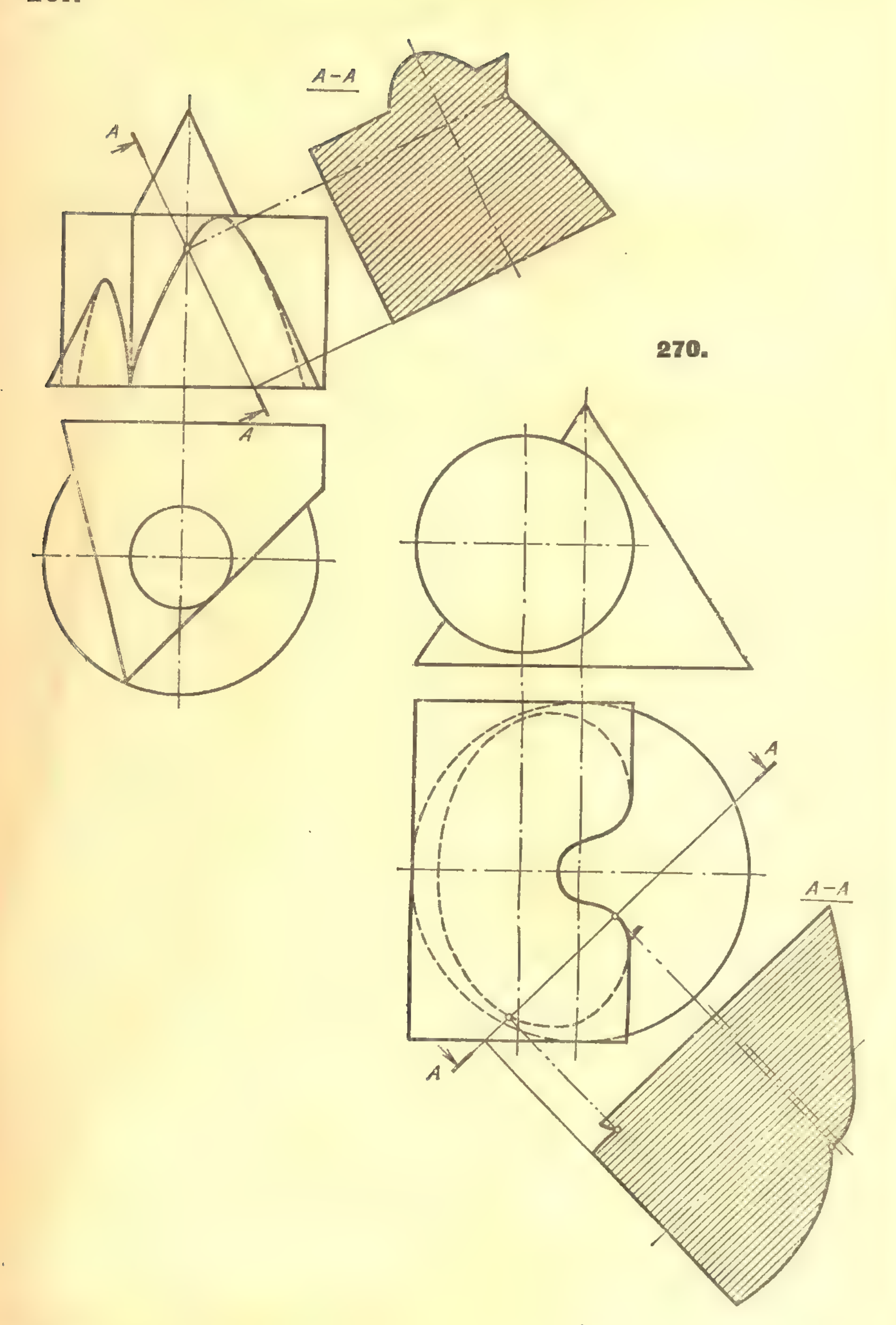


266.



267.

270.

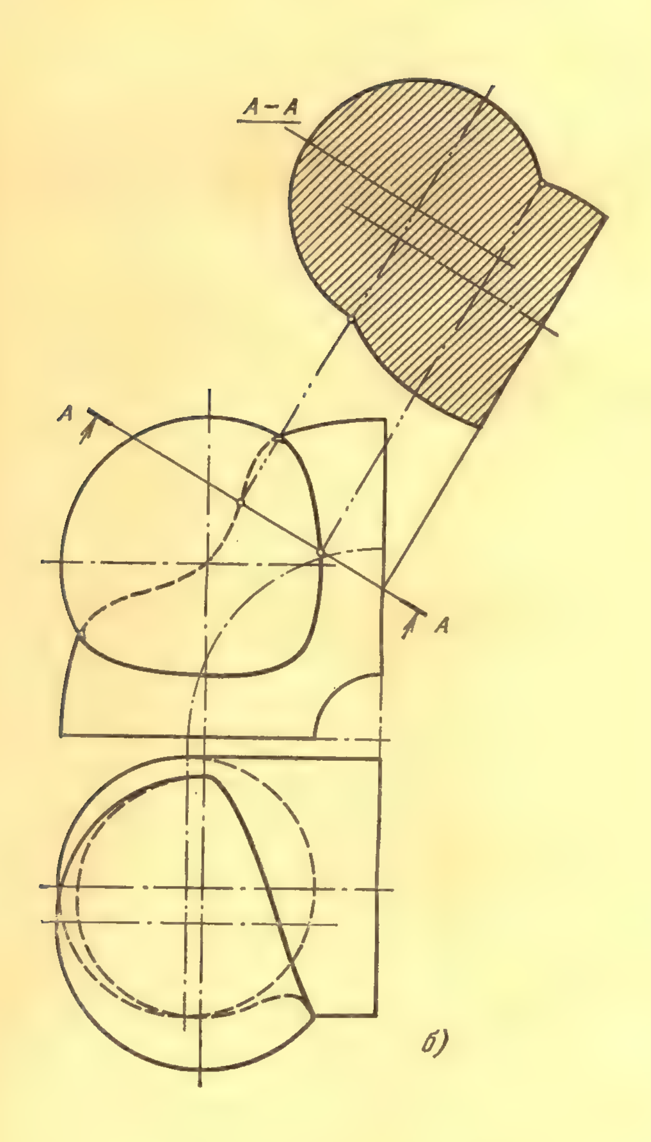


271

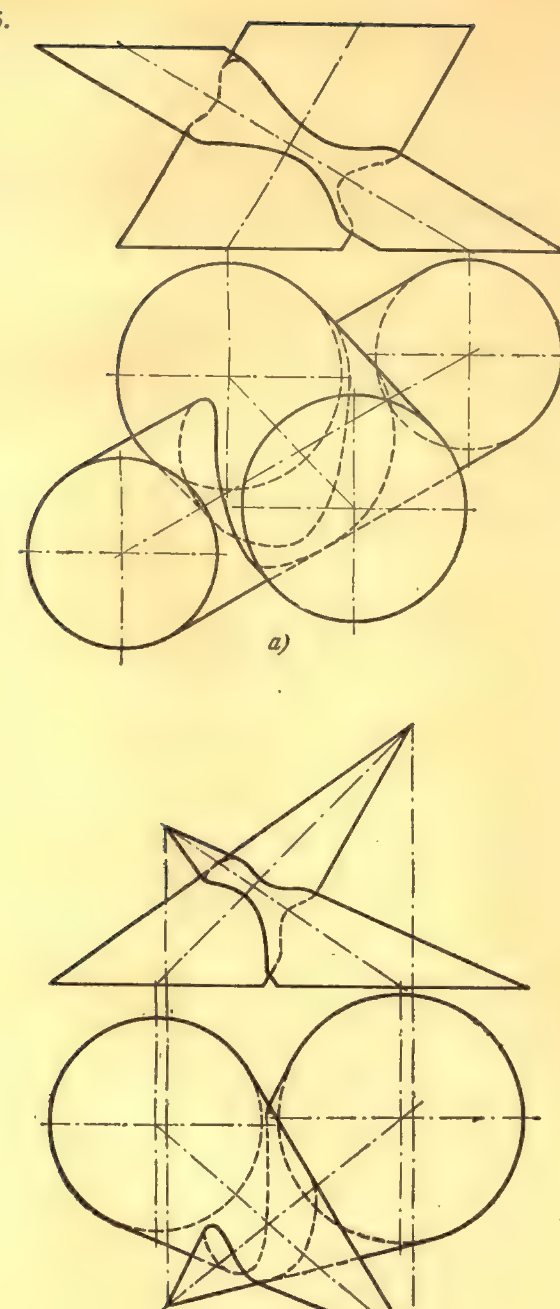
273. a.

a)

273. б.



275. а, б.

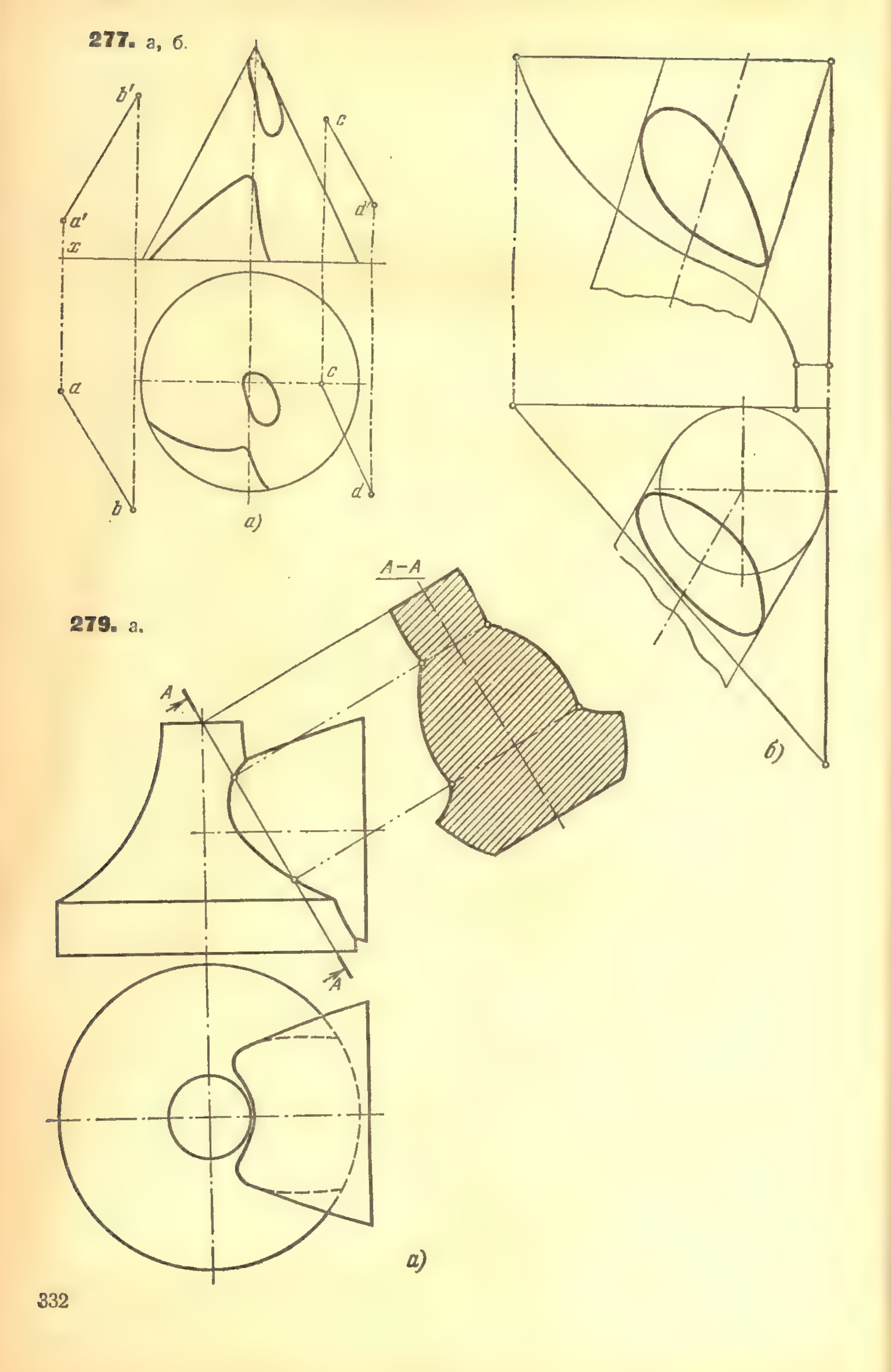


а)

б)

277. а, б.

279. а.



279. б.

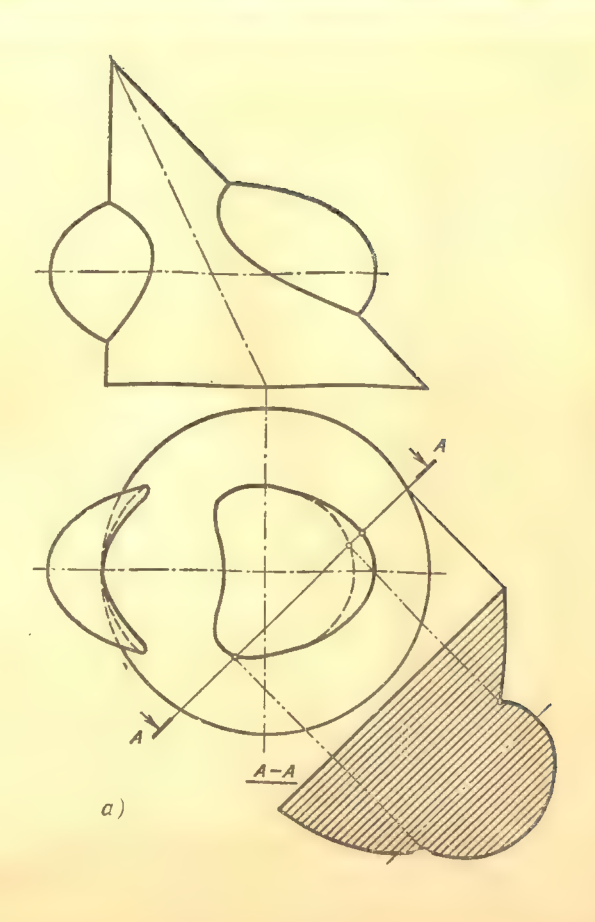
A–A

A

A

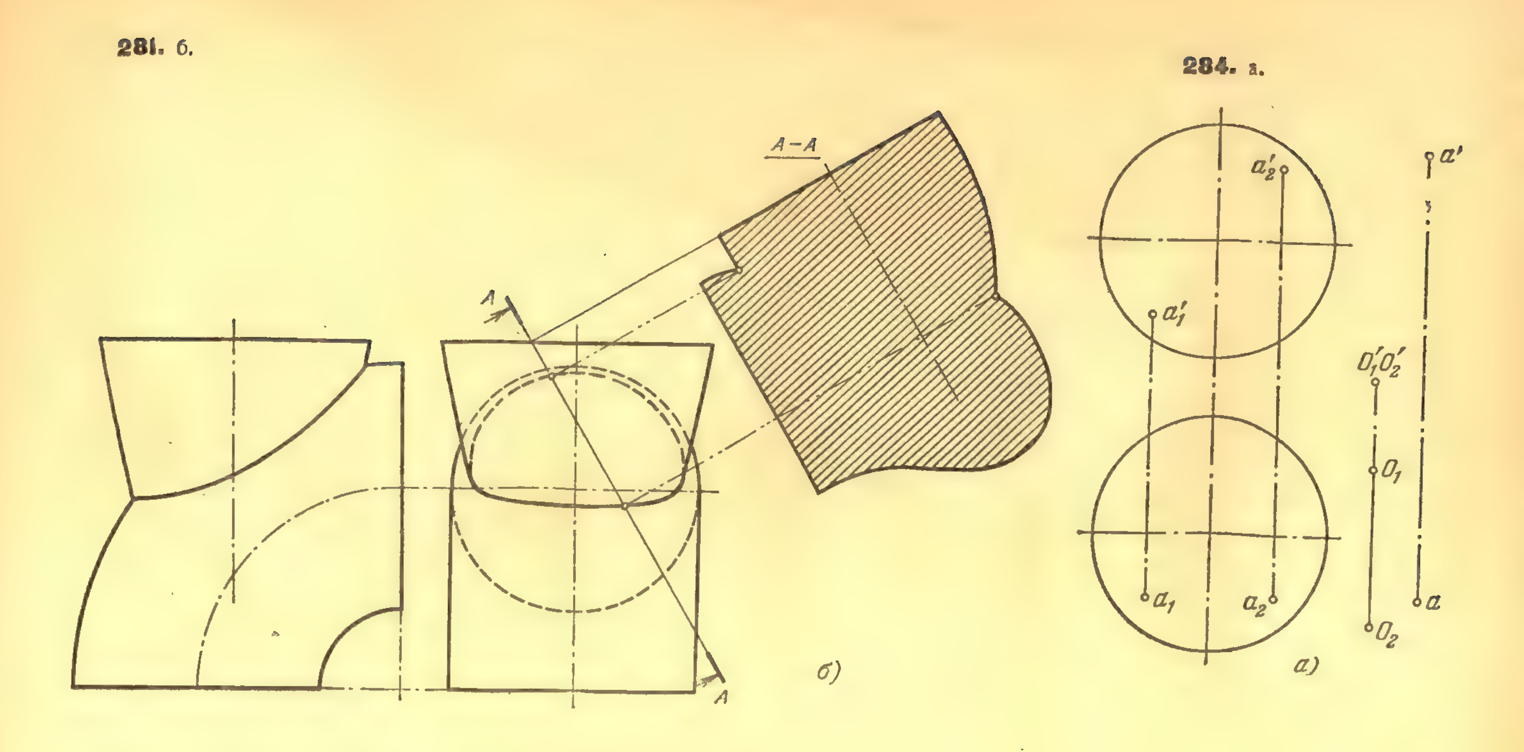
б)

281. а.

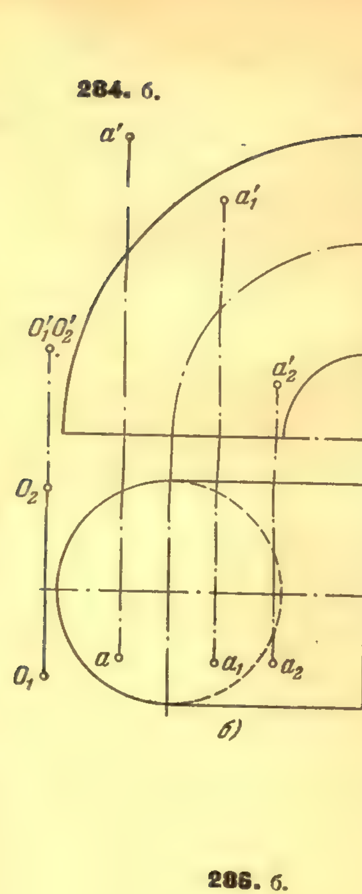


281. б.

284. а.

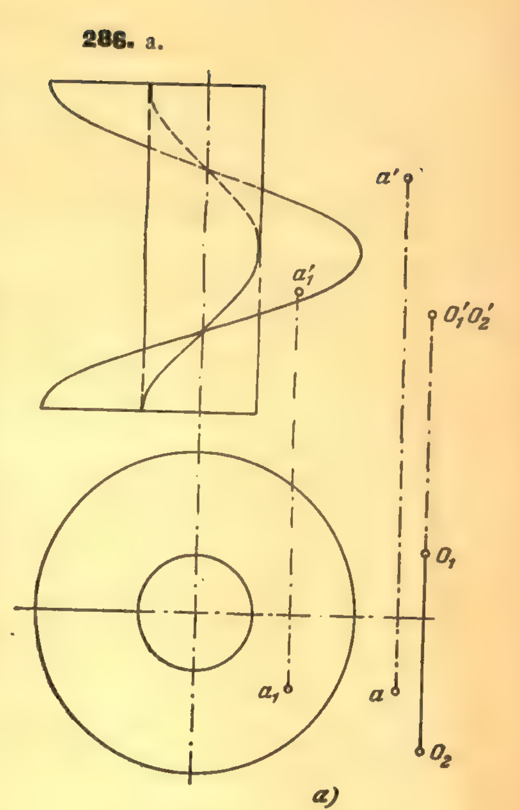


284. б.



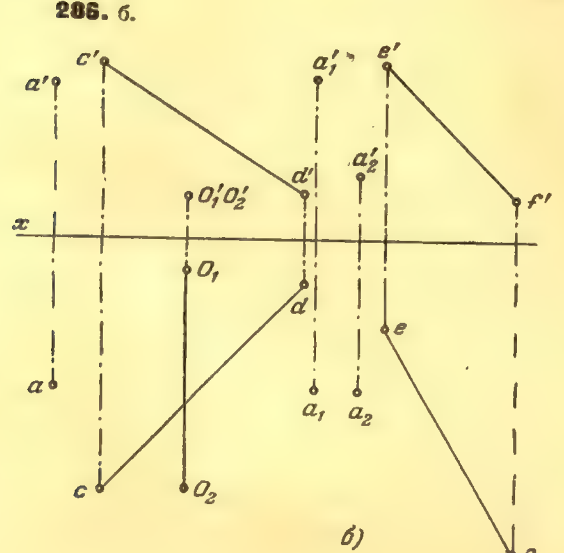
б)

286. а.



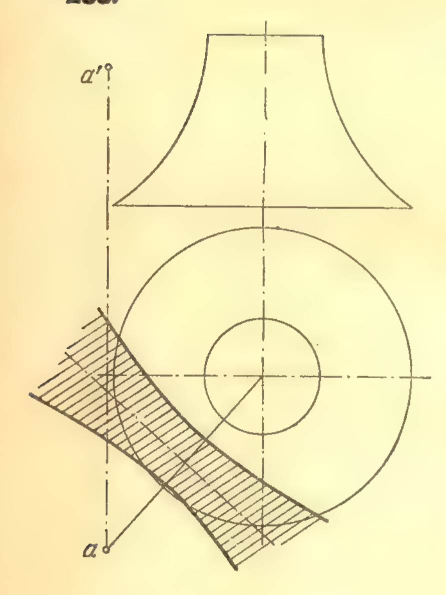
а)

286. б.

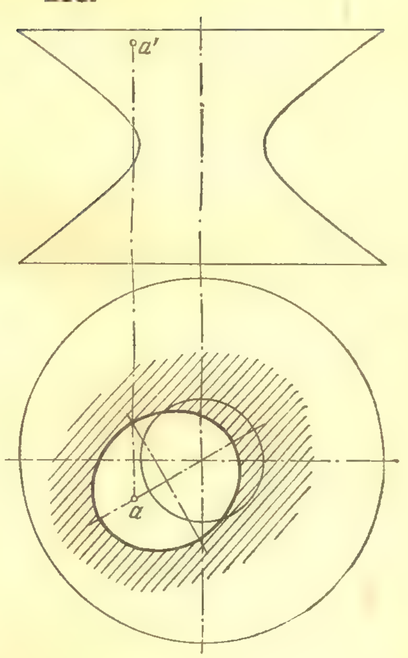


б)

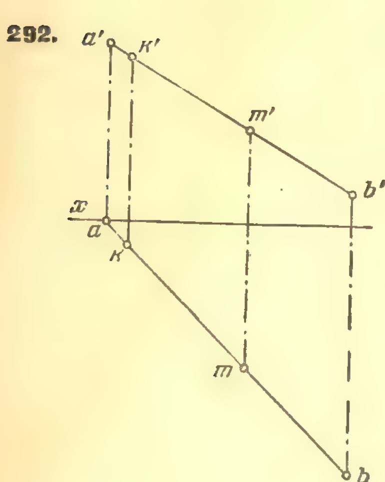
288.



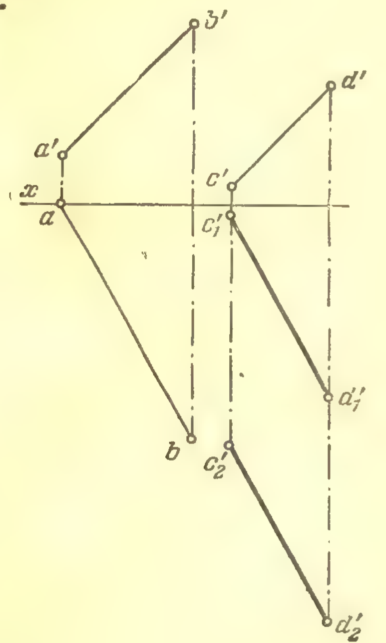
290.



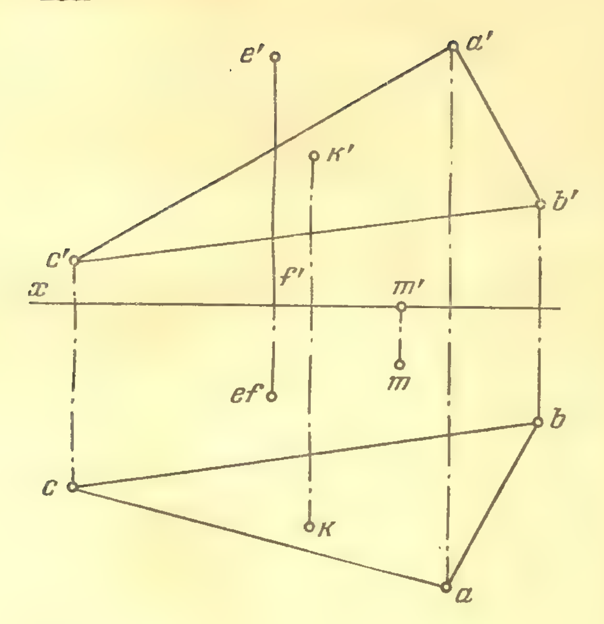
292.



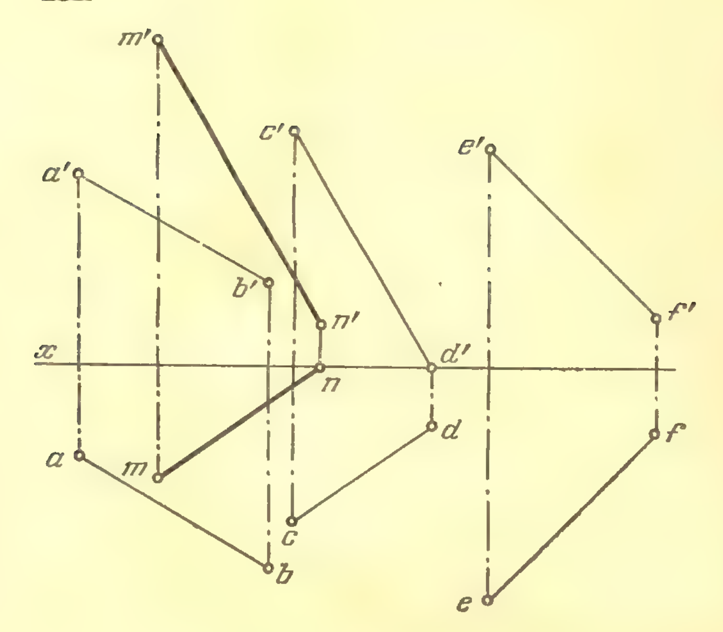
294.



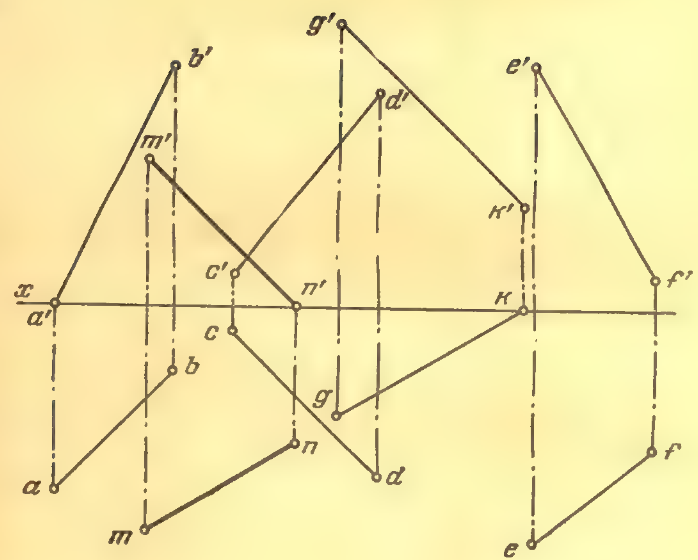
296.



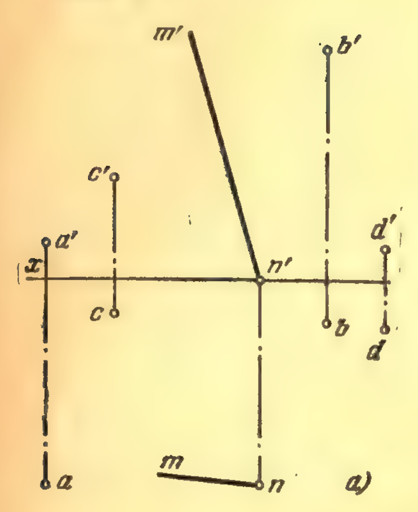
298.

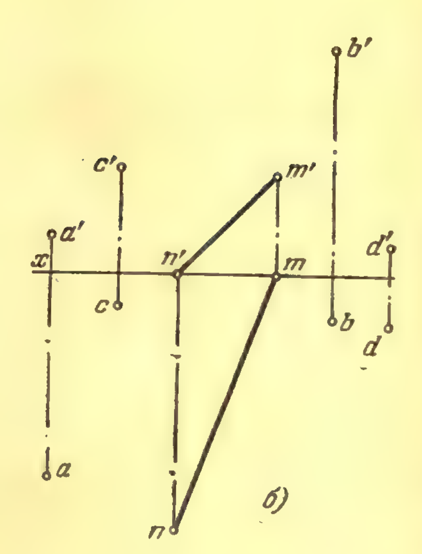


300.



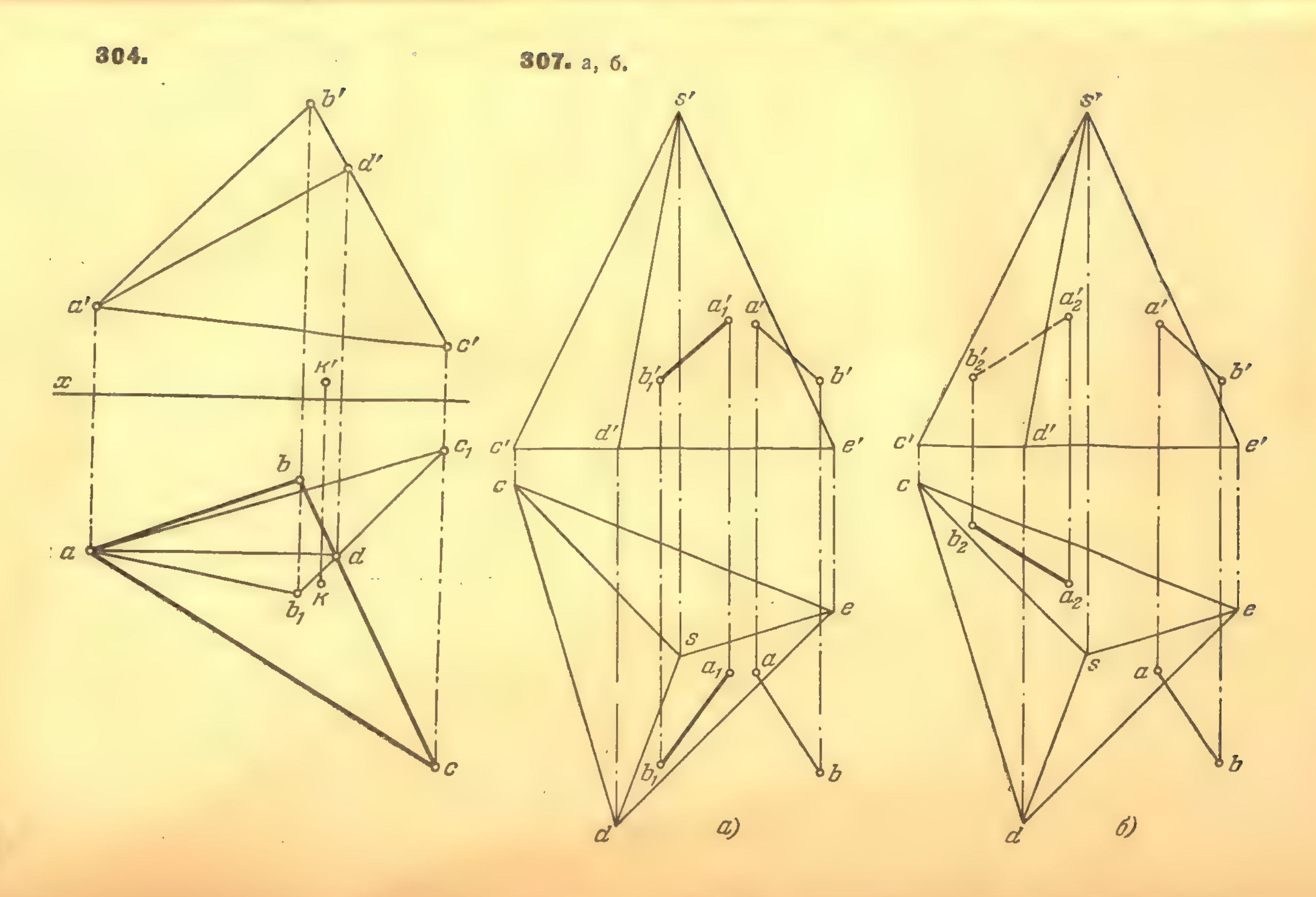
302. а, б.

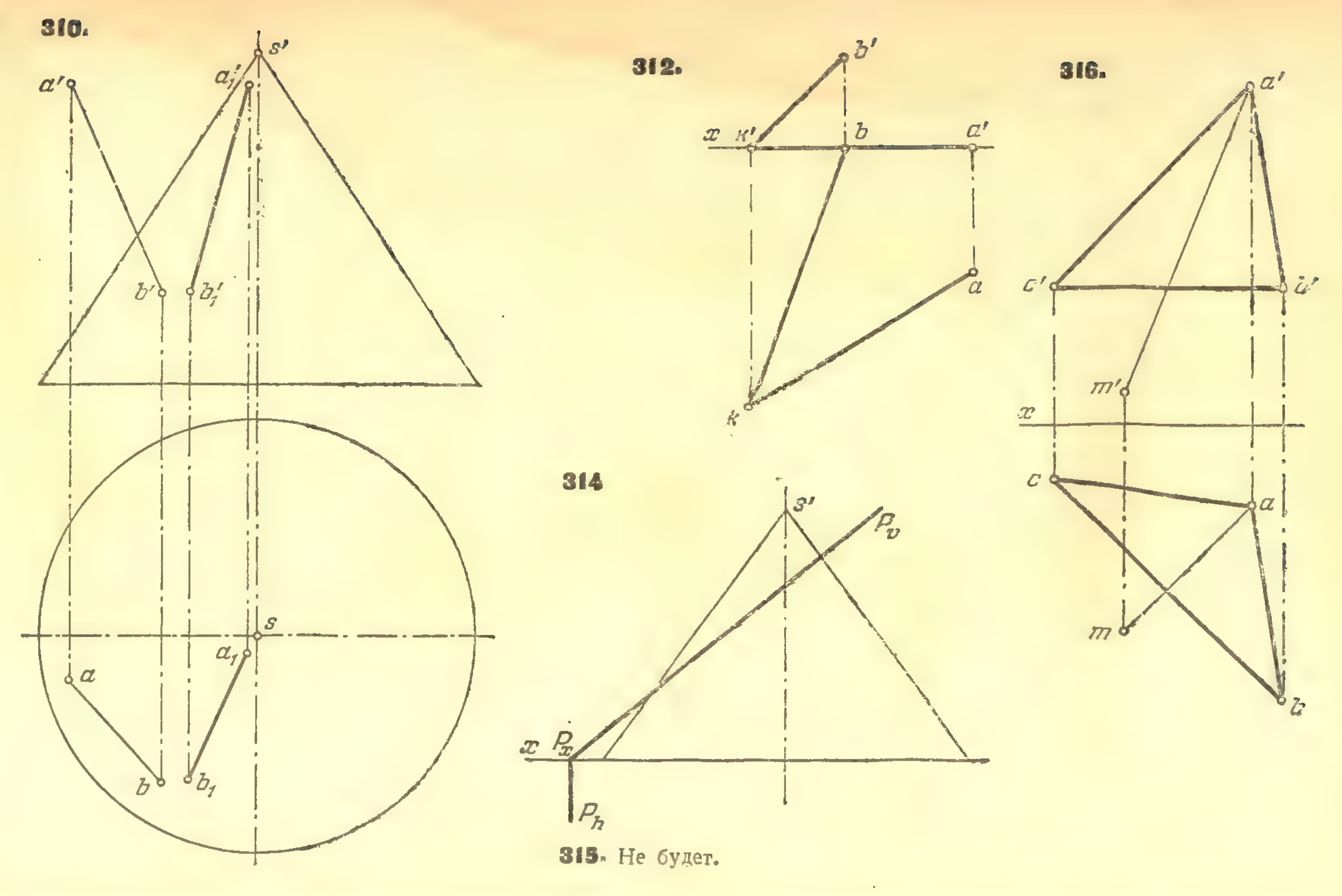




304.

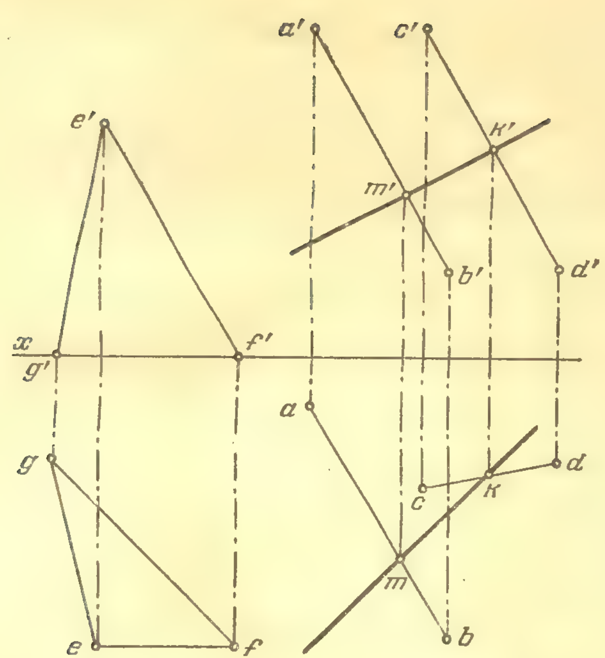
307. а, б.



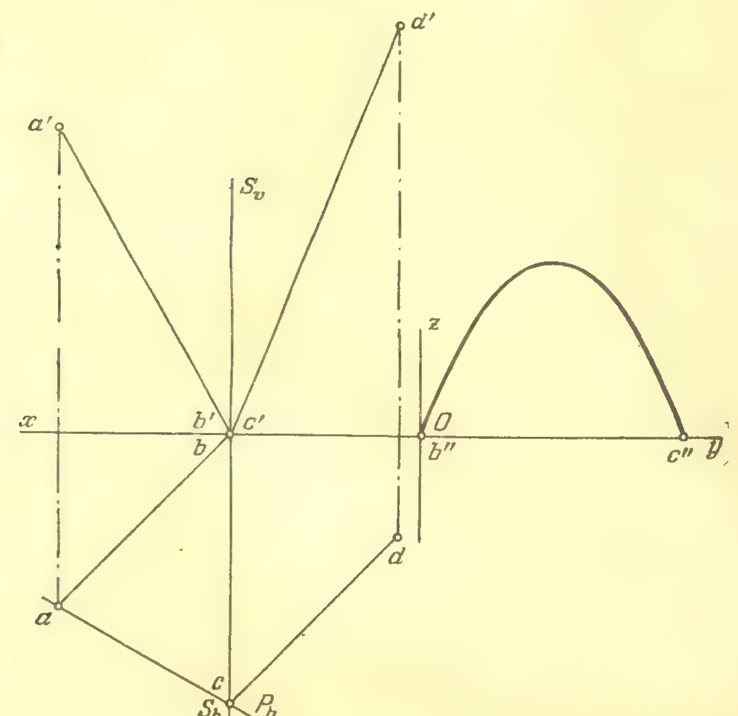

310.
a'
s'
a_1'
b'
b_1'
s
a_1
a
b
b_1
312.
b'
x
k'
b
a'
a
k
316.
a'
c'
b'
m'
x
c
a
m
b
314
s'
P_v
x
P_x
P_h

315. Не будет.

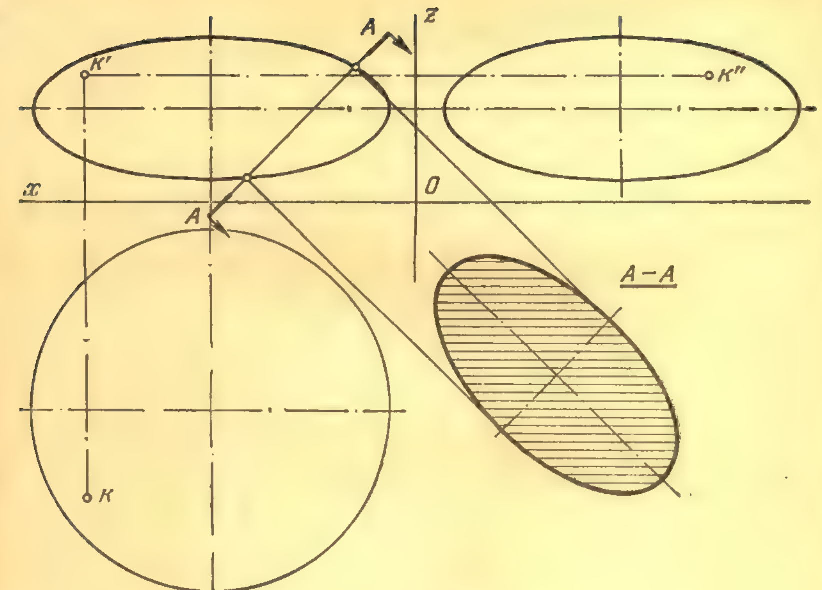
317.



318.



319.



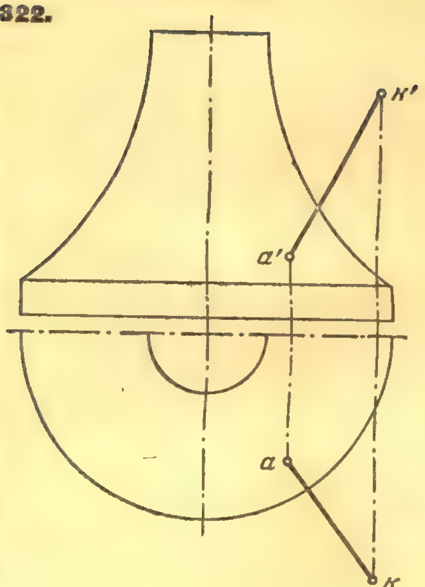
320.

O_1'
K'
O'
x
O
O_1

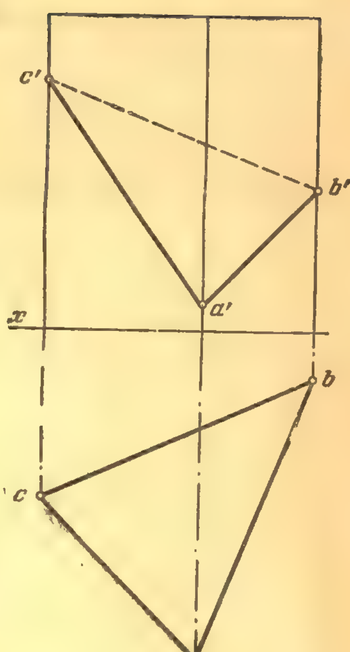
321.

S'
x
S_1'
S
K
S_1

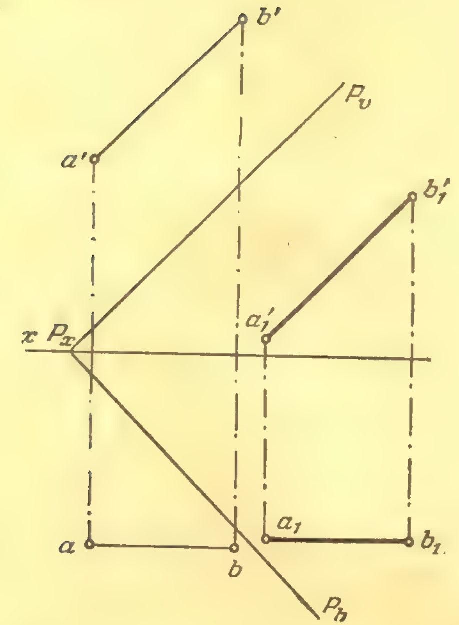
322.



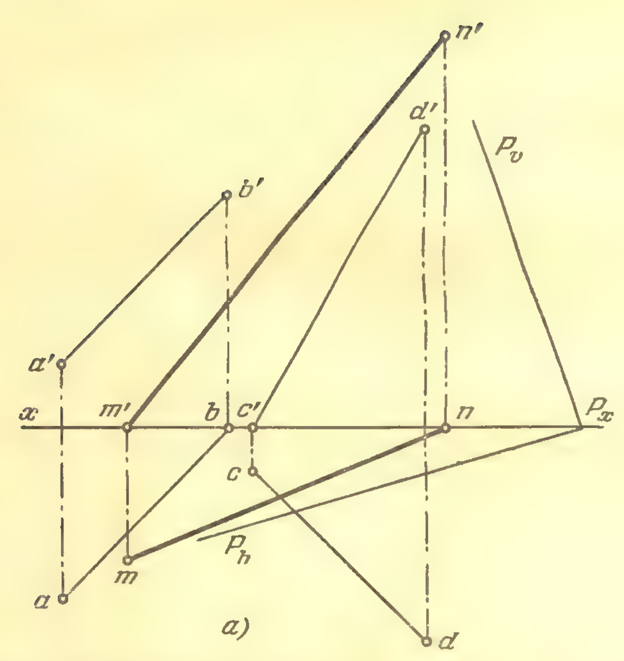
323.



324.



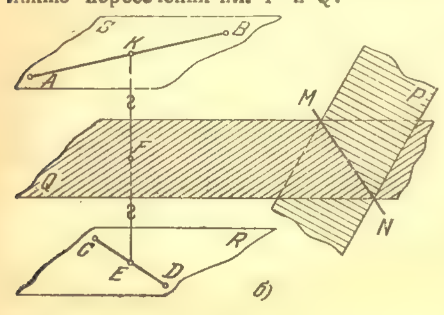
325. а, б.



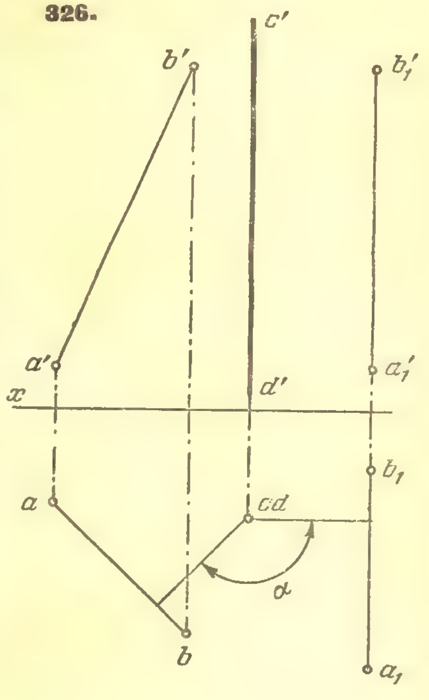
Искомым геометрическим местом является прямая MN пересечения пл. P с пл. Q (рис. б) ответа). Пл. Q параллельна обеим заданным прямым и проходит через точку F — середину отрезка EK общего перпендикуляра к прямым.

При решении задачи строить прямую EK не обязательно: пл. Q следует провести посередине между параллельными пл. S и R, проходящими соответственно через прямые AB и CD.

План решения. 1. Через AB провести пл. $S \parallel CD$ (или наоборот). 2. Определить расстояние между пл. S и R (пл. R для этого не требуется). 3. Провести пл. Q, равноудаленную от них и параллельную им. 4. Построить линию пересечения пл. P и Q.

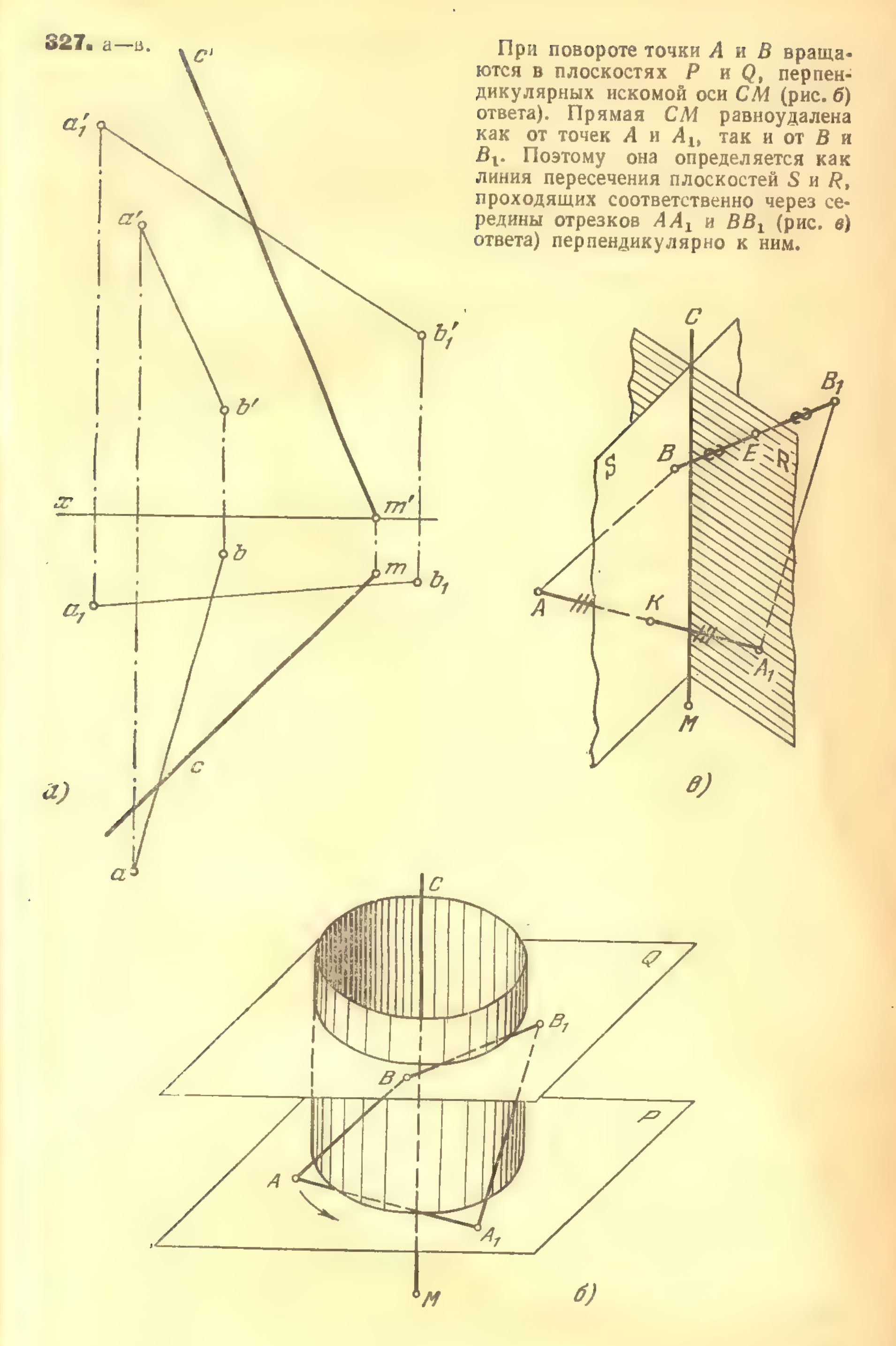


326.

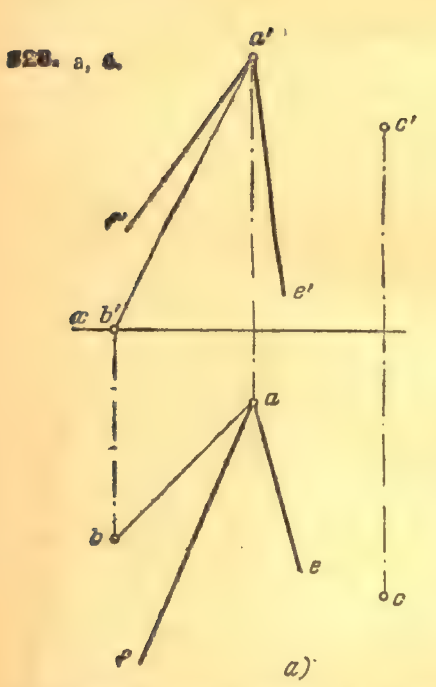


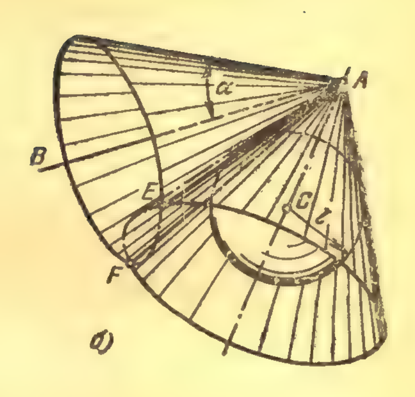
327. а—в.

При повороте точки A и B вращаются в плоскостях P и Q, перпендикулярных искомой оси CM (рис. *б*) ответа). Прямая CM равноудалена как от точек A и A_1, так и от B и B_1. Поэтому она определяется как линия пересечения плоскостей S и R, проходящих соответственно через середины отрезков AA_1 и BB_1 (рис. *в*) ответа) перпендикулярно к ним.



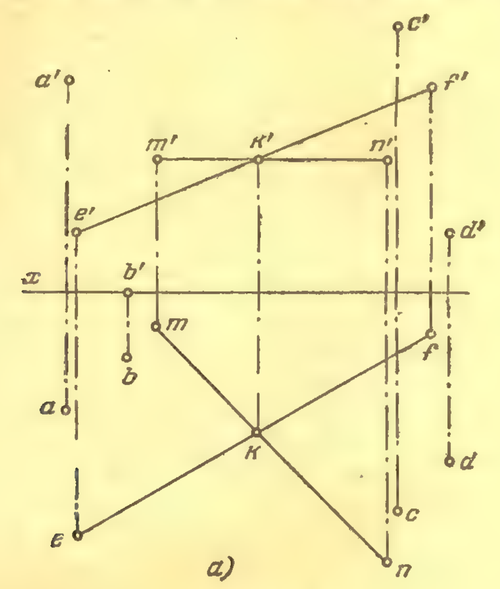
328. а, б.



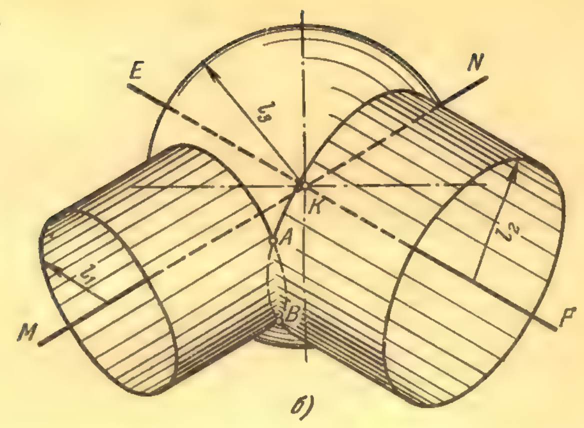


Искомые прямые AE и AF являются линиями пересечения двух конических поверхностей с вершиной в точке A (рис. б) ответа): одной — с осью AB и углом α наклона образующих к оси; другой — описанной вокруг сферы радиуса l с центром в точке C.

329. а. Искомые точки A и B являются точками пересечения двух окружностей (рис. б) ответа): окружности пересечения сферы радиуса l_3 с центром в точке K с цилиндром радиуса l_1 и осью MN и окружности пересечения той же сферы с цилиндром, осью которого является прямая EF, а радиус равен l_2.

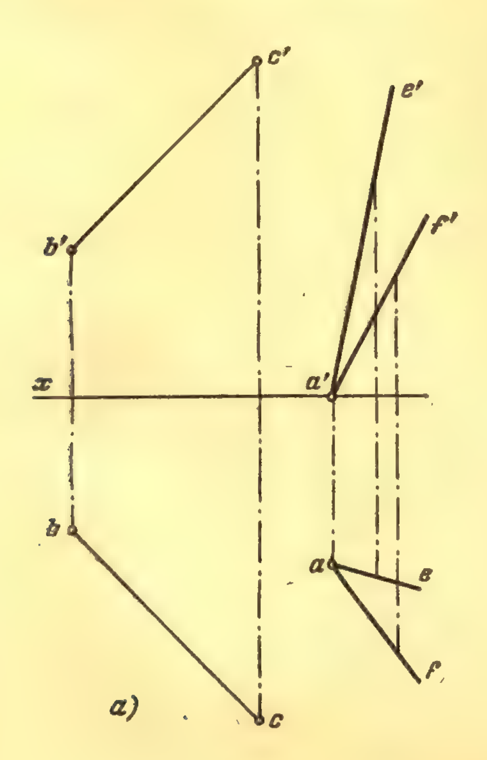


329. *б*.



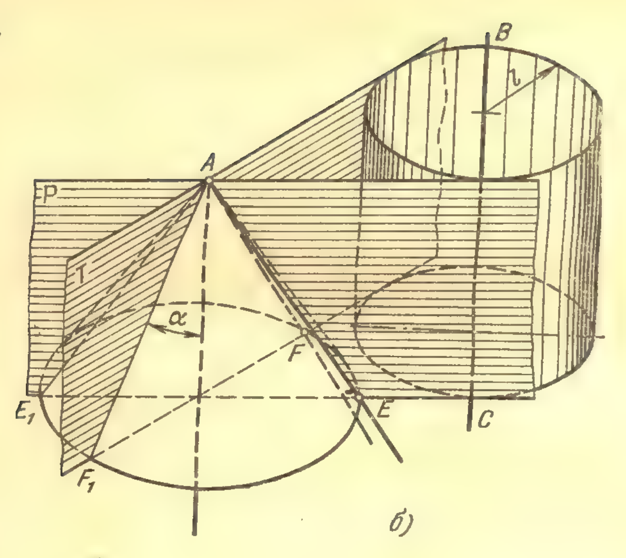
б)

330. а. Искомые прямые, во-первых, находятся в плоскостях P и T, проходящих через точку A и касательных к цилиндрической поверхности радиуса l с осью BC (рис. *б*) ответа); во-вторых, принадлежат конической поверхности, вершина которой — точка A, ось — прямая, параллельная BC, и угол наклона образующих к оси — α. Искомые прямые — результат пересечения этой поверхности с плоскостями P и T.



а)

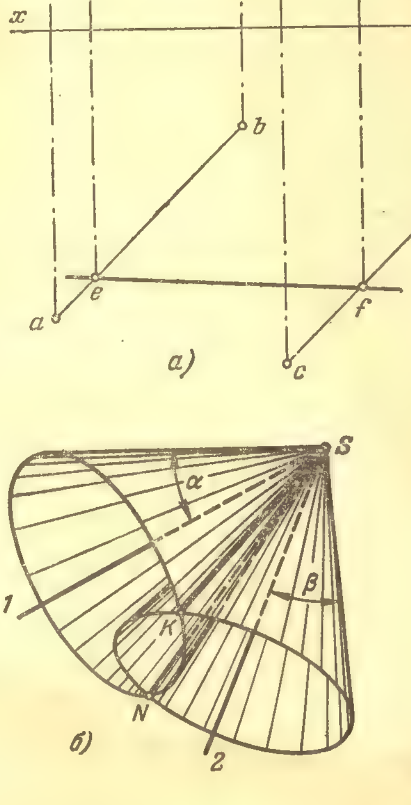
330. б.



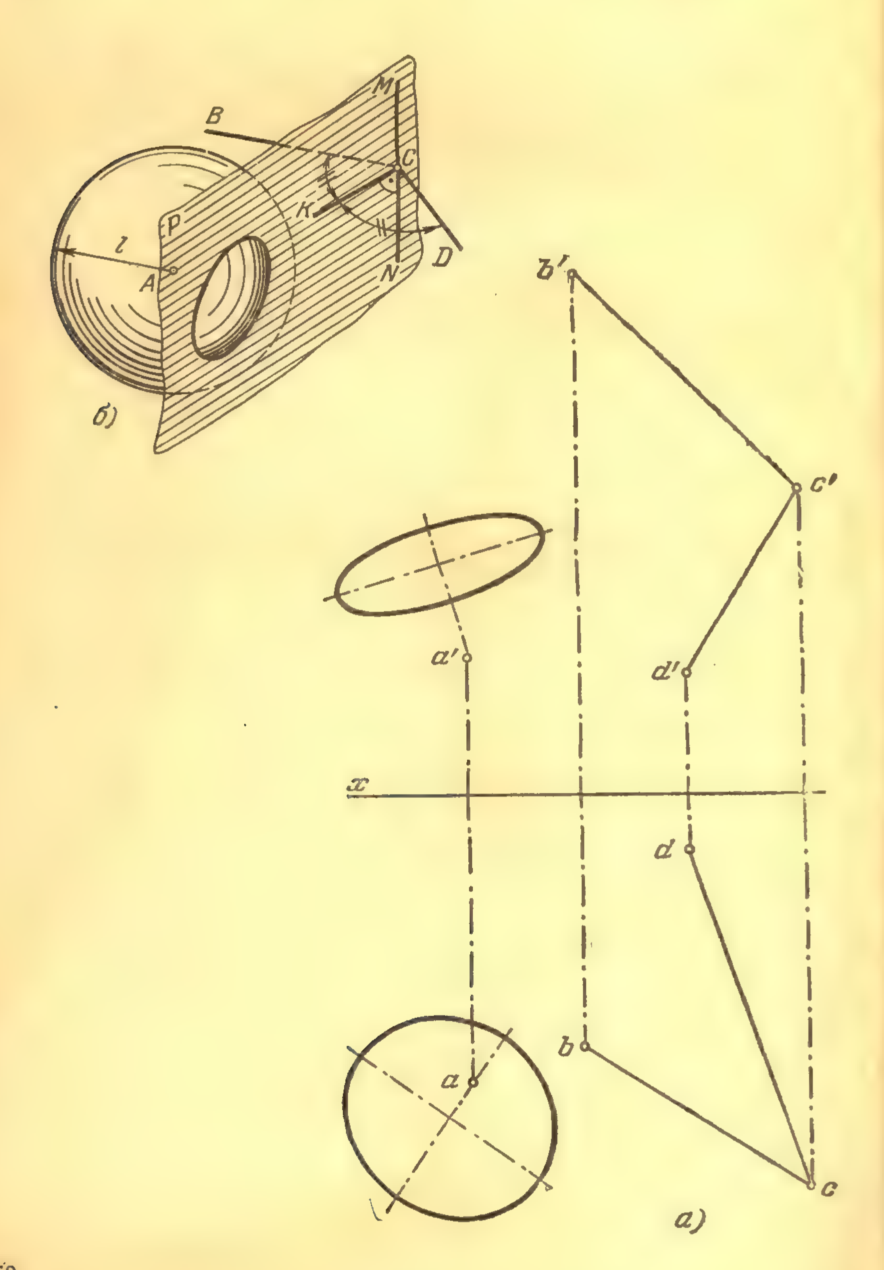
331. Искомые прямые, во-первых, принадлежат конической поверхности (рис. *б*) ответа) с осью AB и углом α между образующими и осью; во-вторых, пл. P, проходящей через точку A и касательной к цилиндру, ось которого — прямая CD и радиус — l. Следовательно, эти прямые определяются как линии пересечения пл. P с конической поверхностью.

332. Искомыми прямыми являются образующие цилиндра (рис. *б*) ответа), имеющего ось CD и радиус l, проходящие через точки пересечения прямой AB с поверхностью этого цилиндра.

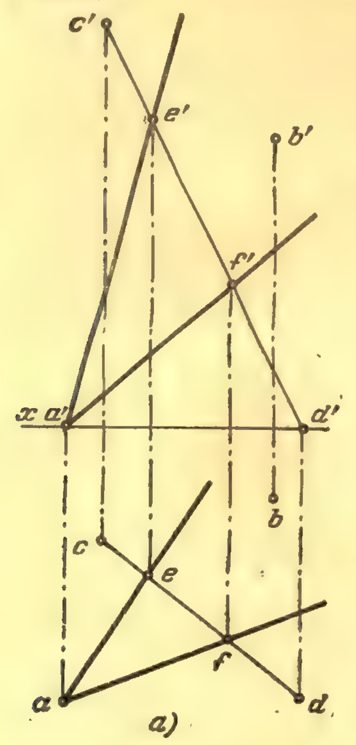
333. Для определения направления прямой EF следует (рис. *б*) ответа) через произвольную точку (S) провести прямые $S-1 \parallel AB$ и $S-2 \parallel CD$, описать вокруг них конические поверхности с углами наклона образующих к оси соответственно α и β и найти линию их пересечения SK (SN). Прямая EF параллельна этой линии. В дальнейшем решение задачи аналогично решению задачи 140.



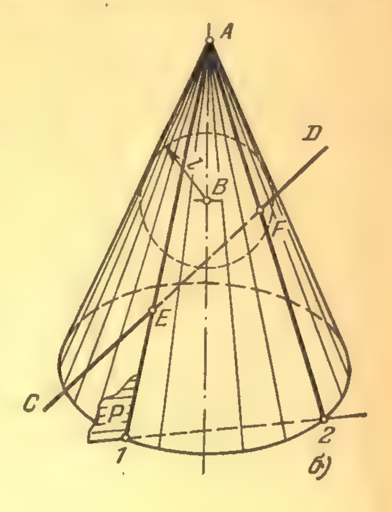
334. Искомым геометрическим местом точек (рис. *б*) ответа) является окружность пересечения сферы с центром в точке A и радиусом l с плоскостью, проходящей через биссектрису угла BCD перпендикулярно к плоскости этого угла.



335. Искомыми прямыми являются образующие конической поверхности с вершиной в точке A, описанной вокруг сферы с центром в точке B и радиусом l, проходящие через точку пересечения этой поверхности с прямой CD (рис. *б*) ответа).



а)



б)

Владимир Осипович Гордон,
Юрий Борисович Иванов,
Татьяна Евгеньевна Солнцева

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

М., 1971 г., 352 стр. с илл.

Редакторы *А. В. Бубенников, А. П. Баева*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *Т. С. Плетнева, В. П. Сорокина*

Печать с матриц. Подписано к печати 16/IV 1971 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$ тип. № 2. Физ. печ. л. 22. Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 21,8. Тираж 300 000 экз.
Цена книги 71 коп. Заказ № 1773

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

1коп.